УДК 622.834:622.268

В.А. Дрибан

К ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

Предложен новый подход к понятию устойчивости горных выработок и вмещающего массива.

Ключевые слова: горные выработки, приконтурные массивы, упругие системы.

Неделя горняка

Всеми исследователями постоянно подчеркивается структурная неоднородность массива, вмещающего горные выработки. В тоже время, постоянно говоря о неоднородности массива, практически все аналитические модели сводятся к сугубо однородному случаю. А именно, решается задача о распределении НДС вокруг выработки кругового сечения с равномерным отпором крепи. Такое положение вещей обусловлено, в первую очередь, трудностями математического характера, поскольку в этом случае нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее поведение пластической среды (Кулона-Мора, Треска и др.), сводится к простому одномерному уравнению 2-го порядка. Затем данное уравнение с "удовольствием" решается с различными, зачастую сложными, но, как правило, не имеющими отношения к реальности допущениями. Все это свидетельствует скорее об успехах вычислительных методов и процедур, нежели удовлетворяет потребностям практики. При этом оптимистично предполагается, что полученные поля напряжений с удовлетворительной точностью описывают реальную ситуацию.

Одновременно с этим попытки добиться сколько-нибудь приемлемых совпадений расчетных деформаций (смещений) приконтурного массива с фактически наблюдаемыми привело к введению многочисленных (и вообще говоря, неоправданных экспериментальным материалом) усложнений деформационной модели среды. Таких как снижение прочностных характеристик горных пород на 1-2 порядка по мере приближения к контуру выработки, увеличению коэффициентов дилатации и т.п., не связанных ни с историей нагружения, ни с уровнем возникающих напряжений по отношению к прочности вмещающего массива. Либо это связь весьма туманна и опосредована. Однако даже введение этих очень "сильных" допущений о поведении среды в предельном и запредельном состоянии "помогает объяснить" смещения контура выработки порядка 50-100 мм, что не соответствует наблюдаемым в реальных условиях 500 мм и более. Более того, при построении деформационных моделей игнорируется то факт, что искажения контура выработок достигают десятков процентов и, соответственно, построение моделей в рамках теории "малых деформаций" становится, по всей видимости, не вполне корректным. Данное положение вещей, также обусловлено трудностями математического характера. Дело в том, что учет этого факта приводит к необходимости решения уравнений с подвижными границами, что не только много сложнее общего неоднородного случая, но и требует дополнительных нетривиальных соображений о физико-механических свойствах среды в целом и оценке устойчивости упруго-пластических систем.

Эффект потери устойчивости механической системы, медленно нагружаемой некоторыми силами, состоит, как правило, в появлении таких видов деформаций, которые в идеале не могут возникнуть без действия добавочной системы возмущающих сил. Естественно поэтому, что в основе определения устойчивости лежит концепция проб малыми дополнительными силами. Интуитивно ясно, что механическую систему нужно признать неустойчивой, если при действии ничтожных дополнительных сил в ней могут возникнуть конечные деформации выпучивания. Классическое определение устойчивости исходит из указанного выше и состоит по существу в следующем. Состояние механической системы является неустойчивым, если при действии как угодно малых возмущающих сил возникающее возмущенное движение будет расходящимся от исходного. В противном случае состояние системы считается устойчивым.

Прямые исследования возмущенных движений простейших упругих конструкций и многочисленные эксперименты подтвердили, что сформулированный выше критерий действительно определяет границу устойчивых состояний. Таким образом, если наряду с исходным невозмущенным состоянием есть равновесное возмущенное состояние, поддерживаемое теми же внешними силами, то соответствующее значение параметра нагружения является критическим в том смысле, что оно разграничивает области устойчивых и неустойчивых состояний упругой системы (исходная форма критерия Эйлера).

Как видно из указанного определения, задача устойчивости сводится к исследованию возможности существования нескольких форм равновесия. Однако поскольку при достижении критического значения параметра нагружения в упругих системах существует непрерывная последовательность равновесных состояний, включающих исходное, то формальность задачи только видимая, а критерий устойчивости следует переформулировать в бифуркационной форме. Если возможен равновесный переход из исходного состояния в некоторое другое (бифуркация равновесия) при неизменных внешних силах, то состояние упругой системы неустойчиво.

В подавляющем большинстве работ по оценке устойчивости упруго-пластических систем в основу отыскания критических сил был положен тот же критерий Эйлера в классической формулировке. При этом во главу угла ставилось развитие методов расчета, а трудностям, которые возникают при логическом обосновании применимости данного критерия в области упруго-пластических деформаций, за исключением, вообще говоря, единичных работ внимания уделяется мало. Тем не менее, эти трудности значительны. Действительно, уже то предположение, которое в упругости было оправданным, что в исходном состоянии (устойчивость которого исследуется) отсутствуют деформации выпучивания, в силу необратимости деформаций любое воздействие дополнительных сил приведет к появлению остаточных деформаций, и практически трудно представить, что к рассматриваемому моменту они исчезнут. Указанные соображения могут привести к принципиальной невозможности постановки задачи устойчивости при упруго-пластических деформациях. Точнее, к тривиальному выводу о том, что любое упруго-пластическое состояние является неустойчивым, что не отвечает действительности. Данный факт в скрытом виде нашел свое отражение в целом ряде капитальных работ, посвященных проблеме устойчивости горных выработок и вертикальных стволов, где в качестве критерия устойчивости было предложено следующее соотношение: прочность вмещающих пород в два и более раз выше, чем вертикальное давление. Данный критерий полностью соответствует условию возникновения пластической зоны вокруг круглой выработки при решении упруго-пластической задачи с прямолинейной огибающей Кулона – Мора. При этом глубину потенциального вывала предложено определять как размер зоны пластических деформаций. Заметим, что полученные критерии попросту не соответствуют горной практике, ибо их следствием является вывод о том, что в подавляющем большинстве случаев неустойчивое состояние наступает при глубинах более 400 – 600 м (вертикальные давления 10 – 15 МПа), поскольку в слоистой породной толще практически всегда встречается множество слоев с прочностью 20 – 30 МПа.

С другой стороны ясно, что поскольку для упруго-пластических систем, также как и для упругих, существуют состояния, включенные в непрерывную последовательность равновесных с фиксированными внешними силами состояний, то возможно в каком-то смысле перенесение бифуркационного критерия Эйлера в упруго-пластическую область.

Благодаря усилиям многих исследователей и, в первую очередь, В.Д.Клюшникова и Ю.Н. Работнова, в результате прямого анализа возмущенных движений конкретных упруго-пластических систем было показано, что явление упруго-пластического деформирования вовсе не связано с потерей устойчивости состояния равновесия, как это имеет место в упругих телах, а есть следствие потери устойчивости движения частиц тела в процессе его деформирования. В соответствии с этим поиски правила определения критических сил в области упруго-пластических деформаций должны быть направлены на отыскание аналога критерия эйлеровского типа в теории устойчивости движения.

Идея заключается в том, что если при решении задачи о бифуркации состояния системы выделяются значения внешних параметров, при которых становятся возможными разные, но бесконечно близкие значения внутренних параметров, то в рамках пластичности появляется дополнительная иная возможность определения характерных значений внешних параметров. А именно, при рассмотрении упруго-пластической задачи в приращениях можно выделить такие значения, которые отвечают неединственности решения системы уравнений для приращений.

Здесь необходимо сделать ряд замечаний. Поскольку процесс деформирования является следствием движения материальных частиц, то устойчивость естественно понимается, как устойчивость бесконечно медленного движения. Однако в противоположность классическим задачам устойчивости движения, характерным для теоретической механики, на первый план выступают не свойства инерционности, а природа связей, в качестве которых выступают определяющие соотношения пластичности, эквивалентные в какой-то мере меняющимся связям с сухим трением. Именно это обстоятельство позволяет отказаться от постулата о непрерывной зависимости параметров, определяющих движение системы в данный момент, от таковых в любой предыдущий конечно удаленный момент. В соответствии с этим появилась возможность определить понятие неустойчивости движения даже более эффективным, чем по Ляпунову способом. Невозмущенное движение, начиная с данного момента, является неустойчивым, если исчезающее малое изменение параметров движения в данный момент времени приводит к конечному их изменению в любом последующем конечном временном интервале.

В соответствии с проведенными рассуждениями, рассмотрим задачу об устойчивости массива горных пород вокруг одиночной протяженной выработки в следующей постановке. Зона неупругих деформаций, образующаяся вокруг выработки, описывается уравнениями пластичности Кулона-Мора с прямолинейной огибающей. Будем искать поля напряжений вокруг выработки, изначально кругового сечения, контур которой подвержен определенным возмущениям. При этом, поскольку контур выработки потерял симметричность, то с необходимостью мы отказываемся от предположения о независимости распределения полей напряжений от полярного угла θ.

Итак, уравнение пластичности в полярных координатах имеет вид:

$$\left(\sigma_\theta-\sigma_r\right)^2+4\tau^2_{r\theta}=\sin^2\rho\left(\sigma_\theta+\sigma_r+2Kctg\rho\right)^2, \tag{1}$$

где K – сцепление горных пород; ρ – угол внутреннего трения; σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ – радиальные, тангенциальные и касательные напряжения соответственно, удовлетворяющие условиям равновесия и представляемые через функцию напряжений $\Phi(r,\ \theta)$ следующим образом:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\qquad \sigma_\theta=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\qquad \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$$

Поскольку нас интересуют состояния в определенном смысле "близкие" однородному симметричному случаю, где функция напряжений имеет степенной вид, то решение (1) будем искать в виде:

$$\Phi\left(r,\theta\right)=r^\alpha f\left(\theta\right)+\frac{r^2}{2}Kctg\rho$$

Тогда (1) можно представить в следующей форме:

$$\left[\left(\alpha^2-2\alpha\right)f\left(\theta\right)-f''\left(\theta\right)\right]-2i\left(\alpha-1\right)f'\left(\theta\right)=\sin\rho\left[\alpha^2 f\left(\theta\right)+f''\left(\theta\right)\right]e^{i\varphi(\theta)}, \tag{2}$$

где $\varphi(\theta)$ – неизвестная вещественная функция.

Учитывая, что $f(\theta)$ – также вещественная функция нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}\left(\alpha^2-2\alpha\right)f\left(\theta\right)-f''\left(\theta\right)=\sin\left(\rho\right)\cos\left(\varphi\left(\theta\right)\right)\left[\alpha^2 f\left(\theta\right)+f''\left(\theta\right)\right]\\ -2\left(\alpha-1\right)f'\left(\theta\right)=\sin\left(\rho\right)\sin\left(\varphi\left(\theta\right)\right)\left[\alpha^2 f\left(\theta\right)+f''\left(\theta\right)\right]\end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, если нам удастся найти вещественные решения системы (3) и такой возмущенный контур на котором будет удовлетворяться условие равенства нулю нормальных напряжений, то мы получим искомое распределение полей напряжений вокруг выработки.

Опуская достаточно объемные преобразования, запишем полученные решения.

$$f\left(\theta\right)=\left(1+\sin\rho\cos\varphi\left(\theta\right)\right)\left|2\left(1+\sin\rho\cos\varphi\left(\theta\right)\right)-\alpha\cos^2\rho\right|^{\frac{\alpha-2}{2}}, \tag{4}$$

где $\varphi(\theta)$ определяется следующим функциональным уравнением:

$$
\varphi(\theta)=2\theta+(2-\alpha)\cos^2\rho\times\begin{cases}
\dfrac{2}{v}arctg\dfrac{wtg\dfrac{\varphi(\theta)}{2}}{v} & if\quad \alpha\notin\left(\dfrac{2}{1+\sin\rho};\dfrac{2}{1-\sin\rho}\right)\\[2ex]
\dfrac{2}{v}\ln\left|\dfrac{wtg\dfrac{\varphi(\theta)}{2}-v}{wtg\dfrac{\varphi(\theta)}{2}+v}\right| & if\quad \alpha\in\left(\dfrac{2}{1+\sin\rho};\dfrac{2}{1-\sin\rho}\right)\\[2ex]
\dfrac{1}{2\sin\rho}ctg\dfrac{\varphi}{2} & if\quad \alpha=\dfrac{2}{1-\sin\rho};\\[2ex]
\dfrac{1}{2\sin\rho}tg\dfrac{\varphi}{2} & if\quad \alpha=\dfrac{2}{1+\sin\rho}
\end{cases}, \quad (5)
$$

где $v=\cos\rho\sqrt{4-4\alpha+\alpha^2\cos^2\rho}$ $\qquad w=\left[2(1-\sin\rho)-\alpha\cos^2\rho\right]$

При этом уравнения определяющие напряжения в массиве примут вид:

$$
\begin{cases}
\sigma_r=Cr^{\alpha-2}\left(1-\sin\rho\cos\varphi(\theta)\right)\left|2\left(1+\sin\rho\cos\varphi(\theta)\right)-\alpha\cos^2\rho\right|^{\frac{\alpha-2}{2}}-Kctg\rho\\
\sigma_\theta=Cr^{\alpha-2}\left(1+\sin\rho\cos\varphi(\theta)\right)\left|2\left(1+\sin\rho\cos\varphi(\theta)\right)-\alpha\cos^2\rho\right|^{\frac{\alpha-2}{2}}-Kctg\rho\\
\tau_{r\theta}=Cr^{\alpha-2}\sin\rho\sin\varphi(\theta)\left|2\left(1+\sin\rho\cos\varphi(\theta)\right)-\alpha\cos^2\rho\right|^{\frac{\alpha-2}{2}}
\end{cases} \quad (6)
$$

В настоящей работе рассмотрим более подробно случай, когда показатель степенной функции α совпадает с показателем степенной функции в случае однородной осесимметричной задачи. А именно $\alpha=2(1-\sin\rho)^{-1}$. Заметим, что при данном значении α помимо тривиального решения, соответствующего случаю $\varphi(\theta)=0$ и описывающего однородную осесимметричную задачу, решения которой имеют вид:

$\sigma_r=Kctg\rho\left(r^{\alpha-2}-1\right);\quad \sigma_\theta=$

,

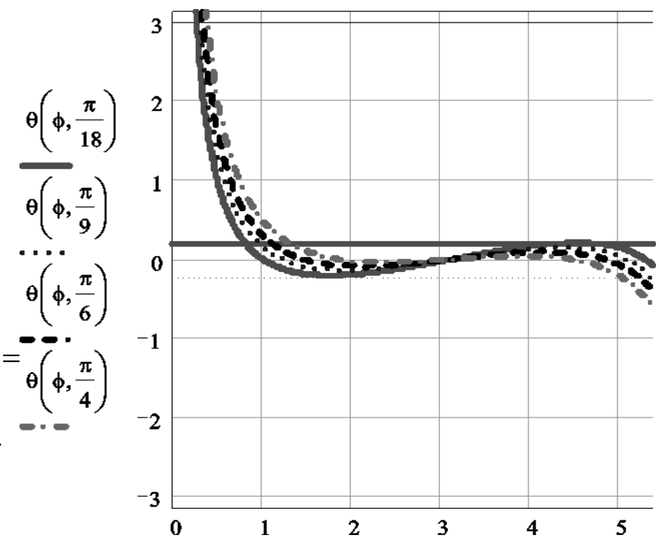

Рис. 1. График функции $\theta(\varphi)$

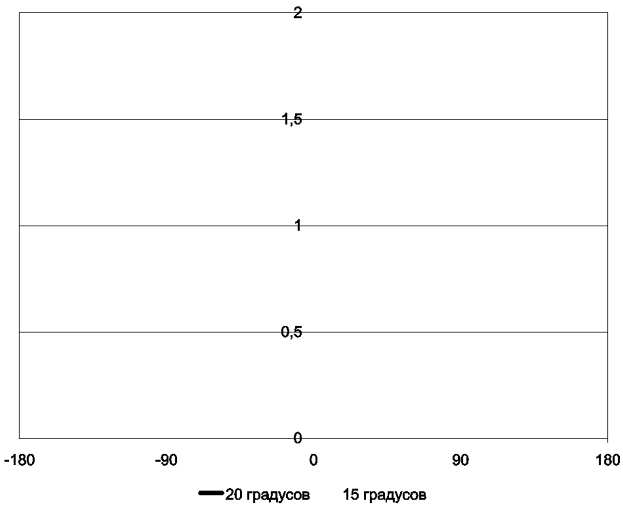

Рис. 2. Распределение радиальных напряжений

появляется дополнительно целая серия решений, описывающих случай возмущенного контура и соответствующих функции *φ(θ)* определяемой следующим функциональным уравнением:

$$\varphi(\theta)+(1+\sin\rho)ctg\frac{\varphi(\theta)}{2}=2\theta \qquad (8)$$

На рис. 1 представлены графики обратной функции *θ(φ)* для различных углов внутреннего трения. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Поскольку функция *θ(φ)* изменяется от -∞ до +∞ и имеет ось симметрии y = π, то уравнение (8) определяет полубесконечный ряд гладких функций $\varphi_n(\theta)$, получаемый путем склейки значений функции *φ(θ)* на отрезках $\theta\in[\pi n;\pi+\pi n]\cup[-\pi-\pi n;-\pi n]$ для всех целых n от 0 до ∞.

Соответственно, получен целый класс решений задачи о распределении полей напряжений при возмущении контура выработки кругового сечения, определяемый системой (6) при подстановке функций $\varphi_n(\theta)$:

$$\begin{cases}\sigma_r^{(n)}=C_1r^{\alpha-2}\left(1-\sin\rho\cos\varphi_n(\theta)\right)\left|\sin\left(0.5\cdot\varphi_n(\theta)\right)\right|^{\alpha-2}-Kctg\rho\\ \sigma_\theta^{(n)}=C_1r^{\alpha-2}\left(1+\sin\rho\cos\varphi_n(\theta)\right)\left|\sin\left(0.5\cdot\varphi_n(\theta)\right)\right|^{\alpha-2}-Kctg\rho\\ \tau_{r\theta}^{(n)}=C_1r^{\alpha-2}\sin\rho\sin\varphi_n(\theta)\left|\sin\left(0.5\cdot\varphi_n(\theta)\right)\right|^{\alpha-2}\end{cases} \qquad (9)$$

Заметим, что функция $\varphi_\infty(\theta)$ генерирует тривиальное решение (7), что соответствует состоянию неустойчивого равновесия. Далее, по мере развития деформационных процессов в зависимости от величины горного давления и физико-механических свойств вмещающих пород, массив вокруг выработки последовательно проходит дискретный полубесконечный ряд равновесных состояний, отвечающий гладким однозначным функциям $\varphi_n(\theta)$ при изменении n от ∞ до 1. И, наконец, при соответствующих геомеханических условиях, достигается напряженное состояние вмещающего массива, соответствующее функции $\varphi_0(\theta)$, которое принципиально отличается от предыдущих. Дело в том, что $\varphi_0(\theta)$ на интервале [minϕ; maxϕ] теряет свойство однозначности (см. рис. 1) и, соответственно, можно выделить такие значения деформирования контура выработки, которые отвечают неединственности решения системы уравнений пластичности. Иными словами, в этом случае достигается такое

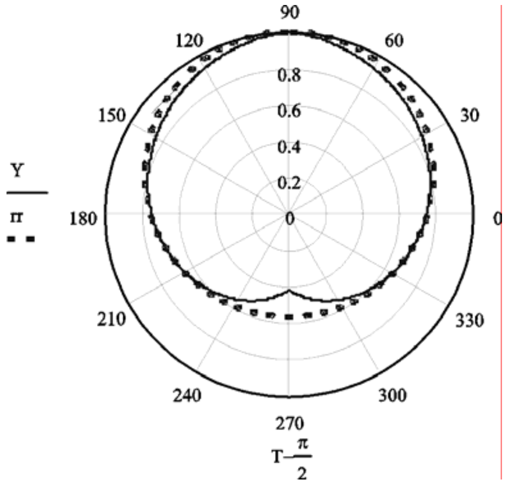

Рис. 3. Искажение контура выработки при потере устойчивости

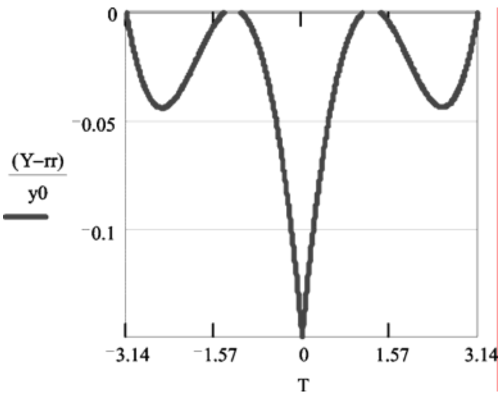

Рис. 4. Величины относительных смещений контура выработки при достижении точки бифуркации

возмущение контура выработки, при котором при неизменных внешних параметрах нагружения становится возможным переход из сложившегося напряженного состояния массива в некоторое другое, то есть появляется точка бифуркации.

На рис. 2 представлены значения радиальных напряжений в массиве при $r = 1$ для углов внутреннего трения 200, 150. Как видно из графиков в узком диапазоне значений углов приблизительно равном 14–160 появляются не менее двух значений напряжений соответствующих одному и тому же деформированному состоянию.

Рассмотрим теперь вопрос, при каком именно возмущении контура выработки возможно появление точки бифуркации. Для этого используем условие равенства 0 нормальных напряжений на контуре выработки. Тогда функция $r(\theta)$, определяющая контур находится из решения системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 r^{\alpha-2}(\theta)\left(1-\sin\rho\cos\left(\varphi_0(\theta)-2\psi(\theta)\right)\right)\left|\sin\left(0.5\cdot\varphi_0(\theta)\right)\right|^{\alpha-2}-Kctg\rho=0 \\ r'(\theta)=-r(\theta)tg\left(\psi(\theta)\right) \end{cases}, \quad (10)$$

где $\psi(\theta)$ – угол между нормалью к кривой и полярным радиус-вектором $r(\theta)$.

На рис. 3, 4 представлены результаты расчетов смещения контура выработки при потере устойчивости для угла внутреннего трения $\rho=20^0$ совместно с описанной окружностью (невозмущенным контуром).

Отметим, также следующее обстоятельство. Если в тривиальном случае, соответствующем однородной осесимметричной задаче поля напряжений весьма чувствительны к физико-механическим параметрам вмещающего массива, в частности, к углу внутреннего трения, например, при его изменении от 20 до 30^0 на расстоянии от контура равном радиусу выработки напряжения изменяются в 3

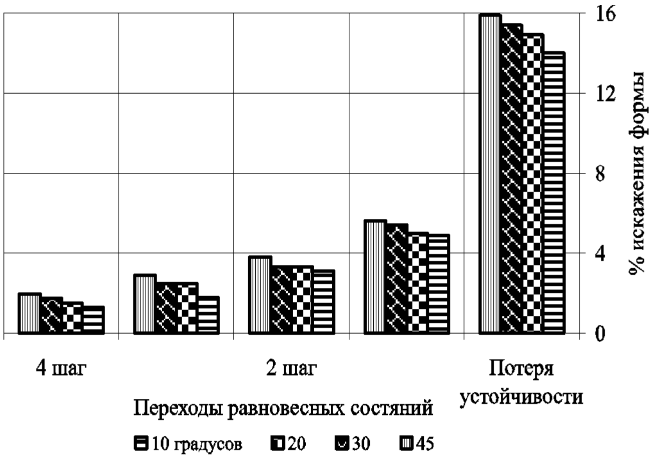

Рис. 5. Относительное пошаговое смещение контура выработки

раза, то полученные решения, наоборот, демонстрируют высокую степень устойчивости. На рис. 5 представлена диаграмма последовательного пошагового деформирования контура выработки вплоть до потери устойчивости для различных углов внутреннего трения.

Проведенная серия расчетов для различных геомеханических условий показывает, что относительное возмущение контура выработки, при котором наступает потеря устойчивости, составляет 12 – 18%.

Выводы

1. Как представляется автору, предложен новый строгий подход к понятию устойчивости горных выработок и вмещающего массива.

2. Получен деформационный критерий устойчивости горных выработок, который подтверждается сотнями прямых наблюдений за деформированием контура выработок, проведенных различными исследователями, где потеря устойчивости наблюдается при достижении смещений порядка 200-500мм, что при площади сечения выработки от 10 до 18 м^2 в точности совпадает с предложенным критерием.

3. Показано, что в процессе деформирования массив последовательно проходит дискретный ряд состояний, отвечающих определенному соотношению физико-механических свойств массива и уровню горного давления.

4. Из проведенных построений следует, по крайней мере, два ясных, доведенных в некоторых случаях до практического применения направления повышения устойчивости горных выработок путем точечных воздействий. А именно, укрепление локальных областей массива, например, анкерованием и перераспределение напряженного состояния с помощью полостей ослабления. ГИАБ

Коротко об авторе

Дрибан В.А. – доктор технических наук, УкрНИМИ, г. Донецк, Украина