

УДК 550.830+539.3

О.А. Хачай, О.Ю. Хачай

**ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ АКТИВНЫХ МЕТОДОВ
ДЛЯ КАРТИРОВАНИЯ И МОНИТОРИНГА
СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ
В N-СЛОЙНОЙ СРЕДЕ**

Работа посвящена выводу интегральных уравнений двумерной прямой задачи для сейсмического поля в динамическом варианте и совместному анализу интегральных уравнений двумерных задач для электромагнитного и сейсмического поля

Ключевые слова: геофизические методы исследования, сингулярные источники, сейсмические поля, структуры геологических сред

Семинар № 2

В связи с усложнением решаемых геологических и геомеханических задач все более актуальной становится проблема создания комплексных методик исследования. При комплексировании геофизических методов необходимо пространственное совмещение систем наблюдения и создание единых интерпретационных алгоритмов. В Институте геофизики УрО РАН разработана единая 3-Д методика наблюдений с использованием электромагнитных и сейсмических полей (в динамическом частотно-геометрическом варианте), опирающаяся на единую концепцию трехэтапной интерпретации [1–4], которая включает в себя единую систему векторных наблюдений сейсмических и электромагнитных полей. Используются локальные контролируемые источники возбуждения, для которых выполняются следующие условия: а) единая геометрия нормального поля, б) отсутствие одной или нескольких компонент в измеряемом поле в случае квазислоистой среды. Нами реализован вариант возбуждения электромагнитного поля вертикальным магнитным диполем и сейсмического поля вертикальной силой. Единый подход в интерпретации реализован для предварительно обработанных входных данных: сейсмические данные переводятся из временной области в частотную посредством преобразования Лапласа (для действительного параметра), а электромагнитные данные – посредством преобразования Фурье (для действительной частоты) [2].

При проведении натурных экспериментов в рамках единой методики возникает возможность количественной оценки сопоставимости информации по различным полям о строении и физических свойствах среды, которая следует из критерия подобия систем наблюдений. В работе [5] изложены теоретические принципы построения такого критерия и алгоритмы его определения для нормальных полей в средах без включений.

В работе [6] изложена идея алгоритма построения критерия подобия для сейсмических и электромагнитных полей от сингулярных источников, эквивалентных проявлению искомого локального объекта в рассматриваемых полях.

При этом объект в сейсмическом поле аппроксимируется точечной горизонтально действующей силой, погруженной в n -слойное изотропное упругое полупространство, в электромагнитном поле – это горизонтальный магнитный диполь, погруженный в n -слойное изотропное проводящее полупространство. Выбор сингулярных источников определялся подобием морфологии создаваемых ими полей при взаимно перпендикулярном направлении моментов электромагнитного и сейсмического сингулярных источников. Разработан итерационный алгоритм вычисления электромагнитного и сейсмического поля при условии расположения аномальных источников в произвольном слое n -слойной среды [7–9].

Полученные результаты будут использованы для выбора критериев комплексирования сейсмических и электромагнитных методов исследования сложно построенных сред.

Задача о дифракции звука на двумерной упругой неоднородности, расположенной в j -ом слое n -слойной среды

Рассмотрим задачу дифракции звука на двумерной упругой неоднородности, расположенной в j -ом слое n -слойной среды. Эту задачу будем решать, используя подход, изложенный в работе [10]. Массовые силы будем считать потенциальными и сосредоточенными в первом слое n -слойной среды. Плоскость XOY совпадает с верхней плоскостью 1-го слоя, $z=0$. Ось OZ направлена вертикально вниз. Образующие двумерной неоднородности в виде цилиндра произвольного сечения направлены вдоль оси OY . Положим $\mu=0$, тогда в каждом из слоев выполняется первое уравнение из системы уравнений для прямой динамической задачи сейсмики [11], преобразованное к виду:

$$\Delta\varphi_i + k_{1i}^2 \varphi_i = -2\pi f_i(M); \quad \vec{u} = \text{grad}\varphi;$$

$$f_i(M) = \frac{\sigma_i}{2\pi\lambda_i} \Phi_i; \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$, Φ_i – Φ -потенциал массовых сил, при $i = 1$, при $i \neq 1$ $\Phi_i = 0$, σ_i – плотность i -го слоя, λ_i – модуль упругости Ламэ, \vec{u} – вектор смещения. Волновое число в i -ом слое равно согласно [11]:

$$k_{1i}^2 = k_1^2 = \omega^2 \frac{\sigma_i}{\lambda_i}; \quad (2)$$

где ω – круговая частота.

Введем обозначение:

$\tilde{k}(M) = k_{1i}$ – волновое число в слоистой среде, $i = 1, \dots, n$ и

$$K(M) = \begin{cases} k_{1ji} & \text{при } M \in S_C \\ \tilde{k}(M) & \text{при } M \notin S_C \end{cases} \quad (2')$$

$$k_{1ji}^2 = \omega^2 \frac{\sigma_{ji}}{\lambda_{ji}};$$

индекс ji обозначает свойства среды, внутри неоднородности S_C .

В общем случае в произвольном слое или внутри неоднородности уравнение (1) с учетом (2) и (2') будет иметь вид:

$$\Delta\varphi_i + K^2(M)\varphi_i = -2\pi f_i(M); \quad (3)$$

Границные условия в среде без разрывов заключающиеся в непрерывности вектора смещения и тензора напряжений, согласно [11], на границах раздела имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial z} &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_{ji} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_{ja}; \\ \left[\sigma_i(\omega^2\varphi_i + \Phi_i) \right] - \left[\sigma_{i+1}(\omega^2\varphi_{i+1} + \Phi_{i+1}) \right] &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \\ \left[\sigma(\omega^2\varphi + \Phi) \right]_{ji} &= \left[\sigma(\omega^2\varphi + \Phi) \right]_{ja}; \\ \left[\sigma(\omega^2\varphi + \Phi) \right] \Big|_{z=0} &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

индекс ji – обозначает значения σ, φ, Φ на границе неоднородности с внутренней стороны, ja – с внешней стороны границы неоднородности, которая расположена в j -ом слое L -граница раздела слоя, с индексом i – со стороны i -го слоя, с индексом $i+1$ – со стороны $(i+1)$ -го слоя.

Условия затухания на бесконечности согласно [11] имеют вид:

$$r \operatorname{grad} \varphi_i = O(1), \quad r \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} - ik_i \varphi_i \right) = o(1) \quad (5)$$

Пусть: $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \varphi_i^0$, (6)

где $i=1, \dots, j, ji, \dots, n$, φ_i^0 – потенциал нормального сейсмического поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности: $\varphi_{ji}^0 = \varphi_i^0$ и

$$\Delta\varphi_i^0 + k_{1i}^2\varphi_i^0 = -2\pi f_i(M); \quad (7)$$

$$\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_{i+1}^0}{\partial z} = 0 \Big|_{z \in L_i}; \left[\sigma_i(\omega^2\varphi_i^0 + \Phi_i) \right] - \left[\sigma_{i+1}(\omega^2\varphi_{i+1}^0 + \Phi_{i+1}) \right] = 0 \Big|_{z \in L_i}; \quad (8)$$

на контуре неоднородности φ^0 и $\frac{\partial\varphi^0}{\partial n}$ непрерывны.

$\tilde{\varphi}_i$ – потенциал аномального сейсмического поля, который, как легко показать с учетом (2', 3 и 7), удовлетворяет уравнению:

$$\Delta\tilde{\varphi}_i + K^2(M)\tilde{\varphi}_i = -(K^2(M) - \tilde{k}^2(M))\varphi_i^0; \quad (9)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\varphi}_i}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{\varphi}_{i+1}}{\partial z} &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n} \right)_{ji} = \left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n} \right)_{ja}; \\ \left[\sigma_i\omega^2\tilde{\varphi}_i \right] - \left[\sigma_{i+1}\omega^2\tilde{\varphi}_{i+1} \right] &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{на контуре неоднородности: } [\sigma\tilde{\varphi}]_{ja} - [\sigma\tilde{\varphi}]_{ji} = (\sigma_{ja} - \sigma_{ji})\varphi^0 \quad (10')$$

Функция источника сейсмического поля $G_{Sp}(M, M^0)$ определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta G_{Sp_i} + \tilde{k}^2 G_{Sp_i}(M, M^0) = -2\pi\delta(M - M^0); \quad (11)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{Sp,i}}{\partial z} - \frac{\partial G_{Sp,i+1}}{\partial z} &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \left[\sigma \omega^2 G_{Sp} \right] \Big|_{z=0} = 0; \\ \left[\sigma_i \omega^2 G_{Sp,i} \right] - \left[\sigma_{i+1} \omega^2 G_{Sp,i+1} \right] &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \end{aligned} \quad (12)$$

на контуре неоднородности $G_{Sp}(M, M^0)$ и $\frac{\partial G_{Sp}(M, M^0)}{\partial n}$ непрерывны.

Применим формулу Грина [10] для функций $\tilde{\varphi}_i$ и $G_{Sp}(M, M^0)$ для каждого слоя n -слойной среды при $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \int_{L_i} \left(\tilde{\varphi}_i \frac{\partial G_{Sp,i}}{\partial n} - G_{Sp,i} \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial n} \right) dl_i - \int_{L_{i+1}} \left(\tilde{\varphi}_{i+1} \frac{\partial G_{Sp,i+1}}{\partial n} - \right. \\ \left. - G_{Sp,i+1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{i+1}}{\partial n} \right) dl_{i+1} &= \begin{cases} 2\pi \tilde{\varphi}_i(M^0) & \text{при } M^0 \in S_i \\ 0 & \text{при } M^0 \notin S_i \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

При $i=j$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \int_{L_j} \left(\frac{\Psi G_{Sp,j}}{\Psi n} - G_{Sp,j} \frac{\Psi \varphi_{j_0}}{\Psi n} \right) dl_j - \mathbf{T} \int_{L_{j+1}} \left(\frac{\Psi G_{Sp,j+1}}{\Psi n} - G_{Sp,j+1} \frac{\Psi \varphi_{j+1}}{\Psi n} \right) dl_{j+1} + \\ + \mathbf{C} \int_{S_j} \left(\frac{\Psi G_{Sp,j}}{\Psi n} - G_{Sp,j} \frac{\Psi \varphi_{j_0}}{\Psi n} \right) dc_j &= \begin{cases} 2p \varphi_{j_0}(M^0) & \text{при } M^0 \text{ О } S_j - S_C \\ 0 & \text{при } M^0 \text{ П } S_j - S_C \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Домножим выражения (13) и (14) на σ_i и сложим их с учетом граничных условий, в результате чего получим:

$$\frac{s_j}{2p} \mathbf{C} \int_{S_j} \left(\frac{\Psi G_{Sp,j}}{\Psi n} - G_{Sp,j} \frac{\Psi \varphi_{j_0}}{\Psi n} \right) dc = \begin{cases} s_j (M^0) \varphi_{j_0}(M^0) & \text{при } M^0 \text{ О } S_j - S_C \\ 0 & \text{при } M^0 \text{ П } S_j - S_C \end{cases} \quad (15)$$

Применим формулу Грина для функций $\tilde{\varphi}_{ji}$ и $G_{Sp,j}(M, M^0)$ для внутренности области S_c , с учетом (3), (7), (9), (11) получим:

$$\begin{aligned} \frac{k_{1ji}^2 - k_{1j}^2}{2p} \mathbf{T} \int_{S_c} \left(\frac{\Psi G_{Sp,j}}{\Psi n} - G_{Sp,j} \frac{\Psi \varphi_{j_0}}{\Psi n} \right) dt_M - \\ - \frac{1}{2p} \mathbf{C} \int_{S_c} \left(\frac{\Psi G_{Sp,j}}{\Psi n} - G_{Sp,j} \frac{\Psi \varphi_{j_0}}{\Psi n} \right) dc &= \begin{cases} s_j (M^0) \varphi_{j_0}(M^0) & \text{при } M^0 \text{ О } S_c \\ 0 & \text{при } M^0 \text{ П } S_c \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Домножим (16) на σ_{ji} и сложим с (15), с учётом граничных условий на контуре неоднородности получим:

$$\begin{aligned} & \frac{s_{ji}(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{2p} \int\limits_{S_C} j(M) G_{Sp,j}(M, M^0) dt_M + \frac{(s_{ja} - s_{ji})}{2p} \int\limits_C j^0(M) \frac{\nabla G_{Sp,j}}{\nabla n} dc - \\ & - \frac{(s_{ja} - s_{ji})}{2p} \int\limits_C G_{Sp,j} \frac{\nabla j}{\nabla n} dc - \frac{(s_{ja} - s_{ji})}{2p} \int\limits_C G_{Sp,j} \frac{\nabla j^0}{\nabla n} dc = s(M^0) j^0(M^0) \end{aligned} \quad (17)$$

Воспользуемся равенством [10]:

$$\begin{aligned} & \frac{(s_{ja} - s_{ji})}{2p} \int\limits_C j^0(M) \frac{\nabla G_{Sp,j}}{\nabla n} dc - G_{Sp,j} \frac{\nabla j^0(M)}{\nabla n} dc = \\ & = \begin{cases} (s_{ja} - s_{ji}) j^0(M^0) & \text{при } M^0 \cap S_C \\ 0 & \text{при } M^0 \setminus S_C \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда (17) с учетом (18) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{2p} \int\limits_{S_C} j(M) G_{Sp,j}(M, M^0) dt_M + \frac{s_{ja}}{s_{ji}} j^0(M^0) - \\ & - \frac{(s_{ja} - s_{ji})}{s_{ji} 2p} \int\limits_C G_{Sp,j} \frac{\nabla j}{\nabla n} dc = j(M^0) \quad \text{при } M^0 \cap S_C \\ & \frac{s_{ji}(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{s(M^0) 2p} \int\limits_{S_C} j(M) G_{Sp,j}(M, M^0) dt_M + j^0(M^0) - \\ & - \frac{(s_{ja} - s_{ji})}{s(M^0) 2p} \int\limits_C G_{Sp,j} \frac{\nabla j}{\nabla n} dc = j(M^0) \quad \text{при } M^0 \setminus S_C \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, решив интегро-дифференциальное уравнение и определив распределение потенциала вектора упругих смещений внутри неоднородности, мы можем, используя второе интегро-дифференциальное представление определить потенциал вектора упругих смещений в любом слое, затем используя соотношение (1), вычислить распределение вектора упругих смещений в любом слое.

Сопоставление алгоритмов для сейсмического (дифракция звука) и электромагнитного двумерного моделирования (н-поляризация)

Сравним полученные выражения с решением задачи дифракции электромагнитного поля в рамках той же геометрической модели. Этот случай соответствует задаче с возбуждением плоской волной Н-поляризации, решение которой приведено в работе [10]. Преобразуем его к виду, аналогично (20):

$$\begin{aligned}
H_x(M^0) &= \frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{2p} \underset{S_C}{\text{TT}} H_x(M) G_m(M, M^0) dt_M + \\
&+ \frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{k_j^2 2p} \underset{C}{\text{CH}}_x(M) \frac{\P G_m}{\P n} dc + \frac{k_{ji}^2}{k_j^2} H_x^0(M^0) \text{ при } M^0 \text{ O } S_C \\
H_x(M^0) &= \frac{k^2(M^0)(k_{ji}^2 - k_j^2)}{2p k_{ji}^2} \underset{S_C}{\text{TT}} H_x(M) G_m(M, M^0) dt_M + \\
&+ \frac{k^2(M^0)(k_{ji}^2 - k_j^2)}{k_{ji}^2 k_j^2 2p} \underset{C}{\text{CH}}_x(M) \frac{\P G_m}{\P n} dc + H_x^0(M^0) \text{ при } M^0 \text{ П } S_C
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $k^2(M^0) = i\omega\mu_0\sigma(M^0)$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{ГН}}{\text{М}}$, $\sigma(M^0)$ - проводимость в точке M^0 ; i - мнимая единица, $H_x(M^0)$ - суммарная составляющая магнитного поля, $H_x^0(M^0)$ - составляющая магнитного поля слоистой среды в отсутствие неоднородности. $k_{ji}^2 = i\omega\mu_0\sigma_{ji}$, $k_i^2 = i\omega\mu_0\sigma_i$, σ_{ji} - проводимость внутри неоднородности, расположенной в j -ом слое, σ_i - проводимость i -го слоя n -слойной среды. Функция Грина $G_m(M, M^0)$ в выражениях (21) удовлетворяет уравнению аналогичному (33) с $\tilde{k}^2(M) = k_i^2$, введенному выше. Границные условия состоят в непрерывности самой функции на границах раздела слоев, однако нормальная производная ее терпит разрыв вида:

$$\frac{1}{k_i^2} \frac{\partial G_{mi}}{\partial n} - \frac{1}{k_{i+1}^2} \frac{\partial G_{mi+1}}{\partial n} \Big|_{z=L_i} = 0; \tag{22}$$

Сопоставим полученные уравнения для сейсмической и электромагнитной задачи:

$$\begin{aligned}
j(M^0) &= \frac{(k_{1ji}^2 - k_{1j}^2)}{2p} \underset{S_C}{\text{TT}} j(M) G_{Sp,j}(M, M^0) dt_M + \\
&+ \frac{(s_{ji} - s_{ja})}{s_{ji} 2p} \underset{C}{\text{CH}}_{Sp,j} \frac{\P j}{\P n} dc + \frac{s_{ja}}{s_{ji}} j^0(M^0) \text{ при } M^0 \text{ O } S_C \\
H_x(M^0) &= \frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{2p} \underset{S_C}{\text{TT}} H_x(M) G_m(M, M^0) dt_M + \\
&+ \frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{k_j^2 2p} \underset{C}{\text{CH}}_x(M) \frac{\P G_m}{\P n} dc + \frac{k_{ji}^2}{k_j^2} H_x^0(M^0) \text{ при } M^0 \text{ O } S_C
\end{aligned} \tag{23}$$

Различие в граничных условиях для сейсмической и электромагнитной задачи приводит к различному типу уравнений: в сейсмическом случае – к интегро-дифференциальному уравнению, в электромагнитном случае – к нагруженному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Если при решении прямых электромагнитной и сейсмической задач в динамическом варианте удается установить подобие в явных выражениях для составляющих электромагнитного поля и сейсмического поля при определенных типах их возбуждения, то с усложнением структуры среды, как показывает полученный результат при анализе сейсмических данных, связанных с решением для продольных упругих колебаний, подобие исчезает. Это означает, что сейсмическая информация является дополнительной к электромагнитной информации о структуре и тем более о состоянии среды.

Алгоритм моделирования дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны на двумерной неоднородности, расположенной в одном из слоев n -слойной среды

Рассмотрим задачу о дифракции линейно поляризованной упругой поперечной волны на двумерной неоднородности, расположенной в j -ом слое n -слойной среды, используя подход, описанный в работе [10] для электромагнитной двумерной задачи (случай Н-поляризации). Геометрическая модель среды аналогична описанной в предыдущей задаче. В этом случае F_y и F_z - составляющие действующей силы равны нулю,

$$u_z = u_y = 0; \quad (24)$$

а составляющая вектора смещений вдоль оси OX не зависит от x . Составляющие тензора напряжения, согласно работе [11], имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = 0; \\ \tau_{xy} &= \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}; \quad \tau_{yz} = 0; \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда наша задача, с учетом (8), сводится к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u_{xi} + k_{2i}^2 u_{xi} &= -2\pi f_i(M); \\ f_i(M) &= \frac{\sigma_i}{2\pi\mu_i} F_{xi}; \end{aligned} \quad (26)$$

где $i=1, \dots, n$, $F_{xi}=F$ при $i=1$, при $i \neq 1$ $F_{xi}=0$. Волновое число в i -ом слое равно согласно [11]:

$$k_{2i}^2 = k_2^2 = \omega^2 \frac{\sigma_i}{\mu_i}; \quad (27)$$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} \tilde{k}(M) &= k_{2i} \text{ – волновое число в слоистой среде, } i=1, \dots, n \text{ и} \\ K(M) &= \begin{cases} k_{2ji} & \text{при } M \in S_0 \\ \tilde{k}(M) & \text{при } M \notin S_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (27')$$

$$k_{2ji}^2 = \omega^2 \frac{\sigma_{ji}}{\mu_{ji}};$$

Индекс ji , как и в предыдущей задаче указывает на свойства среды внутри неоднородности.

В общем случае в произвольном слое или внутри неоднородности уравнение (26) с учетом (27) и (27') будет иметь вид:

$$\Delta u_{xi} + K^2(M)u_{xi} = -2\pi f_i(M); \quad (28)$$

Границные условия, заключающиеся в непрерывности вектора смещения и тензора напряжений на всех границах раздела, согласно (11) и (21), сводятся к непрерывности u_{xi} и $\mu_i \frac{\partial u_{xi}}{\partial n}$. Пусть выполнены условия затухания на бесконечности:

$$ru_{xi} = O(1), \quad r\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial r} - ik_{2i}u_{xi}\right) = o(1).$$

$$\text{Пусть: } \tilde{u}_{xi} = u_{xi} - u_{xi}^0, \quad (29)$$

где $i=1, \dots, j, j+1, \dots, n$, u_{xi}^0 – составляющая нормального сейсмического поля в слоистой среде в отсутствие неоднородности: $u_{ji}^0 = u_j^0$ и

$$\Delta u_{xi}^0 + k_{2i}^2 u_{xi}^0 = -2\pi f_i(M); \quad (30)$$

$$\mu_i \frac{\partial u_{xi}^0}{\partial z} - \mu_{i+1} \frac{\partial u_{x,i+1}^0}{\partial z} = 0 \Big|_{z \in L_i}; \quad (31)$$

$$u_{xi}^0 - u_{x,i+1}^0 = 0 \Big|_{z \in L_i};$$

На контуре неоднородности u_x^0 и $\frac{\partial u_x^0}{\partial n}$ непрерывны.

\tilde{u}_{xi} – составляющая аномального сейсмического поля, которая, как легко показать аналогично (31) удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \tilde{u}_{xi} + K^2(M)\tilde{u}_{xi} = -(K^2(M) - \tilde{k}^2(M))u_{xi}^0; \quad (32)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{\partial \tilde{u}_{x,i}}{\partial z} - \mu_{i+1} \frac{\partial \tilde{u}_{x,i+1}}{\partial z} &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \tilde{u}_{x,i} - \tilde{u}_{x,i+1} = 0 \Big|_{z \in L_i}; \tilde{u}_x \Big|_{z=0} = 0 \\ \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial n} \right)_{ji} - \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial n} \right)_{ja} &= (\mu_{ji} - \mu_{ja}) \frac{\partial u_{x,j}^0}{\partial n}; \tilde{u}_{x,ji} - \tilde{u}_{x,ja} = 0; \end{aligned} \quad (33)$$

Функцию источника сейсмического поля $G_{ss}(M, M^0)$ выберем следующим образом: она определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta G_{ss} + \tilde{k}^2 G_{ss}(M, M^0) = -2\pi \delta(M - M^0); \quad (34)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{\partial G_{Ss,i}}{\partial z} - \mu_{i+1} \frac{\partial G_{Ss,i+1}}{\partial z} &= 0 \Big|_{z \in L_i}; G_{Ss} \Big|_{z=0} = 0; \\ G_{Ss,i} - G_{Ss,i+1} &= 0 \Big|_{z \in L_i}; \end{aligned} \quad (35)$$

На контуре неоднородности $G_{Ss}(M, M^0)$ и $\frac{\partial G_{Ss}(M, M^0)}{\partial n}$ непрерывны.

Применим формулу Грина [10] для функций \tilde{u}_{xi} и $G_{Ss}(M, M^0)$ для каждого слоя n-слойной среды при $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \int_{L_i} (\tilde{u}_{xi} \frac{\partial G_{Ss,i}}{\partial n} - G_{Ss,i} \frac{\partial \tilde{u}_{xi}}{\partial n}) dl_i - \int_{L_{i+1}} (\tilde{u}_{x,i+1} \frac{\partial G_{Ss,i+1}}{\partial n} - \\ - G_{Ss,i+1} \frac{\partial \tilde{u}_{x,i+1}}{\partial n}) dl_{i+1} &= \begin{cases} 2\pi \tilde{u}_{xi}(M^0) & \text{при } M^0 \in S_i \\ 0 & \text{при } M^0 \notin S_i \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

При $i=j$:

$$\begin{aligned} \int_{L_j} (\tilde{u}_{x,j} \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} - G_{Ss,j} \frac{\partial \tilde{u}_{x,j}}{\partial n}) dl_j - \int_{L_{j+1}} (\tilde{u}_{x,j+1} \frac{\partial G_{Ss,j+1}}{\partial n} - G_{Ss,j+1} \frac{\partial \tilde{u}_{x,j+1}}{\partial n}) dl_{j+1} + \\ + \oint_{C_{ja}} (\tilde{u}_{x,ja} \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} - G_{Ss,j} \frac{\partial \tilde{u}_{x,ja}}{\partial n}) dc_{ja} &= \begin{cases} 2\pi \tilde{u}_{x,j}(M^0) & \text{при } M^0 \in S_j - S_C \\ 0 & \text{при } M^0 \notin S_j - S_C \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Домножим выражения (36) и (37) на μ_i и сложим их с учетом граничных условий, в результате чего получим:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{ja}}{2\pi} \oint_{C_{ja}} (\tilde{u}_{x,ja} \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} - G_{Ss,j} \frac{\partial \tilde{u}_{x,ja}}{\partial n}) dc_{ja} &= \\ = \begin{cases} \mu(M^0) \tilde{u}_x(M^0) & \text{при } M^0 \in S_j - S_C \\ 0 & \text{при } M^0 \notin S_j - S_C \end{cases}; \mu_{ja} &= \mu_j; \end{aligned} \quad (38)$$

Применим формулу Грина для функций $\tilde{u}_{x,ji}$ и $G_{Ss,j}(M, M^0)$ для внутренности области S_C , с учетом (26), (28), (30), (32) получим:

$$\begin{aligned} \frac{k_{2ji}^2 - k_{2j}^2}{2\pi} \iint_{S_C} u_x(M) G_{Ss,j}(M, M^0) d\tau_M - \\ - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_{ji}} (\tilde{u}_{x,ji} \frac{\partial G_{Ss,j}}{\partial n} - G_{Ss,j} \frac{\partial \tilde{u}_{x,ji}}{\partial n}) dc_{ji} &= \begin{cases} \tilde{u}_x(M^0) & \text{при } M^0 \in S_C \\ 0 & \text{при } M^0 \notin S_C \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Домножим (39) на μ_{ji} и сложим с (38), с учетом граничных условий на контуре неоднородности получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{ji}(k_{2ji}^2 - k_{2j}^2)}{2\pi} \iint_{S_C} u_x(M) G_{ss,j}(M, M^0) d\tau_M - \frac{(\mu_{ja} - \mu_{ji})}{2\pi} \oint_C u_x^0(M) \frac{\partial G_{ss,j}}{\partial n} dc + \\ & + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{ji})}{2\pi} \oint_C u_x \frac{\partial G_{ss,j}}{\partial n} dc + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{ji})}{2\pi} \oint_C G_{ss,j} \frac{\partial u_x^0}{\partial n} dc = \mu(M^0) \tilde{u}_x(M^0) \end{aligned} \quad (40)$$

Воспользуемся равенством [10]:

$$\begin{aligned} & -\frac{(\mu_{ja} - \mu_{ji})}{2\pi} \oint_C (u_x^0(M) \frac{\partial G_{ss,j}}{\partial n} - G_{ss,j} \frac{\partial u_x^0}{\partial n}) dc = \\ & = \begin{cases} (\mu_{ja} - \mu_{ji}) u_x^0(M^0) & \text{при } M^0 \in S_C \\ 0 & \text{при } M^0 \notin S_C \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда (40) с учетом (41) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{(k_{2ji}^2 - k_{2j}^2)}{2\pi} \iint_{S_C} u_x(M) G_{ss,j}(M, M^0) d\tau_M + \frac{\mu_{ja}}{\mu_{ji}} u_x^0(M^0) + \\ & + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{ji})}{\mu_{ji} 2\pi} \oint_C u_x(M) \frac{\partial G_{ss,j}}{\partial n} dc = u_x(M^0) \quad \text{при } M^0 \in S_C \\ & \frac{\mu_{ji}(k_{2ji}^2 - k_{2j}^2)}{\mu(M^0) 2\pi} \iint_{S_C} u_x(M) G_{ss,j}(M, M^0) d\tau_M + u_x^0(M^0) + \\ & + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{ji})}{\mu(M^0) 2\pi} \oint_C u_x(M) \frac{\partial G_{ss,j}}{\partial n} dc = u_x(M^0) \quad \text{при } M^0 \notin S_C \end{aligned} \quad (42)$$

В выражениях (42) выписан алгоритм моделирования сейсмического поля для поперечных упругих колебаний в n -слойной среде, содержащей двумерную неоднородность. Первое выражение есть интегральное нагруженное уравнение Фредгольма второго рода, решение которого есть распределение составляющей вектора упругих смещений для поперечных колебаний внутри неоднородности. Второе выражение есть интегральное представление для вычисления вектора упругих смещений в любом слое n -слойной среды.

Сопоставление алгоритмов для сейсмического (линейно поляризованные поперечные упругая волна) и электромагнитного двумерного моделирования (n-поляризация)

Сопоставляя выражения (42) с соответствующими выражениями для электромагнитного поля (Н-поляризация) (21), мы видим наличие подобия интегральных структур этих выражений.

$$\begin{aligned}
& \frac{(k_{2ji}^2 - k_{2j}^2)}{2\pi} \iint_{S_C} u_x(M) G_{ss,j}(M, M^0) d\tau_M + \frac{\mu_{ja}}{\mu_{ji}} u_x^0(M^0) + \\
& + \frac{(\mu_{ja} - \mu_{ji})}{\mu_{ji} 2\pi} \oint_C u_x(M) \frac{\partial G_{ss,j}}{\partial n} dc = u_x(M^0) \quad \text{при } M^0 \in S_C \\
H_x(M^0) &= \frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{2\pi} \iint_{S_C} H_x(M) G_m(M, M^0) d\tau_M + \\
& + \frac{k_{ji}^2 - k_j^2}{k_j^2 2\pi} \oint_C H_x(M) \frac{\partial G_m}{\partial n} dc + \frac{k_{ji}^2}{k_j^2} H_x^0(M^0) \quad \text{при } M^0 \in S_C
\end{aligned}$$

Различие имеется в коэффициентах при соответствующих членах в выражениях (21) и (42), что можно учесть в выборе системы наблюдения того или иного поля, а также в явных выражениях для функций Грина. Следует учесть также различие в частотной зависимости отклика среды на сейсмическое и электромагнитное возбуждение. Однако при соблюдении коэффициентов подобия сейсмическое поле, возбуждаемое поперечными колебаниями и электромагнитное поле будут содержать подобную информацию о структуре неоднородной среды и связанном с ней состоянии. Эти результаты подтверждаются натурными экспериментами, изложенными в работах [3, 12].

Заключение

Предложен алгоритм решения прямой двумерной задачи для сейсмического поля в динамическом варианте при возбуждении источниками продольных и поперечных колебаний в виде интегро-дифференциального (в первом случае) и нагруженного интегрального уравнения Фредгольма второго рода во втором случае для решения внутренней задачи и соответствующих интегро-дифференциальных и интегральных представлений для решения внешней задачи. Произведено сопоставление полученных алгоритмов с алгоритмом решения прямой задачи для дифракции электромагнитного поля на двумерных неоднородностях, полученного В.И.Дмитриевым [10] (Н-поляризация). Показано, что для более сложных, чем горизонтально-слоистые, структур геологических сред подобие электромагнитной задачи и сейсмической для продольных колебаний нарушается. Следовательно, эти наблюдения позволяют получить взаимно дополнительную информацию о структуре и тем более о состоянии среды. Эти поля различным образом отражают особенности неоднородных структур и реагируют на изменение их состояния. При возможности прослеживания сейсмических возмущений в виде колебаний только сдвигового типа и наблюдений магнитной составляющей электромагнитного поля Н-поляризации в двумерной среде установлено их подобие, что может быть использовано при построении совместных систем наблюдения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-05-00149-а

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хачай О.А., Влох Н.П., Новгородова Е.Н., Хачай А.Ю., Худяков С.В. Трехмерный электромагнитный мониторинг состояния массива горных пород // Физика Земли, 2000, №12, с.1–8.
2. Хачай О.А., Хинкина Т.А., Бодин В.В. Предпосылки сейсмоэлектромагнитного мониторинга нестационарной среды. // Российский геофизический журнал. 2000. №17–18.,с.83–89.
3. Хачай О.А., Бодин В.В., Новгородова Е.Н., Хачай А.Ю., Захаров И.Б., Хинкина Т.А. Метод картирования зон потенциальной неустойчивости массива горных пород различного вещественного состава с использованием данных динамической сейсмики и электромагнитных индукционных исследований. // Горный Информационно-аналитический бюллетень, 200 г. №3, с.10–16.
4. Хачай О.А., Новгородова Е.Н., Хачай А.Ю. Исследование разрешающей способности попланшетной электромагнитной методики для активного картирования и мониторинга неоднородных геоэлектрических сред. // Физика Земли, 2003, №1, с.30–41.
5. Хачай О.А., Дружинин В.С., Карапетян Ю.С., Бодин В.В., Новгородова Е.Н., Хачай А.Ю..Захаров И.Б., Грозных М.В. Использование комплексной попланшетной сейсмической и электромагнитной методик для решения задач картирования приповерхностных неоднородностей. // Геофизика XXI столетия: 200 г. Сборник трудов третьих геофизических чтений им. В.В.Федынского. Москва. Научный Мир.200 г.,С. 327–337.
6. Хачай А.Ю. Изучение критерия подобия сейсмических и электромагнитных полей от погруженных сингулярных источников для осуществления активного мониторинга нестационарной среды.// Глубинное строение, геодинамика, мониторинг. Тепловое поле Земли. Интерпретация геофизических полей. Материалы Третьих научных чтений Ю.П.Булашевича. Институт геофизики УрО РАН. 200 г., с. 143–145.
7. Хачай А.Ю. Алгоритм решения прямой задачи электромагнитных исследований при возбуждении горизонтальным магнитным диполем, расположенным в произвольном слое n-слойной изотропной проводящей среды. // Информатика и математическое моделирование. Екатеринбург 2006, с.136–168.
8. Хачай А.Ю. Алгоритм решения прямой динамической задачи сейсмики при возбуждении горизонтальной точечной силой, расположенной в произвольном слое n-слойной упругой изотропной среды // Информатика и математическое моделирование. Екатеринбург 2006, с.170–278.
9. Хачай А.Ю. Алгоритм решения прямой динамической задачи сейсмики при возбуждении точечным источником вертикальной силы, расположенной в произвольном слое n-слойной упругой изотропной среды // Информатика и математическое моделирование. Екатеринбург 2006, с.279–310.
10. Дмитриев В.И. Дифракция плоского электромагнитного поля на цилиндрических телах, расположенных в слоистых средах. // Вычислительные методы и программирование в слоистых средах. Изд-во МГУ, 1965, вып.III, с. 307–316.
11. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.-Ленинград, Гос. Изд-во технико-теоретической литературы. 1950, С.280.
12. Хачай О.А., Хинкина Т.А., Бодин В.В. Изучение критерия подобия для сейсмических и электромагнитных исследований в частотно – геометрическом варианте. // Астрономо-геодезические исследования. Екатеринбург.УрГУ.2001, с.30–35. ГИАБ

Коротко об авторах

Хачай О.А. – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт геофизики УрО РАН
Хачай А.Ю. – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры экономического моделирования и информатики УрГУ