

УДК 624.131.438

**С.В. Сукнёв**

## ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД \*

*Прочностные характеристики геоматериалов и горных пород, определённые при испытании на одноосное сжатие образцов с центральными круговыми отверстиями, демонстрируют существенную зависимость от диаметра отверстия (масштабный эффект).*

*Ключевые слова:* прочность горных пород, интегральный критерий, нагрузки образца.

**Семинар № 3**

**П**рочность горных пород при растяжении и сжатии определяют, как правило, на сплошных призматических или цилиндрических образцах, подвергнутых различным способам нагружения [1, 2]. В последнее время для этих целей предлагается использовать образцы, содержащие круговые отверстия [3–5]. Наличие отверстия позволяет получать более стабильные значения прочностных характеристик за счёт концентрации внутренних напряжений вблизи контура отверстия и уменьшения влияния краевых эффектов. Максимальные напряжения на контуре отверстия рассчитываются методами теории упругости. Однако при этом следует учитывать масштабный эффект прочностных свойств, присущий таким структурно-неоднородным материалам, как горные породы, и который наиболее сильно проявляется в условиях концентрации напряжений, когда эффективный нагруженный объём определяется зоной концентрации напряжений вблизи отверстия, размер которой мал по сравнению с размерами образца. В этих условиях традиционный подход к оценке

прочностных свойств материала, который заключается в сопоставлении максимальных напряжений в образце с постоянным пределом прочности, неприменим, поскольку последний зависит от размера зоны концентрации напряжений (масштабный эффект). В соответствии с традиционным подходом условие прочности имеет вид

$$\sigma_e < \sigma_0, \quad (1)$$

где  $\sigma_e = f(\sigma_{ij})$ ;  $\sigma_0 = \text{const}$ . Эквивалентное напряжение  $\sigma_e$  характеризует внутреннее напряжённое состояние образца и в общем случае является функцией компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . Предельное напряжение  $\sigma_0$  характеризует прочность материала и полагается константой. Наступлению пре состояния (разрушению) соответствует знак равенства в выражении (1), а критическое напряжение  $p_c$ , при котором в наиболее напряжённой точке образца достигается предельное состояние, определяется выражением

$$p_c = \frac{\sigma_0}{K_t}, \quad (2)$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-08-96002).

где  $K_e$  – коэффициент концентрации напряжений, характеризующий отношение эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  в наиболее напряжённой точке образца к приложенному напряжению  $p$ .

### Интегральный критерий

Для учёта масштабного эффекта прочностных свойств горных пород в работах [4, 6, 7] было предложено использовать интегральный критерий. Важным свойством этого критерия является введение внутреннего размера материала, характеризующего его структуру, что позволяет описать масштабный эффект в условиях концентрации напряжений и тем самым расширить область применения по сравнению с традиционными критериями.

Идея усреднения напряжений в области их концентрации, которая лежит в основе интегрального критерия, высказывалась разными исследователями. В частности, В.В. Новожилов [8] рассмотрел упругое тело с идеальной атомной структурой, когда атомные слои прилегают один к другому, причём атомы каждого последующего слоя располагаются над атомами предыдущего слоя. Разрушение такого тела есть процесс дискретный: нельзя, например, отделить половину атома от половины атома, сохранив связь между остальными их половинами. “Квант” разрушения будет нарушение связи всего лишь у одной пары атомов. Исходя из этих рассуждений, условие хрупкого разрушения в области больших градиентов напряжений предложено записать в интегральной форме

$$\max \int_0^{2a} \sigma_y(x) dx \geq 2a\sigma_0, \quad (3)$$

где  $\sigma_y$  – нормальное напряжение, действующее перпендикулярно к атомному слою;  $x$  – расстояние, отсчитываемое вдоль прямолинейной

цепочки атомов в направлении быстрейшего изменения напряжений;  $a$  – атомный радиус;  $\sigma_0$  – предел прочности на разрыв. Если неравенство (3) не выполняется, то разрушение произойти не может, так как приложенные к телу внешние силы оказываются не в состоянии преодолеть максимального значения межатомных сил даже у одной пары атомов.

В дальнейшем интегральный критерий был распространён на тела произвольной структуры и использован для оценки прочности различных материалов, в том числе, горных пород [4, 6, 7]. В более общем виде интегральный критерий прочности имеет вид

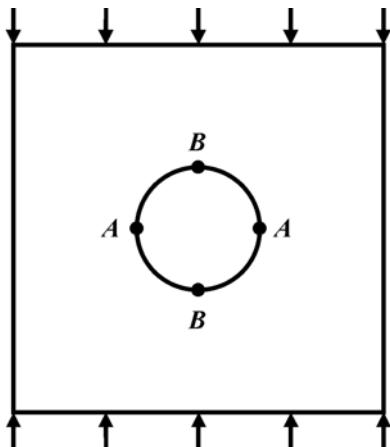
$$\langle \sigma_e \rangle_d < \sigma_0, \quad (4)$$

где  $\langle \sigma_e \rangle_d$  – усреднённое на расстоянии  $d$  по опасному сечению значение эквивалентного напряжения:

$$\langle \sigma_e \rangle_d = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_e(x) dx. \quad (5)$$

Размер усреднения  $d$  полагают константой материала.

В оригинальной формулировке критерия в качестве эквивалентного напряжения используется наибольшее растягивающее напряжение, хотя современная физическая интерпретация критерия существенно отличается от рассуждений В.В. Новожилова. В настоящее время необходимость усреднения напряжений связывают, прежде всего, с образованием зоны повреждённости (предразрушения), в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Физический механизм образования зоны предразрушения не обязательно связан с действием растягивающих напряжений. К примеру, в условиях сжатия может быть реализован сдвиговый механизм разрушения.



**Рис. 1. Образец с отверстием**

Рассмотрим возможность применения интегрального критерия для определения пределов прочности горных пород при растяжении и сжатии по результатам испытаний на одностороннее сжатие образцов с центральными круговыми отверстиями.

#### Концентрация напряжений в образце с отверстием

Рассмотрим квадратную плиту, подверженную равномерному одностороннему сжатию и содержащую центральное круговое отверстие (рис. 1). Наличие отверстия приводит к возникновению неоднородных полей напряжений.

Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения образуются на контуре отверстия. По мере удаления от контура напряжения быстро спадают. Такое поведение получило название концентрации напряжений.

Точки максимальных сжимающих напряжений располагаются на контуре отверстия по концам диаметра, перпендикулярного оси нагрузки (рис. 1, точки A). Точки максимальных растягивающих напряжений располагаются на контуре отверстия по концам диаметра, параллельного оси нагрузки (рис. 1, точки B). Вблизи

этих точек формируются зоны концентрации сжимающих и растягивающих напряжений, соответственно.

В процессе нагружения образца при наступлении предельного состояния в точках A образуются сдвиговые трещины, а в точках B – трещины отрыва. Зная распределение напряжений в образце, и фиксируя критическую нагрузку (давление) момент образования трещин, мы можем на одном образце определить прочность материала при сжатии и при растяжении. Экспериментальное определение момента образования сдвиговых трещин и трещин отрыва на контуре отверстия представляет собой самостоятельную техническую проблему, на которой мы в настоящей работе останавливаться не будем. Отметим только, что для этой цели либо используют специальные датчики [9, 10], либо ограничиваются визуальными наблюдениями [11]. Главный вопрос, который нас интересует, как по полученным экспериментальным данным о критических нагрузках определить пределы прочности при растяжении и при сжатии, учитывая при этом масштабный эффект прочностных свойств?

#### Предел прочности при сжатии

Сначала рассмотрим образование сдвиговых трещин. Если диаметр отверстия мал по сравнению с размерами образца, то распределение напряжений в образце можно оценить, воспользовавшись известным решением задачи Кирша [12]. Поскольку радиальные напряжения на контуре отверстия обращаются в ноль, определяющую роль в образовании сдвиговых трещин будут играть сжимающие напряжения в точках A, действующие вдоль линии приложения нагрузки. Направим ось  $y$  вдоль этой линии. Тогда распределение сжимающих напряжений  $\sigma_y$  в направлении быст-

рейшего изменения напряжений (ось  $x$ ) имеет вид [12]:

$$\sigma_y = \frac{p}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{x^2} + 3 \frac{a^4}{x^4} \right). \quad (6)$$

Здесь  $p$  – приложенное сжимающее напряжение (давление);  $a$  – радиус отверстия. Начало координат выбрано в центре отверстия, сжимающие напряжения приняты положительными. Максимальные сжимающие напряжения имеют место на контуре отверстия в точках  $x = \pm a$  и втрое превышают величину приложенного давления. Таким образом, коэффициент концентрации напряжений  $K_t = 3$  для отверстия любого диаметра.

Критическое напряжение (давление) в момент образования сдвиговых трещин определяется в соответствии с традиционным критерием по формуле (2), откуда, зная  $K_t$ , можно определить прочность материала при сжатии  $C_0$ . Проблема состоит только в том, что для разных отверстий критическое давление имеет различное значение.

В соответствии с интегральным критерием критическое давление получим, подставив (6) в (5) с пределами интегрирования  $[a, a + d]$  и приравняв результат интегрирования к пределу прочности материала при сжатии  $C_0$ :

$$p_c = \frac{2C_0}{(1 + 1/(l + 2d))(2 + 1^2/(l + 2d)^2)}, \quad (7)$$

где  $l = 2a$  – диаметр отверстия. В отличие от формулы (2) выражение (7) позволяет учесть зависимость критического давления от диаметра отверстия. Апроксимировав с помощью (7) экспериментально полученные данные о величине критического давления  $p_c$  при различных диаметрах отверстия, мы получим значения преде-

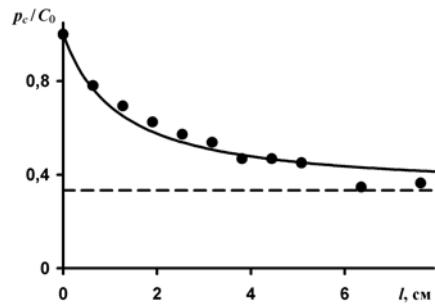
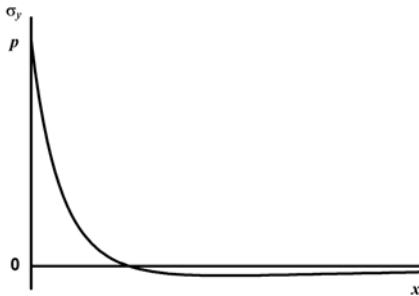


Рис. 2. Зависимость критического давления от диаметра отверстия

ла прочности  $C_0$  и размера усреднения  $d$ .

С целью проверки возможности применения интегрального критерия для оценки  $C_0$ , проанализируем известные экспериментальные данные об образовании сдвиговых трещин на контуре кругового отверстия [11]. На сжатие испытывали образцы, изготовленные из водного раствора строительного гипса и содержащие отверстия различного диаметра от 6 до 76 мм. Образование сдвиговых трещин на контуре отверстия наблюдали визуально. На рис. 2 представлены экспериментальные данные (точки) о величине нагрузки в момент образования сдвиговых трещин на контуре отверстия в зависимости от его диаметра и результаты расчёта критического давления (сплошная кривая) по формуле (7). Штриховая прямая рассчитана согласно традиционному подходу по формуле (2). Предел прочности  $C_0$  определяли заранее на образцах без отверстия. Приведённые данные демонстрируют значительный масштабный эффект, о котором говорилось выше, и который достаточно хорошо описывается интегральным критерием разрушения.

В то же время необходимо заметить, что интегральный критерий



**Рис. 3. Распределение нормальных напряжений вдоль линии приложения нагрузки**

применим лишь в том случае, если диаметр отверстия намного превышает размер структурных составляющих (пор, зёрен, микротрещин) материала. Дело в том, что из выражения (7) следует, что наличие в образце любого сколь угодно малого отверстия приводит к снижению его прочности. Это, вообще говоря, не согласуется с современными представлениями о реальном твёрдом теле, обладающем изначальной, присущей ему дефектностью [13]. Поэтому малые искусственные дефекты, размеры которых сопоставимы с размерами структурных составляющих материала, не оказывают влияния на его прочность до тех пор, пока их размеры не достигнут определённого (критического) значения. Однако в рассмотренном выше примере диаметр отверстий был достаточно велик и применение интегрального критерия вполне оправдано.

#### **Предел прочности при растяжении**

Теперь рассмотрим образование трещин отрыва. Направим ось  $x$  вдоль линии приложения нагрузки. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  вдоль этой линии имеет вид [12]:

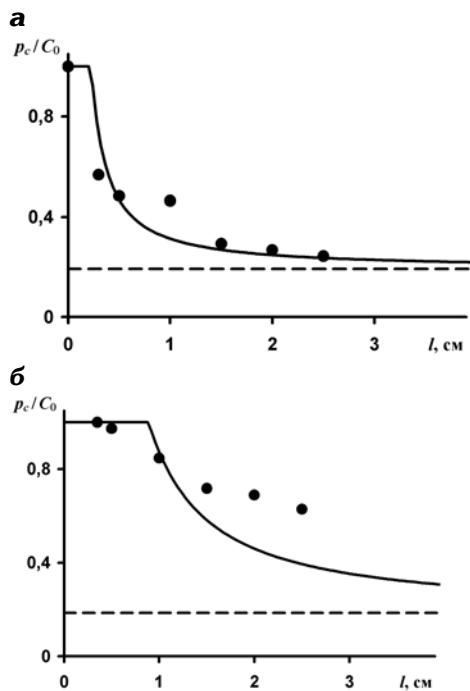
$$\sigma_y = \frac{p}{2} \left( 3 \frac{a^4}{x^4} - \frac{a^2}{x^2} \right), \quad (8)$$

где  $p$  – приложенное сжимающее напряжение (давление);  $a$  – радиус отверстия. Начало координат выбрано в центре отверстия, напряжение  $p$  принято положительным. Растягивающие напряжения достигают своего максимального значения  $\sigma_{\max} = p$  на контуре отверстия в точках  $x = \pm a$ , при удалении от него напряжения быстро убывают. Распределение напряжений  $\sigma_y(x)$  показано на рис. 3. Как видно из (8) и рис. 3, напряжение  $\sigma_y$  асимптотически стремится к нулю, поэтому при уменьшении диаметра отверстия  $l = 2a$  среднее напряжение также стремится к нулю, а критическая величина приложенного давления  $p_c$ , при котором на контуре отверстия образуются трещины отрыва, соответственно, – к неограниченному значению. В действительности, это значение, очевидно, ограничено пределом прочности материала на сжатие  $C_0$ , откуда следует, что существует критическое значение размера отверстия  $l = l_c$ , ниже которого трещины отрыва на контуре отверстия не образуются. Другими словами, при  $l \leq l_c$  материал не чувствует присутствия концентратора напряжений. Это согласуется с современными представлениями о реальном твёрдом теле, изложенными выше.

Критическое давление получим, подставив (8) в (5) с пределами интегрирования  $[a, a + d]$  и приравняв результат интегрирования к пределу прочности материала при растяжении  $T_0$ :

$$p_c = \chi C_0 \frac{(1 + 2d/l)^3}{1 + d/l}, \quad l > l_c, \quad (9)$$

где  $\chi = T_0 / C_0$ .



**Рис. 4. Зависимость критического давления от диаметра отверстия**

Была проведена экспериментальная проверка возможности применения интегрального критерия к оценке образования трещин отрыва при сжатии. В качестве модельного материала использовали дигидрат сульфата кальция (двуводный гипс), приготовленный из водного раствора строительного гипса. Наряду с полуводным сульфатом кальция, строительный гипс уже содержит в своём составе определённую долю двуводного сульфата кальция, который не участвует в реакции гидратации при изготовлении образцов и фактически играет роль заполнителя. Были изготовлены две партии образцов: одна из гипсового материала с высоким (более 90 %) содержанием полуводного сульфата кальция (гипс 1), вторая – из гипсового материала с низким (в пределах 60–70 %) содержанием полуводного

сульфата кальция в исходном составе (гипс 2).

Образование трещин отрыва в зонах концентрации напряжений исследовали на образцах, содержащих центральные круговые отверстия различного диаметра и подверженных одновременному сжатию со скоростью 0,5 мм/мин. Образцы представляли собой квадратные плиты размером 200×200 мм и толщиной 30–35 мм. Диаметр отверстия изменяли от 3,5 до 25 мм. На контур отверстия наносили графитовые датчики электропроводимости. Регистрацию трещин отрыва осуществляли по диаграммам изменения электропроводимости графитовых датчиков в процессе нагружения образца. Методика проведения эксперимента описана в работе [10].

На рис. 4, а представлены экспериментальные данные (точки) о величине нагрузки в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от его диаметра, полученные на образцах из гипса 1, и результаты расчёта критического давления (сплошная кривая) по формуле (9). Штриховая прямая рассчитана согласно традиционному подходу. Аналогичные результаты, полученные на образцах из гипса 2, приведены на рис. 4, б.

Рис. 4, а, б иллюстрируют существенный масштабный эффект, т.е. влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. С его уменьшением критическое давление возрастает, достигая предела прочности на сжатие, с увеличением – асимптотически приближается к пределу прочности на растяжение. Такое поведение качественно описывается критерием средних напряжений. Однако хорошее количественное соответствие расчётных и экспериментальных значений получено только для гипса 1 (рис. 4, а). Критический

диаметр отверстия  $l_c$  оказался приблизительно равным  $2d$ .

#### Выходы

1. Прочностные характеристики геоматериалов и горных пород, определённые при испытании на одноосное сжатие образцов с центральными круговыми отверстиями, демонстрируют существенную зависимость от диаметра отверстия (масштабный эффект). Для учёта масштабного эффекта может быть использован интегральный критерий разрушения, основанный на усреднении напряжений в области их концентрации.

2. Использование интегрального критерия для определения предела прочности при сжатии возможно при условии, что размер отверстия намного превышает размер структурных составляющих (пор, зёрен, микротрешин) материала.

3. Экспериментально показано, что для некоторых материалов интегральный критерий может быть успешно применён для определения предела прочности при растяжении. Однако применение критерия для других материалов позволяет получить лишь качественные оценки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 21153.2-84. Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном сжатии. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 10 с.
2. ГОСТ 21153.3-85. Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном растяжении. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 14 с.
3. Ефимов В.П. Применение градиентного подхода к определению прочности горных пород на растяжение // ФТПРГИ. – 2002. – № 5. – С. 49–53.
4. Van de Steen B., Vervoort A. Non-local stress approach to fracture initiation in laboratory experiments with a tensile stress gradient // Mech. Mater. – 2001. – Vol. 33, No. 12. – P. 729–740.
5. Van de Steen B., Vervoort A., Napier J.A.L. Observed and simulated fracture pattern in diametrically loaded discs of rock material // Int. J. Fract. – 2005. – Vol. 131, No. 1. – P. 35–52.
6. Carter B.J. Size and stress gradient effects on fracture around cavities // Rock Mech. and Rock Eng. – 1992. – Vol. 25, No. 3. – P. 167–186.
7. Dzik E.J., Lajtai E.Z. Primary fracture propagation from circular cavities loaded in compression // Int. J. Fract. – 1996. – Vol. 79, No. 1. – P. 49–64.
8. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33, вып. 2. – С. 212–222.
9. Carter B.J., Lajtai E.Z., Petukhov A. Primary and remote fracture around underground cavities // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 1991. – Vol. 15, No. 1. – P. 21–40.
10. Сукнёв С.В., Елшин В.К., Новопашин М.Д. Экспериментальное моделирование процессов трещинообразования в образцах горных пород с отверстием // ФТПРГИ. – 2003. – № 5. – С. 47–54.
11. Nesebova V., Lajtai E.Z. Fracture from compressive stress concentrations around elastic flaws // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. – 1973. – Vol. 10. – P. 265–284.
12. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
13. Shaw M.C. A critical review of mechanical failure criteria // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. – 1984. – Vol. 106, No. 3. – P. 219–226. **ГЛАБ**

#### Коротко об авторе

Сукнёв С.В. – доктор технических наук, ст. научный сотрудник, Институт горного дела Севера СО РАН.

