

УДК 532.542

Н.Н. Арефьев, С.М. Штин

## ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ С ГИДРОСМАЗКОЙ В КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

*Приведено теоретическое исследование течения вязкопластичной жидкости в канале при наличии свободной границы со слоем гидросмазки на его стенке. Определены математические выражения для расчета скоростей течения и расходов транспортируемой и смазывающей жидкостей для различных режимов течения. Ключевые слова: сапропель, вязкопластичная жидкость, смазывающая жидкость, транспортируемая жидкость.*

Неделя горняка

**П**ри добыче сапропеля шнековыми грунтонасосными установками транспортирование его часто осуществляется по лоткам, на дне которых формируется слой смазывающей жидкости с текучестью большей, чем текучесть сапропеля. Известно [1], что сапропель является вязкопластичной жидкостью, реологические свойства которой описываются уравнением Шведова — Бингама. Для проектирования таких установок необходимо решить задачу по определению основных характеристик течения вязкопластичной жидкости с гидросмазкой в канале при наличии свободной поверхности. Рассмотрим течение вязкопластичной жидкости (ВПЖ) с гидросмазкой под действием силы тяжести на плоской поверхности бесконечной ширины при наличии одной плоской стенки и одной свободной границы. На рис. 1 и 2 показаны схемы течения ВПЖ под действием силы тяжести, где  $h_1$  — толщина слоя смазывающей жидкости (СЖ) с реологическими характеристиками:  $p_{02}$  — предельное напряжение сдвига,  $\eta_{пл2}$  — структурная

вязкость;  $(h - h_1)$  — толщина слоя транспортируемой жидкости (ТЖ) с реологическими характеристиками  $p_{01}$  и  $\eta_{пл1}$ ,  $\alpha$  — угол наклона стенки к горизонту. Предполагаем, что жидкости друг с другом не перемешиваются, а их плотности равны или близки. Известно [2], что давление на свободной поверхности постоянно, поэтому вдоль этой границы оно не будет зависеть от  $x$ , то есть

$$\partial p / \partial x = 0. \quad (1)$$

Проекция силы веса единицы массы на ось  $Ox$  равна

$$F_x = g \sin \alpha, \quad (2)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Компоненты скорости  $V_x$  и  $V_z$  принимаем равными нулю, т.е. траектории всех частиц прямолинейны и параллельны, режим движения ламинарный. Тогда из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости [3] получим  $\partial V_x / \partial x = 0$ . Откуда следует, что скорость течения вдоль оси  $ox$  не изменяется. Тогда из системы дифференциальных уравнений дви-

жения в напряжениях в декартовой системе координат первое уравнение [3]

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \right)$$

с учетом стационарности течения ( $\partial V_x / \partial t = 0$ ) можно записать

$$F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \right) = 0. \quad (3)$$

Составляющие тензора скоростей деформации в декартовой системе координат [3] имеют следующие значения:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{xx} = 2 \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0; \\ D_{xy} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial y}; \\ D_{xz} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} = 0; \\ D_{yy} = 2 \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0; \\ D_{yz} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0; \\ D_{zz} = 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

С учетом (4) интенсивность скоростей деформаций (инвариант тензора скоростей деформаций) в соответствии с [3, 4] имеет вид:

$$J = \left[ \frac{1}{2} (D_{xx}^2 + D_{yy}^2 + D_{zz}^2) + D_{xy}^2 + D_{yz}^2 + D_{zx}^2 \right]^{1/2} = \left| \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|. \quad (5)$$

С учетом (4) и (5) составляющие определяющего уравнения (реологи-

ческие уравнения) ВПЖ [3, 4] в декартовой системе координат можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{xx} = -p + \left( \frac{P_0}{J} + \eta_{пл} \right) D_{xx} = -p; \\ P_{xy} = \left( \frac{P_0}{J} + \eta_{пл} \right) D_{xy} = p_0 \frac{\partial V_x / \partial y}{|\partial V_x / \partial y|} + \\ + \eta_{пл} \frac{\partial V_x}{\partial y} = p_0 \text{Sign} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \eta_{пл} \frac{\partial V_x}{\partial y}; \\ P_{xz} = \left( \frac{P_0}{J} + \eta_{пл} \right) D_{xz} = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

С учетом (1) и (6) уравнение (3) перепишем в виде:

$$g \text{Sin} \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

После интегрирования (7) получим

$$P_{xy} = -\rho g y \text{Sin} \alpha + C_1, \quad (8)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

На поверхности жидкости напряжение равно нулю: при  $y=h$   $P_{xy}=0$ . Откуда из (8) найдем

$$C_1 = \rho g h \text{Sin} \alpha. \quad (9)$$

Тогда из (8) с учетом (9) получим

$$P_{xyi} = \rho g (h - y) \text{Sin} \alpha, \quad (10)$$

где  $i=1$  – для ТЖ,  $i=2$  – для СЖ.

С учетом второго уравнения системы (6) и знака производной  $\partial V_x / \partial y > 0$  из (10) имеем

$$\frac{dV_{xi}}{dy} = \frac{\rho g}{\eta_{пл i}} (h - y) \text{Sin} \alpha - \frac{p_{0i}}{\eta_{пл i}}. \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) справедливы для ТЖ и СЖ.

При условии, что слой СЖ мал по сравнению со слоем ТЖ ( $h_1 \ll h - h_1$ ), а ее текучесть выше, можно принять, что стержневой режим течения возможен только для ТЖ.

После интегрирования (11) получим

$$V_{x1} = \frac{\rho g}{\eta_{пл1}} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \sin \alpha - \frac{p_{01}}{\eta_{пл1}} y + C_{21}, \quad (12)$$

где  $C_{21}$  – константа интегрирования.

Учитывая условие прилипания СЖ к стенке ( $V_{x2}=0$  при  $y=0$ ), из (12) получим  $C_{22}=0$ . Тогда

$$V_{x2} = \frac{\rho g}{\eta_{пл2}} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \sin \alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}} y. \quad (13)$$

Рассмотрим два режима течения:

а) Если  $(P_{xy2})_{y=h_1} \leq p_{01}$ , то ТЖ

движется как квазитвердое тело по всему сечению без сдвига слоев (рис. 1). Условие такого режима течения можно записать с учетом (10) в виде

$$\rho g (h - h_1) \sin \alpha \leq p_{01}. \quad (14)$$

Скорость течения  $V_1$  СЖ на границе раздела двух сред определим по выражению (13) при  $y=h_1$ :

$$V_1 = \frac{\rho g}{\eta_{пл2}} \left( hh_1 - \frac{h_1^2}{2} \right) \sin \alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}} h_1. \quad (15)$$

Скорость  $V_1$  является скоростью движения квазитвердого тела ТЖ.

Объемный расход ТЖ через единицу ширины наклонной поверхности найдем по выражению:

$$Q_1 = V_1 (h - h_1). \quad (16)$$

С учетом (15) из (16) получим

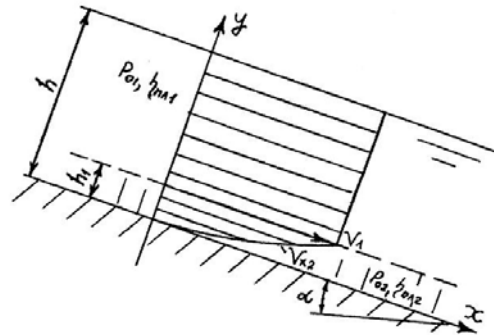


Рис. 1

$$Q_1 = h_1 (h - h_1) \times \left[ \frac{\rho g}{\eta_{пл2}} \left( h - \frac{h_1}{2} \right) \sin \alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}} \right]. \quad (17)$$

Объемный расход СЖ через единицу ширины наклонной поверхности найдем по выражению:

$$Q_2 = \int_0^{h_1} V_{x2} dy. \quad (18)$$

После подстановки (13) в (18) и интегрирования получим

$$Q_2 = \frac{h_1^2}{2\eta_{пл2}} \times \left[ \rho g (\sin \alpha) \left( h - \frac{h_1}{3} \right) - p_{02} \right]. \quad (19)$$

б) Если  $(P_{xy2})_{y=h_1} > p_{01}$ , то ТЖ течет со сдвигом слоев (рис. 2). При этом стержневой режим течения возможен на расстоянии  $y \geq h_0$  от стенки, где ТЖ течет со скоростью  $V_0$  как квазитвердое тело. Из уравнения (10) найдем  $h_0$  из условия, что  $P_{xy}=p_{01}$  при  $y=h_0$ :

$$h_0 = h - \frac{p_{01}}{\rho g \sin \alpha}. \quad (20)$$

Для рассматриваемого режима течения напишем следующие граничные условия:

$$\text{при } y=h_1 \quad V_{x2}=V_1;$$

$$\text{при } y=h_1 \quad V_{x1}=V_1;$$

$$\text{при } y=h_0 \quad V_{x1}=V_0.$$

Подставляя граничные условия в (12) и преобразуя, получим:

$$V_{x1} = \frac{\rho g}{\eta_{нн1}} \left( h_y - \frac{y^2}{2} - hh_1 + \frac{h_1^2}{2} \right) \times \\ \times \text{Sin}\alpha - \frac{P_{01}}{\eta_{нн1}} (y - h_1) + \\ + \frac{\rho g}{\eta_{нн2}} \left( hh_1 - \frac{h_1^2}{2} \right) \text{Sin}\alpha - \frac{P_{02}}{\eta_{нн2}} h_1. \quad (21)$$

$$V_0 = \frac{\rho g}{\eta_{нн1}} \left( hh_0 - \frac{h_0^2}{2} - hh_1 + \frac{h_1^2}{2} \right) \times \\ \times \text{Sin}\alpha - \frac{P_{01}}{\eta_{нн1}} (h_0 - h_1) + \\ + \frac{\rho g}{\eta_{нн2}} \left( hh_1 - \frac{h_1^2}{2} \right) \text{Sin}\alpha - \frac{P_{02}}{\eta_{нн2}} h_1. \quad (22)$$

Объемный расход ТЖ через единицу ширины наклонной поверхности найдем по выражению:

$$Q_1 = V_0 (h - h_0) + \int_{h_1}^{h_0} V_{x1} dy. \quad (23)$$

После подстановки в (23) выражения (21) и интегрирования получим

$$Q_1 = V_0 (h - h_0) + \\ + \frac{\rho g}{\eta_{нн1}} \text{Sin}\alpha \left( \frac{hh_0^2}{2} + \frac{hh_1^2}{2} - \right. \\ \left. - \frac{h_0^3}{6} - \frac{h_1^3}{3} - hh_1 h_0 + \frac{h_1^2 h_0}{2} \right) - \\ - \frac{P_{01}}{2\eta_{нн1}} (h_0 - h_1)^2 + \frac{\rho g}{\eta_{нн2}} \text{Sin}\alpha \times$$

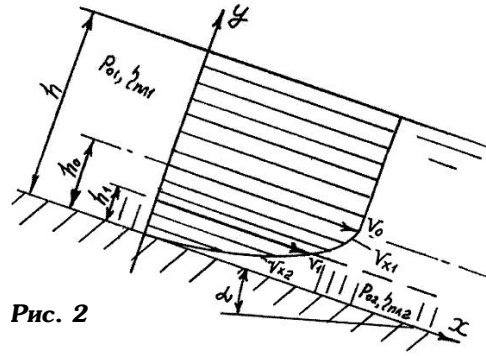


Рис. 2

$$\times \left( h - \frac{h_1}{2} \right) (h_0 - h_1) h_1 - \\ - \frac{P_{02}}{\eta_{нн2}} (h_0 - h_1) h_1. \quad (24)$$

Объемный расход СЖ и скорость определяются по (19) и (13).

Если течет ТЖ без смазки ( $h_1=0$ ), то из (21), (22) и (24) получим:

$$V_{x1} = \frac{\rho g}{2\eta_{нн1}} y(2h - y) \text{Sin}\alpha - \frac{P_{01}}{\eta_{нн1}} y; \quad (25)$$

$$V_0 = \frac{\rho g}{2\eta_{нн1}} h_0 (2h - h_0) \times \\ \times \text{Sin}\alpha - \frac{P_{01}}{\eta_{нн1}} h_0; \quad (26)$$

$$Q_1 = V_0 (h - h_0) + \frac{\rho g}{\eta_{нн1}} \left( \frac{hh_0^2}{2} - \frac{h_0^3}{6} \right) \times \\ \times \text{Sin}\alpha - \frac{P_{01}}{2\eta_{нн1}} h_0^2. \quad (27)$$

Если течет ньютоновская ТЖ ( $P_{01}=0$ ) с коэффициентом динамической вязкости  $\mu_1$  (вместо  $\eta_{нн1}$ ) без гидросмазки, то из (25), (24) и (27) с учетом (20) имеем:

$$V_{x1} = \frac{\rho g}{2\mu_1} y(2h - y) \text{Sin}\alpha; \quad (28)$$

$$Q_1 = \frac{\rho g}{3\mu_1} h^3 \text{Sin}\alpha; \quad (29)$$

$$V_{\max} = \frac{\rho g}{2\mu_1} h^2 \sin \alpha. \quad (30)$$

Выражения (28) – (30) согласуются с результатами исследований [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопотко М.З., Лещко А.П., Дубинин С.К. Рекомендации по технологии промышленной добычи сапропелей из открытых водоемов. — Минск: Наука и техника, 1981. — 77 с.
2. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Госиздат, 1955. — 519 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Издание 5-е. — М.: Наука, 1978. — 736 с.
4. Прагер В. Конечные пластические деформации. // В кн. Реология: Теория и приложения. Под редакцией Ф. Эйриха. — М.: Изд-во ИЛ, 1962, с. 86 – 126. **ИЛ**

#### Коротко об авторах

Арефьев Н.Н. — кандидат технических наук, ООО «Октябрьский ССРЗ»  
 Штин С.М. — кандидат технических наук,  
 Московский государственный горный университет,  
 Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru



#### ДИССЕРТАЦИИ

##### ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	Название работы	Специальность	Ученая степень
<b>ЧИТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ</b>			
СЕРГЕЕНКО Елена Николаевна	Обоснование экологической безопасности рентгенорадиометрической сепарации сурьмяных руд Восточного Забайкалья	25.00.36	к.т.н.
МЕДВЕДЕВ Валерий Васильевич	Обоснование эффективной технологии формирования породобетонной закладки при камерных системах разработки	25.00.22	к.т.н.
ГОНЧАРОВ Денис Сергеевич	Критерии геоинформационного моделирования рационального размещения отходов горнопромышленного комплекса	25.00.36	к.т.н.