© Г.М. Нигметов, 2010

УДК 69.035.4

Г.М. Нигметов

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ РАСЧЁТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Приведен сравнительный анализ методов динамического расчёта напряжённо-деформируемого состояния грунтового массива в окрестности подземного сооружения при воздействии сейсмовзрывных нагрузок. На основе выполненного анализа предлагается для нестационарных динамических расчётов разработать метод на основе запаздывающих потенциалов Кирхгофа. Метод может найти применение при выполнении расчётов по оценке устойчивости и безопасности подземных горных выработок на воздействие сейсмовзрывных нагрузок.

Ключевые слова: подземные горные выработки, динамические нагрузки, метод разделения переменных.

Семинар № 19

Обрушение подземных сооружений может привести к катастрофическим последствиям не только в подземной части, но и на поверхности горного массива. Поэтому своевременная и достоверная оценка напряжённо-деформируемоего состояния (НДС) грунтового массива в окрестности горной выработки при воздействие статических и динамических нагрузок имеет большое практическое значение. Точность определения статических нагрузок и НДС в окрестности подземного сооружения зависит от точности определения параметров грунтового массива, веса вышележащих объектов и расчётной схемы. Точность определения динамических нагрузок и НДС зависит не только от точности определения строения и физико-механических характеристик грунтового массива, но и от точности определения мощности и места расположения источников динамического воздействия, характера их приложения в пространстве и времени, а также от точности моделирования динамического процесса взаимодействия нагрузки и сооружения. С другой стороны если методы расчёта на статические нагрузки достаточно полно представлены в существующей нормативно-технической литературе, то определение динамических нагрузок и механика их взаимодействия с подземными сооружениями до сих пор не имеет завершённого характера. Наиболее распространёнными видами динамических нагрузок, которые могут воздействовать на подземные сооружения являются: землетрясения, микросейсмические воздействия, горные удары, вибрация от транспорта и оборудования, технологические взрывы при проходках и разработках горных пород, а также взрывы техногенного и другого характеров.

Известно много примеров, когда городская застройка располагается над подземными сооружениями и полостями. Например, город Березняки в Пензенском крае расположен над подземными сооружениями по добыче калийных солей, а город Соликамск над карстовыми и соляными полостями. Целые районы города Москвы расположены над карстовыми полостями, имеются подземные тоннели метро и автомобильного транспорта. Обрушения подземных полостей могут приводить к значительным катастрофическим последствиям и потребуют больших затрат на спасательные и восстановительные работы.

Поэтому, при проектировании и эксплуатации подземных сооружений особое значение имеют данные о НДС в пространстве горного массива с учётом возможных динамических нагрузок. Задачи по расчёту НДС с учётом трехмерности и динамики в механике подземных сооружений относятся к наиболее сложным, до конца не исследованным.

Рассмотрим условия применения методов расчета, для определения НДС в окрестности подземных сооружений при действии динамических нагрузок.

В зависимости от источника сейсмовзрывной нагрузки должна учитываться кривизна фронта волны, а сейсмовзрывная нагрузка представляться через сферический, цилиндрический или плоский закон воздействия. Процесс взаимодействия сейсмовзрывных волн с подземными сооружениями имеет существенно трехмерный характер и поэтому его расчет должен выполняться в пространственно-временном измерении.

При действии мощных сейсмовзрывных нагрузок, эпицентр которых удален от подземных сооружений, волновое воздействие характеризуется плоским фронтом, но в силу сложной пространственной геометрии подземного сооружения взаимодействие также носит существенно трехмерный характер. Отсюда следует, что оценка устойчивости подземных сооружений при действии различных типов сейсмовзрывных нагрузок должна выполняться в пространственно-временном измерении. Сложность выполнения таких видов расчета привела к необходимости принятия ряда упрощающих предпосылок.

При оценке устойчивости подземных сооружений должно в равной степени учитываться влияние трех главных факторов:

1) нагрузки и характера ее воздействия;

2) среды и представляющей ее модели;

3) подземного сооружения (полости) и его конструктивного решения и геометрической формы.

Понятно, что в зависимости от принятых допущений и предпосылок учитывается в большей степени тот или иной фактор. Наиболее точную картину динамического процесса мы получаем тогда, когда в равной степени рассматриваем действие всех трех факторов. При выполнении расчетов скальный массив большинство исследователей принимают как упругий, однородный и изотропный. Нагрузка представляется либо в виде эквивалентно статической, либо ее действие рассматривается непосредственно во времени в виде определенной функциональной зависимости.

Для упрощения расчетов геометрия сооружения представляется в виде поперечного плоского сечения относительно протяженной стороны, при этом пренебрегают влиянием торцов.

Рассмотрим основные методы решения задач взаимодействия волновых нагрузок с подземными сооружениями.

Первые крупные исследования в области динамических расчетов подземных сооружений были проведены Рабиновичем И.М., Давыдовым С.С., Олисовым Б.А., Синицыным Д.П., Амбарцумяном А.А., Кандыбой Н.А. и др.

Наибольшее распространение среди методов расчета подземных сооружений получил метод эквивалентно-статических нагрузок. Сущность метода сводится к тому, что по определенной методике в зависимости от конструкции сооружения и физико-механических параметров грунтового массива определяется коэффициент динамичности и затем вычисляется расчетная величина нагрузки. Большинство задач с применением этого метода решались в плоской постановке.

Если размеры сооружения значительно меньше, чем длина волны, то дифракцией можно пренебречь и применение метода эквивалентно-статических нагрузок (МЭСН) дает вполне сходимый результат. Однако в остальных случаях использование МЭСН приводит к искажению действительной картины процесса и поэтому не всегда оправдано. Кроме того, МЭСН не дает кинематических параметров, представляющих значительный интерес для исследователей. С помощью МЭСН невозможно определить динамику возникновения наиболее опасных величин напряжений в окрестности сооружения, что не позволяет принять наиболее рациональное решение по конструкции подземного сооружения. Поэтому для получения наиболее достоверной картины взаимодействия волновой нагрузки с подземным сооружением целесообразнее использование динамических методов расчета.

При решении задач взаимодействия с учетом временной координаты в настоящее время сформировалось два основных направления:

1. Аналитических методов решения.

2. Численных и численно-аналитических методов решения.

Среди аналитических методов решения наибольшее распространение получил метод разделения переменных. Он является одним из основных методов решения задач математической физики. Сущность его заключается в том, что для выполнения решения вводится специальная система координат, в которой дифрагирующая поверхность является координатной. Разделение переменных в этих координатах сильно упрощает задачу, сводя ее к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако оно возможно лишь в некоторых криволинейных системах координат и, кроме того, фактическое построение фундаментальных решений получаемых обыкновенных уравнений зачастую связано с большими трудностями, из-за чего эффективное решение получается лишь для весьма ограниченного числа контуров и поверхностей. Методами разделения переменных были определены величины НДС на поверхностях цилиндрических и сферических полостей в сплошных изотропных упругих массивах [1, 2].

Дальнейшее развитие в практике расчета подземных сооружений этот метод не получил, т.к. его применение было ограничено условием представления дифрагирующей поверхности в специальной системе координат. В силу жесткой привязки к специальным системам координат метод может быть применен только для решения задач дифракции на полостях с правильной канонической геометрией: бесконечно-длинных цилиндров, сфероидов и эллипсоидов. Выполнение решения задач дифракции с произвольной трехмерной геометрией методом разделения переменных не представляется возможным.

Среди аналитических методов можно выделить еще два - это метод функционально-инвариантных решений и метод Винера-Хопфа. Метод функционально инвариантных решений предложен В.И. Смирновым и С.Л. Соболевым [3, 4, 5], в дальнейшем он использовался в работах многих других авторов [6, 7, 8, 9]. Этим методом были решены задачи отражения плоских и сферических упругих волн плоскостью, а также задачи дифракции продольных и поперечных волн на клине [6, 7].

Для решения трехмерных задач В.И. Смирнов и С.Л. Соболев предложили использовать принцип суперпозиции. Решение волнового уравнения в трехмерном случае представляется через набор плоских решений, определенных в плоскостях, повернутых относительно плоскости (X, Z) на всевозможные углы λ. Ими предложена формула, которая связывает решение волнового уравнения в пространстве с двухмерным решением волнового уравнения. Если функция $U\ (X,\ Z,\ t,\ \lambda)$ удовлетворяет уравнению:

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = \partial^2 u/(c^2 \partial t^2), \quad (1)$$

где $X = x\cos\lambda + y\sin\lambda$, то функция

$u(x\cos\lambda + y\sin\lambda; z; t; \lambda)$

будет удовлетворять трехмерному волновому уравнению

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = \partial^2 u/(c^2 \partial t^2), \quad (2)$$

также удовлетворяет уравнению (1).

Применение метода Смирнова - Соболева дает хорошие результаты при решении осесимметричных задач дифракции. Использование метода для решения задач дифракции на полостях с произвольной трехмерной геометрией приводит к неразрешимым трудностям по установлению зависимостей между граничными условиями пространственного и вспомогательного состояний. Метод Смирнова - Соболева в отличие от метода разделения переменных позволяет расширить область решаемых задач задачами дифракции на клине. Однако задачи дифракции на полостях произвольной трехмерной геометрии в настоящее время этим методом решить не представляется возможным.

Метод Винера-Хопфа первоначально был предложен для решения интегральных уравнений [10, 11]. Затем стал применяться при решении задач дифракции, задач для трещин и штампов. В этом направлении исследования проводились в работах: E. N. Fox, С.И. Франкля, Е.А. Карповича, J. Mrles, Л.М. Флитмана, А.Я. Сагомоняна, В.Б. Поручикова, Е.А. Красильщикова, Е.Ф. Афанасьева, В.В. Замышляева, Ю.С. Яковлева, А.Г. Багдоева, М.Ш. Исраилова и др. Однако пока в замкнутом виде не удалось получить решение для пространственного случая. А при рассмотрении сложных смешанных граничных условий не удалось получить решение и в плоском случае.

Широкое применение при решении нестационарных динамических задач нашли методы интегральных преобразований [12, 13, 14].

При применении аппарата преобразований волновое уравнение в частных производных сводится к обыкновенному с помощью последовательного умножения всех его членов на ядро некоторого интегрального преобразования и последующего интегрирования в соответствующих пределах. Российские и зарубежные исследователи применяли аппарат преобразований для решения нестационарных задач дифракции. После применения аппарата преобразований нестационарный процесс сводится к известному стационарному случаю и далее выполняется решение с применением метода разделения переменных.

Чтобы преодолеть свойственные методу разделения переменных ограничение на геометрию полости, некоторые авторы используют аппарат преобразований в сочетании с численными методами [15, 16, 17]. Однако, выполнив решение в изображениях необходимо вернуться к исходному состоянию, то есть провести обратное преобразование, проведение обратного преобразования вызывает у исследователей большие затруднения. По мнению А.Н. Тихонова применение аппарата преобразований считается некорректным [18]. Сложность и громоздкость аппарата преобразований существенно ограничивает круг решаемых задач, сводя их к задачам дифракции на бесконечно-длинных цилиндрах, сфероидах и эллипсоидах.

Анализ аналитических методов решения показывает, что их применение для решения задач дифракции на полостях произвольной трехмерной геометрии в настоящее время является невозможным.

В настоящее время, в связи с широким внедрением вычислительной техники в практику проведения расчетов, наметилось два основных направления, по которым проводятся исследования задач нестационарного взаимодействия волн с полостями.

Первое направление связано с развитием численных методов при соответствующей дискретизации задач с применением ЭВМ на всех этапах решения. Развитие этого направления зависит от развития возможностей вычислительной техники, то есть точность расчётов и описание геометрии подземных сооружений и его окрестностей ограничивается возможностью компьютеров.

Основные результаты, полученные за последние годы в Российской Федерации и других странах, относятся ко второму направлению, которое связано на первом этапе решения задач с применением аналитических методов (методы разделения переменных, методов интегральных преобразований, методов теории возмущения, метода сведений к интегральным уравнениям и др.) и на заключительных этапах решения с использованием ЭВМ.

Применение численных методов в сочетании с аналитическими методами, а также сочетание разных численных методов позволяет решать сложные задачи дифракции, которые обычными методами не решаются.

Для проведения расчетов на ЭВМ используются различные сеточные и вариационные методы (коллокаций, Ритца, Бубнова-Галеркина, Треффца, метод конечных элементов), факторизационные методы (парциальных откликов, квадратур, Годунова, Микеладзе Ландоша), метод характеристик и др.

Наибольшее применение при расчетах подземных сооружений на действие нестационарных динамических нагрузок нашли методы конечных элементов и конечных разностей.

В методе конечных разностей дифференциальные уравнения высокого порядка представляются через выражения более низкого порядка в окрестных точках. При использовании конечноразностных выражений большую сложность у исследователей вызывает представление граничных условий. Для решения трехмерных задач разбиению подвергается весь околовыработочный объем, в результате чего время счета значительно увеличивается. Поэтому, практическое применение этой и аналогичных методик, использующих конечноразностные выражения, для решения задач сложной трехмерной геометрии даже на нынешнем этапе развития вычислительной техники является сложной проблемой.

Большое распространение при решении задач механики сплошных сред получил метод конечных элементов (МКЭ). Для расчётов строительных конструкций в трехмерной постановке широкое распространение получили МКЭ пакеты «Лира», «СКАД», «Ансис» и другие, однако все расчёты выполняются в статической, эквивалентно-статической или динамической стационарной постановке.

Внедрению и развитию МКЭ применительно к решению сложных нестационарных динамических задач механики подземных сооружений посвящены работы Синицына А.П., Самарина В.В., Королева Г.Д., Макеева В.К., Орленко А.И., Дружинина А.И., Коростелева С.П., Круцана В.С., Поздеева В.В., Пескова А. В. и др. [19]. С применением МКЭ ими были решены нестационарные динамические задачи как в линейной, так и в нелинейной постановке. однако при этом рассматривались двумерные, либо осесимметричные задачи. Применение МКЭ для решения трехмерных задач дифракции, также как и метод конечных разностей (МКР) приводит к увеличению времени счета на ЭВМ. Это связано с тем, что дискретизации подвергается все околовыработочное пространство, влияющее на процесс взаимодействия волновой нагрузки с подземной полостью, что приводит к большому росту дискретных элементов и увеличению времени счета.

Существенно сократить время счёта позволяет метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). Метод дает возможность на основе решения, выполненного на граничной поверхности области, получить решение для всех остальных точек околовыработочного массива.

Получение решения для всего массива на основе граничного решения позволяет на порядок сократить число дискретных элементов и тем самым существенно уменьшить время счета. Суть метода состоит в том, что искомая функция представляется через формулу Грина-Остроградского, позволяющей связать решение в объеме - с решением на поверхности [20].

Основополагающие работы в области ГИУ были сделаны Купрадзе В.Д., Михлиным С.Г., Сретенским П.Н., Бурчуладзе Т.В., Гегелия Т.Г., Мусхелишвили Н.И., Гюнтером Н.М., Шерманом Д.И. и др.

Дальнейшее развитие и практическую реализацию метод ГИУ нашел в работах Ю.В. Верюжского, Н.М. Хуторянского, Ю.Д. Копейкина, В.З. Партона, П.И. Перлина, И.А. Кильчевского, А.Л.Синявского, Э.С. Венцеля, Г.Б. Ковнеристова, Ш.М. Айталиева, Н.Б. Жанбырбаева, А.С. Стулова, В.В. Турилова, В.В. Самарина, В.В. Савицкого, И.Вусатюк, А.Я .Петренко, П.П. Павлова и др..

Большинство задач в трехмерной постановке с применением ГИУ были выполнены в статической постановке. Так Ю.В. Верюжским был предложен численно-аналитический метод потенциала . На основе этого метода группой авторов во главе с Ю.В. Верюжским были разработаны пакеты прикладных программ "Потенциал", позволяющие определить НДС для пространственных тел при статическом нагружении. П.П. Павловым были внесены в пакет программ изменения, дающие возможность определять НДС в окрестности камерностолбовой выработки в квазистатической постановке.

При решении задач нестационарной динамики с применением ГИУ известно несколько подходов. Наибольшее распространение получили метод запаздывающих потенциалов Кирхгофа и метод ГИУ в сочетании с методами преобразований по Лапласу и Фурье. Одной из первых работ в которой задача дифракции решена с применением интегральной формулы Кирхгофа и приведены результаты численного счета была работа М. Фридмана и Р. Шоу. Решая задачу дифракции акустического импульса на жестком цилиндре квадратного поперечного сечения, авторы получают интегральное уравнение, связывающее давление в произвольной точке пространства с запаздывающем значением давления и его производных на поверхности цилиндра. Распределение давления по поверхности препятствия определялось численно, путем аппроксимации интегралов двойными рядами. Сравнение полученных результатов с известным решением на бесконечном клине показывает их хорошую сходимость.

Ко и Карлсон исследовали взаимодействие плоской ступенчатой волны сжатия с круговой цилиндрической преградой, находящейся в упругой среде. Преграда принималась жесткой, неподвижной и имеющей конечную длину. Падающая волна перемещалась в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. С помощью теоремы Кирхгофа для производных потенциальной функции перемещения в поле рассеяния и на границе цилиндра строятся уравнения в поверхностных интегралах. Решение для фронта волны в освещенной зоне цилиндра тождественно решению, полученному с помощью высокочастотного анализа фронта волны. Получены, как граничные значения напряжений в теневой зоне, так и начальное распределение напряжений на фронте волны на границе между освещенной и теневой частями. Интегральные уравнения для граничных значений напряжений в освещенной и теневой зонах сводятся к системе линейных матричных уравнений, которые могут решаться последовательно, а потому удобны для численного решения. Численные методы, развитые в этой работе, могут быть использованы при решении задач дифракции волн на преградах произвольной геометрии.

В работе Ко рассматривается рассеяние плоского волнового импульса сжимающих напряжений бесконечно-длинным упругим круговым цилиндром, заключенным в упругую среду. Для вывода одной системы уравнений, с помощью которой можно получить не только решение для волнового фронта, но и решение для дифракции при более быстром и более медленном распространении падающей волны по сравнению с преломленной волной внутри препятствия, используется метод запаздывающих потенциалов Кирхгофа.

Применяется формула Кирхгофа и для решения задач дифракции и излучения в акустических средах на бесконечно длинных телах [20]. Известно использование метода Кирхгофа для решения задач дифракции волн на цилиндрических слабоотражающих оболочках произвольного поперечного сечения.

В работе А.С. Стулова задача дифракции акустического импульса на упругом эллиптическом цилиндре сводится к системе интегральных уравнений, которая решается численно. В качестве примера приводятся зависимости давления от времени в отраженных импульсах, вычисленные для эллиптических цилиндров из различных материалов.

Были получены величины давления жидкости как на границе с цилиндром, так и на удалении от него. Процесс взаимодействия волны с цилиндром выражался через систему пяти интегральных уравнений от продольного и поперечного потенциалов. Интегральные уравнения при численном решении представлялись через двойные схемы потенциалов на заданных отрезках сечения цилиндра в определенные промежутки времени с запаздыванием. Решение системы организуется последовательно, начиная с первого шага - это дает возможность упростить численную реализацию задачи и ускорить время счета.

С применением метода запаздывающих потенциалов Кирхгофа рассматривалось решение и стационарных задач дифракции упругих волн на препятствиях произвольной формы. В этих работах Р. Банаеф и В. Голдсмит, также использовали систему интегральных нерегулярных уравнений через упругие потенциалы.

Для случая дифракции плоской волны сжатия на абсолютно жестком круговом цилиндре показывается, что результирующее рассеяное поле хорошо согласуется с полем, полученным методом разложения в ряды. В качестве примера приводятся численные результаты решения задачи дифракции упругих волн на абсолютно жестких и мягких эллиптических цилиндрах и цилиндре с сечением в виде трехлепестковой розы.

Из рассмотренных выше примеров видно, что применение метода запаздывающих потенциалов Кирхгофа для решения задач стационарной и нестационарной динамики ограничен только задачами взаимодействия волн с бесконечно-длинными сплошными телами. Для решения задач взаимодействия волн с трехмерными полостями необходимо получить систему интегральных уравнений с учетом трех потенциальных функций: одного продольного и двух поперечных потенциалов.

Н.М. Хуторянский использовал метод запаздывающих потенциалов Кирхгофа в сочетании с формулой Сомилианы для решения существенно трехмерных задач нестационарной динамики. Метод получил наименование - метода гранично-временных интегральных уравнений (ГВИУ). Использование в методе ГВИУ известных фундаментальных решений ограничивает круг задач только областью применимости данного фундаментального решения. Кроме того, численная реализация интегральных уравнений выполняется по более сложной схеме, чем в прямом методе Кирхгофа, а это приводит к росту времени счета на ЭВМ.

Помимо метода запаздывающих потенциалов Кирхгофа для решения динамических задач с использованием граничных интегральных уравнений применяются методы интегральных преобразований. Так, Ж.Б. Жанбырбаев, Ш.М .Айталиев и Л.А. Алексеева, применяя аппарат интегральных преобразований Лапласа, решали задачи дифракции волн на бесконечно-длинных круговых и эллиптических цилиндрах. Решение трехмерных задач дифракции с применением интегральных преобразований не выполнялось, очевидно, это связано с большими трудностями, возникающими при использовании аппарата интегральных преобразований.

Анализ работ, выполненных методом граничных интегральных уравнений (МГИУ), позволяет заключить, что в настоящее время получены результаты, показывающие его практическую пригодность и широкие возможности. Таким образом, для решения нестационарных динамических задач взаимодействия сейсмовзрывных волн с полостями можно выделить два главных метода:

1. С применением формулы запаздывающих потенциалов Кирхгофа.

2. С применением интегральных преобразований.

Причем первое направление можно в свою очередь разбить еще на два:

1. С применением формулы запаздывающих потенциалов Кирхгофа напрямую через потенциальные функции.

2. С использованием формулы Сомилианы.

Применение прямого метода запаздывающих потенциалов Кирхгофа даёт более простую численную схему, т.к. в этом методе не применяются фундаментальные решения и поэтому не существует ограничений по классу рассматриваемых задач. Методика применения метода запаздывающих потенциалов Кирхгофа, разработанная автором, будет описана в следующей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка. 1978, 307 с.

2. *Кубенко В.Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. - Киев: Наукова думка. 1979, 181 с.

3. *Смирнов В.И., Соболев С.Л.* О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой, симметрии. - Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1933, № 29, с. 43-51.

4. *Соболев С.Л.* Теория дифракции плоских волн. - Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1934, №41. - 23 с."

5. *Соболев С.Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний. - В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. 4.2. Л.-М.: ОНТИ, 1937, Гл. XП, с. 468-617.

6. *Нарышкина Е.А.* Колебания полупространства при любых начальных условиях. - Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1934, № 45, с. 71-97.

7. *Филиппов А.Ф.* Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. - ПММ, 1956, т. 20, вып. 6, с. 688-703.,

8. *Филиппов А.Ф.* Пространственная задача дифракции упругой волны остром ребре. - ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 691-696.

9. *Костров Б.В.* Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва. - ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 644-652.

10. *Фок В.А.* О некоторых интегральных уравнениях математической физики. - ДАН СССР, 1942, т. 36, № 4-5, с. I47-I5I.

11. *Фок В.А.* О некоторых интегральных уравнениях математической физики. - Мат. сб., 1944, т. 14, № 1-2, с. 3-50.

12. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лемба в случае полупространства. - Уч.зап. ЛГУ, сер. мат., 1950, 1 № 35, вып. 21, с. 71-II8.

13. *Петрашень Г.И.* О рациональном методе решения задач динамической теории упругости в случае слоисто-изотропных областей с плоско-параллельными границами раздела. - Уч.зап. ЛГУ, сер. мат., 1956, №208, вып. 30, с. 5-59.

14. *Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. - Л.: Судостроение, 1980. - 344 с.

15. *Ройтфарб И.З., Чу Вьет Кыонг.* Численный метод решения пространственных динамических задач теории упругости на основе метода потенциала. В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. XXIX. - К.: Будивельник, 1976, с. 22-28.

16. *Айталиев Ш.М., Жанвырбаев Н.Б.* Алгоритм решения задачи о нестационарной нагрузке на отверстие в плоскости методом ГИУ. Изв. АН Каэ ССР, Сер. физико-матем., 1984, № 5, с. 21-27.

17. *Ержанов Ж.С., Алексеева А.А., Жанкырбаев Н.Б.* Нестационарная дифракция продольной волны на выработке сводчатого профиля. В кн.: Механика подземных сооружений, Вып. 1986г,- Тула:

18. *Тихонов А.Н.* О некорректно поставленных задачах. - "Вычислительные методы и программирование". Вып. 8, 1967.

19. *Синицын А.П.* Метод конечных элементов в динамике сооружений. -М.: Стройиздат, 1978, 231 с.

20. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. - Л.: Судостроение, 1972, 347 с. ГИАБ

Коротко об авторе

Нигметов Г.М. – вед. научный сотрудник, кандидат технических наук, ВсерНИИГОиЧС