

УДК 591.91

А.Л. Рутковский, В.И. Алехин

**ДИСКРЕТНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ
СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ
С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ**

В статье рассматриваются дискретные сингулярно возмущенные системы оптимального управления с запаздываниями. Подобные дискретные системы в общем случае с запаздыванием на один шаг могут быть описаны следующим образом. Пусть имеем

$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ – вектор фазового состояния, а

$\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^r)$ – управляющий вектор. Известна предыстория процесса, т.е. состояния $-1, x(0), \dots, x(N)$, а дальнейшее поведение объекта определяется соотношениями.

$$\mathbf{x}(t) = f_t(x(t-1), x(t-2), u(t)), t = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

Проблема состоит в том, чтобы определить управление

$$u(1), u(2), \dots, u(N),$$

которое, в свою очередь задает траекторию $-1, x(0), \dots, x(N)$, что дает возможность максимизировать функционал.

$$\sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), x(t-2), u(t)) \quad (2)$$

При этом могут быть наложены ограничения типа

$$u_t \in U_t(x(t-1), x(t-2))$$

на управление и ограничение типа $u_t \in M_t$ на фазовые координаты. Для решения данной задачи путем сведения ее к задаче без запаздывания введем дополнительную фазовую переменную

$= (x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{2n})$, которую подчиним условиям:

$$= x(t-1), \dots, 0, 1, \dots \quad (3)$$

В таком случае $= x(-1)$, а уравнение (1) перепишется следующим образом:

$$= f_t(x(t-1), y(t-1), u(t)), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Ограничения

$u_t \in U_t(x(t-1), x(t-2))$ принимает следующий вид:

$$u_t \in U_t(x(t-1), y(t-1)) \quad (5)$$

Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи. Дано фазовых координат

$x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n}$ и управляющих параметров

\dots, u^r . Итак, соотношения (3)–(5) задают дискретный управляемый объект. Для данного объекта определена начальная точка $(0, y(0))$; необходимо максимизировать функционал.

$$\sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), y(t-1), u(t)) \quad (6)$$

Итак, задача с запаздыванием (на один шаг) сведена к задаче с закрепленным левым концом. Если же в правую часть соотношения входит -1 , введем еще одну фазовую переменную. $= (x^{2n+1}, \dots, u^r)$. Будем требовать, чтобы она удовлетворяла условиям $= u(t)$. Учитывая сказанное, соотношения типа (1)

можно переписать следующим образом.

$$y = f_t(x(t-1), y(t-1), u(t), z(t-1)), \quad (7)$$

Что вполне согласуется с записью дискретного управляемого объекта. Если же мы имеем дискретные управляемые объекты с запаздыванием на шагов (здесь τ – натуральное число, меньшее n). Такие объекты описываются соотношениями типа.

$$y = f_t(x(t-1), x(t-2) \dots x(t-\theta-1), u(t)) \quad (8)$$

$$\tau = 1, 2, \dots, N$$

Причем заданы

$x(-\theta), x(-\theta+1), \dots$, и налагаются ограничения на управляемые параметры и фазовые координаты. Подобные объекты введением дополнительной фазовой переменной

$= (x^{n+1}, \dots, x^{2n})$, подчиненной условию (2), уменьшает на единицу. Это сводит рассматриваемый объект к другому объекту, имеющему запаздывание на -1 шагов. Итак, введя достаточное число дополнительных фазовых координат можно свести объект (8) к объекту без запаздыва-

ния. Учитывая, сказанное выше, далее, определим дискретные сингулярно возмущенные системы оптимального управления технологическими объектами с запаздыванием. Будем говорить, что дискретная система является сингулярно возмущенной системой оптимального управления с запаздыванием на один шаг (1), если соответствующая непрерывная система сводится к сингулярно возмущенной. Таким образом, для регуляризации дискретной сингулярно возмущенной системы необходимо, чтобы можно было регуляризовать непрерывную сингулярно возмущенную систему. Пусть дана дискретная сингулярно возмущенная система с запаздыванием на один шаг.

$$t = ex(t-1) + (x(t-1))^2 + (x(t-2))^2 + u(t) \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что (9) соответствует непрерывная сингулярно возмущенная система с запаздыванием следующего вида:

$$\dot{y} = y^2 + y^2 \cdot 2h + v(\tau) \quad (10)$$

Система (10) известными методами может быть регуляризована.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рутковский А.Л., Салихов З.Г., Алексин В.И. Методы построения асимптотической теории оптимального управления кинетическими процессами в технологических

объектах // Известия высших учебных заведений Цветная металлургия, №6, 2007.

ГИАБ

Коротко об авторах –

Рутковский А.Л. – доктор технических наук, профессор,
Алексин В.И. – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, докторант.
кафедра теории и автоматизации металлургических процессов и печей, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (Государственный технологический университет).

УДК 591.9

А.Л. Рутковский, В.И. Алехин

**ДИСКРЕТНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ
СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ**

Многие задачи оптимального управления технологическими объектами в горном, металлургическом и т.п. производствах описываются дискретным системами оптимального управления. Изучение подобных задач приводит к получению информации о теоретических и практических основах их создания.

Далее, в общем случае будем считать, что в каждый момент состояния технологического объекта определяется n фазовыми координатами x^1, x^2, \dots, x^n . Это означает, что (x^1, x^2, \dots, x^n) есть точка пространства. Итак в каждый момент t фазовое состояние \vec{x} будет иметь n координат $\vec{x} = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$.

Последовательность

$$\vec{x}(1), \dots, \vec{x}(N) \quad (1)$$

Состояний объекта в моменты $t = 0, 1, 2, \dots, N$ будем называть траекторией движения объекта. $\vec{x}(0)$ - начальное состояние. Поведение технологического объекта, однозначно определяется, если выбрано некоторое управление $u(1), u(2), \dots, u(N)$ с помощью соотношений

$$\vec{x}(t) = f_t(\vec{x}(t-1), u(t)), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

где

$$(x, u) = (x^1, u^1, x^2, u^2, \dots, x^n, u^n)$$

некоторая вектор-функция со значениями в пространстве \mathbb{R}^n . Соотношения (2) представляют собой закон движения дискретного управляемого объекта. Для всякой точки \mathbb{R}^n и каждого $t = 1, \dots, N$ задано в пространстве переменных u^1, u^2, \dots, u^n некоторое множество U_t - область управления, которая в момент t соответствует фазовому состоянию x и $u \in U_t(x(t-1))$.

Далее, введем критерий эффективности $J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы, зная начальное состояние $\vec{x}(0)$ определить такое допустимое управление для управляемого объекта, которое придает функционалу максимальное значение. Данную задачу будем называть основной (задача оптимального управления с закрепленным левым концом и свободным правым концом). Подобные задачи оптимального управления называются регулярными.

Наряду с дискретным управляемым объектом будем называть дискретный управляемый объект сингулярно возмущенным, если ему соответствует непрерывный сингулярно возмущенный управляемый объект. Напомним, что непрерывный управляемый объект называется сингулярно возмущенным, если при главных частях соответствующего дифференциального

оператора присутствует малый параметр.

Рассмотрим дискретный управляемый объект следующего вида:

$$x(t) = \varepsilon x(t-1) + (x(t-1))^2 + u(t) \quad (3)$$

малый параметр. Для выяснения вопроса, какой непрерывный управляемый объект будет соответствовать объекту (3) применим замену переменных

$$\begin{aligned} y(t) &= \varepsilon y(t\varepsilon) = \varepsilon y(t), \\ v(t) &= v(t\varepsilon) = \varepsilon^2 v(t) . \end{aligned}$$

Не трудно видеть, в таком случае дискретный управляемый объект.

$$y(t) = y^2 + v \quad (4)$$

Т.к. малый параметр стоит при старших производных дифференциального уравнения, следовательно (4) будет сингулярно возмущенным. Для регуляризации (4) применим метод Уизема.

$$\begin{aligned} y(\theta, t, \varepsilon) &= y_0(\theta, t) + \varepsilon y_1(\theta, t) + \dots + \varepsilon^n y_n(\theta, t) + \dots \quad (5) \\ v(\theta, t, \varepsilon) &= v_0(\theta, t) + \varepsilon v_1(\theta, t) + \dots + \varepsilon^n v_n(\theta, t) + \dots \quad (6) \end{aligned}$$

Подставим асимптотические разложения фазовых координат (5) и

управлений (6) в сингулярно возмущенное уравнение (4) и приравняем нулю коэффициенты при $k = 0, 1, 2, \dots$

В результате получим рекуррентную цепочку регуляризованных, непрерывных систем оптимального управления следующего вида.

$$\frac{d\theta}{dt} = y_0^2 + v_0 \quad J_0 = J_0(y_0, v_0),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2y_1 y_0 + \frac{\partial y_0}{\partial t} + ,$$

$$= J_1(y_0, v_0, y_1, v_1),$$

\vdots

$$\frac{d\theta}{dt} = y_1^2 + 2y_1 y_0 + \frac{\partial y_1}{\partial t} + ,$$

$$= J_2(y_0, v_0, \dots, y_2, v_2),$$

и т.д.

Рекуррентная система регуляризованных систем оптимального управления решается, в отличие от сингулярно возмущенной системы (4) и соответственно системы (3) известными методами теории оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ – приближениях. // Итоги Науки и Техники ВНИТИ, Современные проблемы математики, т.15, 1980, с.3-93. ГИАБ

Коротко об авторах

Рутковский А.Л. – доктор технических наук, профессор,
Алехин В.И. – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, докторант.
кафедра теории и автоматизации металлургических процессов и печей, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (Государственный технологический университет).



УДК 591.9

А.Л. Рутковский, В.И. Алексин

**СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Простейшая система с запаздыванием представляется уравнением

$$\dot{x} = Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad x(0), \quad x(t) = (x_1, \dots,) \quad (2)$$

вектор, описывающий положение изучаемой системы в момент времени

- скаляр, определяющий величину управления в момент времени постоянные $n \times n$ матрицы, определяющие динамические свойства объекта, - вектор, отражающий свойства входного устройства; $h > 0$ - некоторое число (запаздывание). Функция $\varphi(t)$ и вектор определяют начальные условия.

Явление запаздывания в системе (1) выражается в том, что на скорость изменения положения системы оказывает влияние не только положение $x(t)$, но и положение $x(t-h)$ в котором система прибывала единиц времени назад. Учитывая систему (1), (2) запишем соответствующую сингулярно возмущенную систему с запаздыванием.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t), \quad t \geq 0 \\ &= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad x(0), \quad x(t) = (x_1, \dots,) \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, сингулярно возмущенная система отличается от регулярной системы (1), (2) наличием малого параметра при главных членах дифференциального оператора. Это отличие создает принципиальные трудности при рассмотрении системы (3) на относительную управляемость

. Данные трудности связаны с введением определяющего уравнения, которое в случае (1) выглядело бы следующим образом.

$$Q_{k+1}(t) = AQ_k(t) + A_1Q_k(t-h), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad t \geq 0 \quad (5)$$

$$Q_0(0) = E,$$

$$Q_k(t) = 0, \quad t \neq 0, \quad Q_k(t) = 0,$$

если $t < 0$,

Здесь $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матричная функция. Через решения системы (5) выражается критерий относительной управляемости. Имеет место следующий результат. Система (1) относительно управляема, тогда и только тогда, когда

$$\text{rk}(Q_k(t)b, k = 0, 1, 2, \dots, n-1; t \in [0, T]) = n \quad (6)$$

В случае же системы (3) проверка критерия (6) вызывает значительные трудности.

(3) Для преодоления данных трудностей применим асимптотический метод Уизема, который позволяет привести сингулярно возмущенную сис-

тому (3), (4) к рекуррентной последовательности регулярных систем управления, каждая из которых уже относительно управляема. Запишем асимптотические разложения $\dot{x}_i(t)$, $u_i(t)$.

$$\dot{x}_i(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (7)$$

$$u_i(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots + \varepsilon^n u_n(t) + \dots \quad (8)$$

где $\varepsilon = \frac{s(t)}{\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подставим и в систему (3), (4) и приравняем нулю коэффициенты при степенях $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} \cdot x_{0t} &= Ax_0 + A_1 x_0(t-h) + bu_0, \\ \frac{ds}{dt} \cdot x_{1t} &= Ax_1 + A_1 x_1(t-h) + bu_1 - x_{0t}, \\ x_{2t} &= Ax_2 + A_1 x_2(t-h) + bu_2 - x_{1t} \quad |_{(n)} \\ \frac{ds}{dt} \cdot x_{nt} &= Ax_n + A_1 x_n(t-h) + bu_n - x_{nt} \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем систему $|_{(n)}$, в которой каждая подсистема уже относительно управляема. Далее, рассмотрим сингулярно возмущенную систему со многими запаздываниями и управлением.

$$\varepsilon \frac{dx(t)}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^m A_i x(t-h_i) + Bu. \quad (10)$$

где $i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ – запаздывания, $\dot{x} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ – мерное управление. В данном случае применим к (10) метод Уизема аналогично (7), (8) в результате получим.

$$x_{0t} = Ax_0 + \sum_{i=1}^m A_1 x_0(t-h_i) + Bu, \quad ,$$

$$x_{1t} = Ax_1 + \sum_{i=1}^m A_1 x_1(t-h_i) + Bu - x_{0t}, \quad ,$$

$$x_{2t} = Ax_2 + \sum_{i=1}^m A_1 x_2(t-h_i) + Bu - x_{1t}, \quad ,$$

$$|_{(n)} \quad x_{nt} = Ax_n + \sum_{i=1}^m A_1 x_n(t-h_i) + Bu - x_{(n-1)t}, \quad ,$$

В данном случае определяющую систему

$$Q_{k+1}(t) = AQ_k(t) + \sum_{i=1}^m A_1 Q_k(t-h_i) + Bu(t),$$

$$\geq 0, t \geq 0; Q_0(t) = 0, \text{ если } \dot{x} \geq 0,$$

$$\text{rank}(B, \quad k=0, \dots, 1; t \in [0, T]) = n$$

можно построить для каждого уравнения системы $|_{(n)}$ и тем самым доказать ее относительную управляемость. Таким образом, мы показали, как можно регуляризовать сингулярные системы с запаздыванием и определить их относительную управляемость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллова Ф.М., Чуракова С.В. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием. - ДАН СССР, т. 1967, №6.

2. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. ГИАБ

Коротко об авторах –

Рутковский А.Л. – доктор технических наук, профессор,
Алексин В.И. – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, докторант.
кафедра теории и автоматизации металлургических процессов и печей, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (Государственный технологический университет).