УДК 550.832

В.Н. Захаров, А.П. Аверин, С.А. Вартанов

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ЛУЧЕВОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ ПРОГНОЗА НАРУШЕННОСТИ ВЫЕМОЧНОГО СТОЛБА *

Проводится сравнительный анализ алгоритмов сейсмической томографии применительно к исследованию нарушенности угольных пластов. Приводятся оптимальные условия применения и ограничения рассмотренных алгоритмов.

Ключевые слова: нарушенность угольных пластов, метод геотомографии, сейсмотомография, методы итерационного восстановления.

Семинар № 3

В практике решения важнейшей задачи шахтной сейсморазведки – прогноза нарушенности угольных пластов – с середины 80-х годов 20 века начали активно применяться программно-аппаратные комплексы на основе персональных ЭВМ для обработки данных полевых измерений, что позволило начать широкое использование одного из наиболее совершенных методов исследования внутренней структуры массива - томографии. К настоящему времени разработано большое количество методов и алгоритмов, реализующих принципы томографии применительно к указанным задачам. В этой работе приводится обзор и анализ методов геотомографии, наиболее часто используемых на практике.

Методы томографии можно разделить по следующим признакам:

- рабочая частота волн: ультразвуковая и сейсмоакустическая томография;
- лучевые траектории: прямолинейные и криволинейные;
- регистрируемые параметры волн: кинематические (скоростные) и динамические (амплитудные, частотные, энергетические).

В угольном пласте отклонение упругих характеристик (модуля упругости, модуля сдвига) для сейсмоакустических волн обычно не превышает 20-30% от средних значений, поэтому в большинстве случаев обратная задача может быть поставлена в предположении прямолинейности лучевых траекторий. В тоже время, в зонах тектонических нарушений и замещений угольного пласта боковыми породами необходимо учитывать кривизну сейсмоакустических лучей для уточнения координат области с резким изменением скорости упругих волн.

В простейших, с точки зрения интерпретации результатов измерений по методу сейсмоакустической томографии, случаях достаточно использовать кинематические параметры, такие как скорость распространения волн различных типов (головных, типа Лява, Рэлея). Однако, как показывают результаты исследований [6, 7, 16], весьма перспективным направлением следует считать применение ампли-

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №07-05-00718-а и №08-05-90437 – Укр-а

тудной сейсмотомографии, поэтому рассмотрим методы сейсмической томографии более подробно.

Используемые типы волн. Известно [2, 3, 4, 10, 22, 23, 24], что в угольном пласте распространяются волны следующих типов:

- объемные продольные, поперечные;
- головные;
- каналовые типа Лява и Рэлея.

В зависимости от решаемой задачи методом сейсмоакутической томографии могут применяться как отдельные типы волн, так и их комплекс.

В частности, для решения задачи прогноза нарушений в кровле угольного пласта применяются головные волны, а при анализе трещиноватости и смене литотипа пород в кровле – каналовые волны, обладающие дисперсией скорости от частоты. Объемные волны используются для оценки анизотропии свойств угольного пласта.

Сущность задачи сейсмоакустической томографии. Задача сейсмоакустической томографии сводится к решению системы уравнений для лучей, пересекающих N блоков массива под различными углами и различной длины. Рассмотрим простейшую систему уравнений:

$$t_i = \int_L \frac{ds}{C(s)}, i = 1,...,N \qquad (1)$$

где i- номер луча, t_i – полное время вдоль луча для первого вступления волны, $C(s)$ – скорость распространения волны в массиве размерности $[1 \times N]$, L – кривая, совпадающая с лучевой траекторией.

Данная система может быть сведена к системе алгебраических уравнений, в общем случае нелинейной при криволинейных лучевых траекториях. При выполнении вычислений интегралов вида (1) используют их приближённые значения. Рассмотрим систему уравнений:

$$t_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta s_j}{C(s_j)}, i = 1,...,N \qquad (2)$$

Она получена из системы уравнений (1) заменой интегралов на их приближенные значения по формулам метода прямоугольников. Как правило, в задачах такого типа подынтегральную функцию разлагают в ряд по базисным функциям [10].

Существуют два основных способа решения системы уравнений (1): решение системы интегральных уравнений и решение в первом приближении системы линейных алгебраических уравнений (2).

Система уравнений (1) также может быть записана в виде:

$$t_{ij} = \int_L \frac{ds}{C(s)}, i = 1,...,M, j = 1,...,N \qquad (3)$$

или

$$t_{ij} = \int_L m(s) ds \qquad (4)$$

где i – номер источника, j – номер сейсмоприёмника, $m(s)$ – медленность (величина, обратная скорости: $m(s) = {}^{1}\!/_{C(s)}$).

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Задачи сейсмоакустической томографии очень часто сводятся к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Поэтому необходимо рассмотрение основных методов решения СЛАУ.

Методы исключения. Одним из наиболее ранних и известных методов последовательного исключения неизвестных является метод Гаусса [8].

Рассмотрим задачу: по известной матрице $\|A_{ij}\|$ и вектору правой части $\|B_i\|$ найти неизвестный вектор $\|X_j\|$, т.е. AX=B.

Идея метода Гаусса заключается в преобразовании матрицы $\|A_{ij}\|$ к треугольному виду с элементами, расположенными выше ее диагонали, с помощью наибольшего ведущего делителя. При этом последнее уравнение имеет элементарное решение $X_N = B_N / A_{NN}^T$.

Возвращаясь обратным ходом вверх, последовательно находим весь вектор $\|X_j\|$.

Главное неудобство метода Гаусса заключается в невозможности решения СЛАУ при несоответствии числа уравнений числу неизвестных (то есть в том случае, когда матрица системы вырождена, т.е. $\det A = 0$), либо если в процессе преобразований получаем уравнение, в котором коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член не равен нулю.

Использование правила Крамера для решения такой системы крайне неэффективно и медленно (требуется найти N определителей матриц размерности $N \times N$). Кроме того, определитель системы d должен быть отличен от нуля ($x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{N,j-1} & b_N & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

то есть определитель матрицы, полученной из A заменой j-ого столбца на вектор правой части B, а $\Delta = \det A$).

Иной вывод правила Крамера связан с нахождением обратной матрицы A^{-1}, что дает решение $X = A^{-1}B$ при $\det A \neq 0$ и вычисления идут быстрее.

Для решения СЛАУ с плохо обусловленной матрицей часто используется метод исключения типа ортогонализации, предложенный А.А. Абрамовым [1]. При этом процесс исключения при фиксированной точности завершается преждевременно. Недостатком этого метода является невысокая скорость – она ниже скорости методов типа Гаусса и поэтому его следует применять в том случае, когда известно, что фактическое число шагов существенно меньше полного числа шагов.

Итерационные методы решения СЛАУ. При решении задач, в которых все величины, в том числе коэффициенты и свободные члены, известны лишь приближенно, методы Гаусса и обратной матрицы неприменимы, так как приводят к результату с плохой точностью. Однако многие задачи, в том числе обратные задачи сейсмоакустической томографии, являются некорректно поставленными задачами. Из трёх условий корректно поставленной задачи в них наиболее часто нарушается условие устойчивости, то есть соответствия малым ошибкам исходных данных малых ошибок решения. Поэтому для решения задач, сводящихся к СЛАУ, были разработаны итерационные методы, основанные на последовательном приближении неизвестных при решении некорректно поставленных задач [17-20].

Одним из таких итерационных методов является минимизация функционала Тихонова методом сопряженных градиентов [20]. В этом методе строится приближенное решение уравнения:

$AZ = U$,

где Z и U определены в гильбертовом пространстве, т.е. с интегрируемым квадратом модуля, А- линейный либо нелинейный оператор. Кроме того, вводится в рассмотрение сглаживающий функционал:

$M^{\alpha}[Z] = \|A \cdot Z - U_{\delta}\|_D^2 + \alpha\|Z\|_D^2$, где $\alpha > 0$ - параметр регуляризации. Затем отыскивается минимум функционала методом сопряженных градиентов.

Рассмотрим функционал невязки $\varphi(z) = \|A \cdot z - u_{\delta}\|_D^2$, преобразуемый к виду: $\varphi(z) = (z, Qz) + (d, z) + e$, т.е. формируется матрицу $Q = A^* A$ и вектор $d = 2 \cdot A^* u_{\delta}$

Минимизация начинается с произвольной допустимой точки множества D и проводится в N - мерном пространстве R^n методом сопряженных градиентов [20]:

Вначале, для 1 итерации направление спуска вычисляется как $p^{(k)} = -grad\varphi(z^{(k)})$, для последующих итераций

$$p^{(k)} = -grad\varphi(z^{(k)}) + \frac{\|grad\varphi(z^{(k)})\|^2}{\|grad\varphi(z^{(k-1)})\|^2} \cdot p^{(k-1)}.$$

Определяется

$$a_k = \frac{1}{2}\frac{(grad\varphi(z^{(k)}), p^{(k)})}{(Qp^{(k)}, p^{(k)})},$$

т.е. величина оптимального шага вдоль этого направления. Определяется $a_{\max}$ - величина максимально возможного шага вдоль найденного направления $p^{(k)}$, не выходящего за границу множества D.

Если $a_k \le a_{\max}$, то

$z^{(k+1)} = z^{(k)} + a_k \cdot p^{(k)}$, иначе

$z^{(k+1)} = z^{(k)} + a_{\max} \cdot p^{(k)}$

и переход на метод проекции сопряженных градиентов. Останов итерационного процесса происходит либо по невязке, либо по норме градиента.

Необходимо заметить, что в случае нелинейных задач обобщенный принцип невязки для выбора параметра регуляризации неприменим. Поэтому параметр регуляризации α выбирается левее точки разрыва согласно принципу сглаживающего функционала [20]. Способы выбора параметра регуляризации в нелинейных задачах отражены в работах А.С. Леонова [11-15], рассмотревшего случай с приближенно заданным оператором А.

Достоинство методов типа сопряженных градиентов заключается в более высокой скорости сходимости по сравнению с методом условного градиента, что позволяет использовать их в более сложных итерационных методах решения обратных задач.

Неявный итерационный метод для решения СЛАУ с комплексной матрицей [9]

Рассмотрим следующую СЛАУ:

$(M + iQ)u = f$, где $u = u_{\mathrm{Re}} + iu_{\mathrm{Im}}$, $f = f_{\mathrm{Re}} + if_{\mathrm{Im}}$..

Комплексная матрица $M + iQ$ имеет вещественную и мнимую компоненты, которые симметричны, и соответственно положительно и неотрицательно определены:

$M = M^T > 0, \; Q = Q^T > 0.$

Тогда исходная комплексная задача сводится к системе линейных вещественнозначных уравнений типа $Au_{\mathrm{Re}} = \varphi, \; A = A^T > 0.$

Такая система уравнений решается быстро сходящимся методом с матрицей верхнего слоя $M + \alpha \cdot Q$ с оптимальным параметром α. Норма начальной погрешности уменьшается в $1/\varepsilon$ раз, $0<\varepsilon<1$, за $n=[0{,}57\cdot\ln(2/\varepsilon)]$ итераций. При этом число итераций ограничено сверху равномерно по норме $\sigma=\left\|M^{-1}Q\right\|$ мнимой компоненты матрицы, и все вычисления проводятся в вещественной арифметике. Таким образом, получен неявный итерационный метод:

$$(M+\alpha Q)\cdot\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau_{k+1}}+A\cdot u_k=\varphi,$$

$k=0,1,...n-1$, где u_0 - начальное приближение.

Методика томографической интерпретации результатов измерений. Алгоритмы обработки сейсмограмм

Обратное проецирование. Самый простой алгоритм, который широко применяется на практике. Алгебраическая запись его имеет вид:

$$A'_{mn}=\frac{1}{S_{mn}}\cdot\sum_{ij}A_{ij}\cdot S_{ijmn},$$

где A_{ij} – медленность или коэффициент поглощения-рассеяния для ij луча, $S_{mn}=\sum_{i,j}S_{ijmn}$ - сумма весовых коэффициентов для ячейки mn по всем используемым лучам ij, проходящим через данную ячейку, $S_{ijmn}=R_{ijmn}/R_{ij}$ - весовой коэффициент для ячейки mn, R_{ijmn} – отрезок луча ij, R_{ij} – длина луча ij.

Таким образом, обратное проецирование представляет собой обычное усреднение. Такой алгоритм заложен во многих пакетах прикладных программ.

Итерационное восстановление. Идея всех методов итерационного восстановления заключается в решении обратной задачи методом последовательных приближений. Последовательные приближения осуществляются по алгоритму А.Н.Тихонова [20]. Способ сведения интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений описан выше. Наиболее распространённым из методов этого класса является метод одновременного итерационного восстановления. Рассмотрим данный метод подробнее.

Пусть в начале было получено решение методом обратного проецирования. Будем считать это нулевой итерацией: $A'^{q}_{mn}=A'^{0}_{mn}=A'_{mn}$, где A'_{mn} получена на предыдущем шаге, а $\mathrm{q}=0$. Рассчитаем для q-й итерации модельное среднее параметра по каждому лучу:

$$A'^{q}_{ij}=\frac{1}{S_{ij}}\sum_{k,l}S_{ijkl}A'^{q}_{kl}\ .$$

После этого найдём расхождение между экспериментальным и расчётным лучевыми средними: $dA^{q}_{ij}=A_{ij}-A^{q}_{ij}$. Также введём среднеквадратическое расхождение для конкретной итерации:

$$M_q=\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i,j}\left(dA^{q}_{ij}\right)^2},$$ где N – количество лучей.

Если M_q устраивает нас, то итерационный процесс останавливается, и полученное значение A'^{q}_{mn} является решением (на практике также часто используется правило останова, связанное с разностью расхождений на соседних итерациях: процесс продолжается до тех пор, пока M_q-M_{q-1} не станет достаточно малой величиной).

В противном случае необходимо рассчитать сечение среднего расхождения:

$$dA'^{q}_{mn} = \frac{1}{S_{mn}} \sum A^{q}_{ij} \cdot S_{ijmn} \ .$$

После этого можно найти следующее приближение: $A'^{q+1}_{mn} = A'^{q}_{mn} + dA'^{q}_{mn}$, и перейти к следующей итерации.

Другие алгоритмы этого класса отличаются способами нахождения поправок dA'^{q}_{mn} (например, с помощью метода Гаусса решения СЛАУ). Также отличие может заключаться в остановке процесса, например, существуют алгоритмы итерационного восстановления, основанные на минимизации функции M_q.

К недостаткам данного метода можно отнести тот факт, что в случае вырождения системы уравнений функционал M_q может начать возрастать с ростом q, и решение будет удаляться от истинных значений.

Алгоритм суммирования разностей. Этот алгоритм представляет собой аналог свёртки обратной проекции (ОП) в алгебраическом представлении. Суть его заключается в коррекции сечения обратного проецирования. При этом предполагается уникальность (единственность) аномальных значений A_{mn} в каждой конкретной ячейке.

Рассмотрим, как и ранее, модельное лучевое среднее параметра:

$$A'_{ij} = \frac{1}{S_{ij}} \sum_{k,l} S_{ijkl} A'_{kl}$$

Определим для каждого луча лучевую сумму весовых коэффициентов по всем ячейкам за исключением ячейки mn:

$$S_{\tilde{ijmn}} = \sum_{\substack{i,j: \\ i \neq m, \\ j \neq n}} S_{ijkl}$$, и аналогичным образом рассчитаем лучевое среднее для всех ячеек, кроме mn:

$$A_{\tilde{ijmn}} = \frac{1}{S_{\tilde{ijmn}}} \sum_{\substack{k,l: \\ k \neq m \\ l \neq n}} S_{ijkl} A_{kl} \ .$$

Если предположить, что для каждого луча аномальные значения лучевого среднего связаны только с одной ячейкой, то можно записать величину этой аномалии как разность:

$$A_{mn} \cdot S_{ijmn} = A_{ij} \cdot S_{ij} - A_{\tilde{ijmn}} \cdot S_{\tilde{ijmn}} \ .$$

Если значительная часть рассматриваемого луча проходит вне рассматриваемого сечения (то есть $S_{ij} < 1$), то эта разность может оказаться достаточно большой из-за проходящей вне сечения части луча. В этом случае будем считать $S_{ij} = 1$.

Вычислим среднюю величину аномальных значений в ячейке mn по всем проходящим через неё лучам:

$$A''_{mn} = \frac{1}{S_{mn}} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - A_{\tilde{ijmn}} \cdot S_{ijmn} \right) \cdot S_{ijmn}$$

или, что эквивалентно,

$$A''_{mn} = \frac{1}{S_{mn}} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - A'_{ij} S_{ij} + S_{ijmn} A'_{mn} \right) S_{ijmn} .$$

Отметим, что второе соотношение позволяет построить более эффективный расчётный алгоритм, непосредственно использующий сечение ОП и корректирующий его.

Среди достоинств этого метода – его простота и высокая разрешающая способность. Однако он обладает существенным недостатком: сильная зависимостью от шага дискретизации, то есть от размера ячейки среды относительно существующих неоднородностей. Точность восстановления зависит от того, насколько соизмеримыми являются размеры элементарной ячейки и размеры исследуемых объектов.

Алгоритм коррекции ОП. Коррекция обратной проекции связана с обратной фильтрацией сечения [16, 21]. При этом само сечение обратной проекции рассматривается как результат фильтрации истинного сечения фильтром, к которому ищется обратный. После этого для восстановления истинного сечения производится обратная фильтрация найденного сечения. К недостатку метода относится зависимость от близости оценки сечения обратной проекции к действительному распределению свойств среды.

Заключение

Сравнение методов обработки экспериментально полученных сейсмограмм для восстановления значения параметров с точки зрения реализации на ПК позволило сделать вывод о том, что, по всей вероятности, одними из наиболее оптимальных методов являются методы итерационного восстановления, в частности, метод одновременного итерационного восстановления. Относительная простота реализации и хорошая точность полученного решения позволяют использовать этот метод для решения широкого класса задач сейсмотомографии. Этот метод был использован авторами в качестве базового при написании программного кода блока томографического восстановления программного комплекса итерационного линейного восстановления строения угольного пласта на основе данных сейсмопросвечивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А.А.* Об одном методе решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. //ЖВМ и МФ, 1991.Т.31, N 4.- С.483-491.
2. *Азаров Н.Я.* Шахтная сейсморазведка угольного пласта: Автореф. дис... докт. геол.-минер. наук / МГУ.- М., 1985.- 36с.
3. *Азаров Н.Я., Гильберштейн П.Г.* Интерференционные волны, используемые при сейсмопросвечивании угольных пластов // Прикладная геофизика.-М.: Недра, 1978. -Вып.92. -С.42-57.
4. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. - М.: Мир,1983. -Т.1. -519 с.
5. *Ефимова Е.А., Рудерман Е.Н.* Возможности применения цифровой томографии для интерпретации геофизических данных.- М.: ВИЭМС, 1982, 55 с., ил.- (Обзор ВИЭМС).
6. *Кабанихин С.И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. - С.131-143.
7. *Колонин А.Г.* Автоматическая обработка данных просвечивания // Передовой науч.-произв. опыт/ВИЭМС.-М., 1989.- Вып. 7.- С.3-6.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. - М: Наука. - 1975.-431с.
9. *Кучеров А.Б.* Быстрый итерационный метод решения в вещественной арифметике системы линейных уравнений с комплексной симметричной матрицей. //ДАН СССР, 1991. - Т.317, N 2.- С.294-296.
10. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны . -М.: Наука, 1973.- 176с.
11. *Леонов А.С.* О построении устойчивых разностных схем решения нелинейных краевых задач // ДАН СССР.-1975.- Т.224, N 3. - С.525-528.
12. *Леонов А.С.* Об алгоритмах приближенного решения нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором // ДАН СССР. -1979.- Т.245, N2.- С.300-304.

13. *Леонов А.С.* О выборе параметра регуляризации для нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором // ЖВМ и МФ. -1979.- Т.19, N 6. - С.1363-1376.

14. *Леонов А.С.* О связи метода обобщенной невязки и обобщенного принципа невязки для нелинейных некорректных задач // ЖВМ и МФ. - 1982. -Т.22, N 4. - С.783-790.

15. *Леонов А.С.* О некоторых алгоритмах решения некорректных экстремальных задач //Мат. сб.- 1986. -Т. 129(171), N 2. - С.218-231.

16. *Романов М.Е., Колонин А.Г.* Криволинейно-лучевая кинематическая и амплитудная сейсмотомография .-Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997.-40с.

17. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.// ДАН СССР, 1963.- Т.151, N 3.- С.501-504.

18. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач. // ДАН СССР, 1963.- Т.153, N 1.- С.545-548.

19. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. 2-е изд.- М.: Наука, 1979.- 288с.

20. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1990.- 232 с.

21. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии.- М.: Мир. 1983.- 353 с.

22. *Ямщиков В.С., Данилов В.Н., Вартанов А.З.* О волнах Лява в тонком цилиндрическом волноводе в массиве // Изв. АН СССР. Физика Земли. - 1986.- N 2.- С.108-111.

23. *Ямщиков В.С., Данилов В.Н., Вартанов А.З.* Особенности характеристик каналовых волн Лява в многослойном массиве //Изв. вузов. Горный журнал.-1986.- N 4. - С.1-5.

24. Krey T. Channel waves as a tool of applied geophysics in coal mining // Geophysics, 1963, 28, N 6, p. 701-712. ГИАБ

Коротко об авторах

Захаров В.Н. – доктор технических наук,
Аверин А.П. – кандидат технических наук,
Вартанов С.А. – УРАН Институт проблем комплексного освоения недр РАН,
e-mail: averin.andrey@gmail.com

Д И С С Е Р Т А Ц И И

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	Название работы	Специальность	Ученая степень
УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ЦЕНТР РАН			
МИШИН Дмитрий Юрьевич	Информационные геофизические модели и потоки данных в среде Грид	25.00.10	к.т.н.