

УДК 622.35

И.Н. Миков, И.Л. Мезенцева, В.И. Киреев

**ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ МОДЕЛИ
БАРЕЛЬЕФА НА ОСНОВЕ ПЛОСКОГО
ПОЛУТОНОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ
ДЛЯ ОБРАБОТКИ НА СТАНКАХ С ЧПУ**

Плоское полутоновое изображение, на основе которого воспроизводится модель поверхности барельефа, описано скалярным полем. Рассмотрено влияние параметров этого поля на форму поверхности модели барельефа, создаваемой для последующей обработки на станках с ЧПУ. Исследована последовательность скалярных полей, параметры которых определяют характер изменения формы поверхности барельефа на переходных участках. Предложены численные величины для оценки четкости и резкости при воспроизведении поверхности барельефа.

Ключевые слова: барельеф, полутоновое изображение, математическая модель.

Семинар № 25

**Принятые термины
и определения**

Рельеф (франц. relief) – скульптурное изображение на плоскости.

Барельеф (франц. bas-relief – «низкий рельеф») – скульптурное изображение на плоскости, в котором выпуклое изображение выступает над плоскостью фона не более чем на половину своего объема. Формально – скульптурное изображение, множество точек которого находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством точек некоторой области D координатной плоскости Oxy .

Для получения барельефа на твердом материале посредством механической обработки на станках с ЧПУ необходимо создать математическую модель его поверхности, по которой затем будет рассчитываться траектория движения инструмента. Математическая модель поверхности барельефа может быть воспроизведена на основе плоского полутонового черно-белого изображения.

Однотонная область такого изо-

брания в полной мере характеризуется коэффициентом отражения ρ :

$$\rho = \frac{F_{\text{отр}}}{F_{\text{пад}}},$$

где $F_{\text{отр}}$ – отраженный световой поток, $F_{\text{пад}}$ – падающий световой поток.

На практике обычно используется оптическая плотность полутонового изображения, которая характеризует степень почернения однотонной области изображения [5]:

$$U = \lg(1 / \rho)$$

Величина оптической плотности в реальном изображении изменяется от 0,03...0,04 (для светлых областей) до 1,6...3,0 (для темных областей).

Поскольку оптическая плотность изображения есть величина скалярная, ее целесообразно представить в виде плоского скалярного поля [1], определенного в области D координатной плоскости Oxy :

$$U = U(x, y), \quad (1)$$

где $(x, y) \in D$. Поверхность S барельефа является взаимно-однозначным отображением с плоского скалярного поля (1) в R^3 , т.е. $s: U \rightarrow S$, т.е. каждой точке поля соответствует единственная точка поверхности и каждой точке поверхности соответствует единственная точка поля. Это отображение реализуется, например, посредством аффинного сжатия поля (1) к координатной плоскости Oxy , т.е. $S = k \cdot U(x, y)$. Величина коэффициента сжатия k зависит от соотношения наибольшей и наименьшей величин оптической плотности изображения и заданной предельной разности высот барельефа, в частном случае $k = \pm 1$.

Исследование скалярного поля (1) позволяет на стадии проектирования барельефа выявить закономерности его формы и, при необходимости, ввести коррекцию оптической плотности исходного изображения.

Пусть функция (1) является непрерывной и, по крайней мере, дважды дифференцируемой.

Плоское скалярное поле имеет графическое представление в виде семейства линий уровня:

$$U^j(x, y) = b^j,$$

где $b^j = const$.

В каждой точке (x, y) скалярного поля (1) определяется значение градиента:

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j}. \quad (2)$$

Градиент скалярного поля есть вектор, который нормален к проходящей через точку (x, y) линии уровня и указывает направление наибольшего прироста функции (1), а модуль градиента определяет скорость этого прироста.

Каждой точке исходного скалярного поля (1) соответствует свой градиент, то есть имеется плоское векторное поле:

$$\text{grad}U = \bar{U}(x, y).$$

Поскольку каждой точке плоского векторного поля можно поставить в соответствие модуль вектора, совершаем переход к скалярному полю U_2 .

Модуль градиента (2):

$$U_2(x, y) = |\text{grad}U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \quad (3)$$

Выражение (3) описывает плоское скалярное поле.

Графически скалярное поле (3) представляется семейством линий уровня $U_2^j(x, y) = b^j$, где $b^j = const$. Однако, наиболее наглядное его представление – в виде полуточнового изображения, когда значения b^j берутся с достаточно малым шагом, что будет показано ниже на примерах.

Скалярное поле (3) в свою очередь в каждой своей точке имеет градиент:

$$\text{grad}U_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \vec{j}, \quad (4)$$

который в каждой точке (x, y) определяет направление наибольшего прироста скорости прироста функции (1), а модуль градиента – величину этого прироста. Выражение (4) определяет векторное поле.

Модуль градиента (4):

$$U_3(x, y) = |\text{grad}U_2| = \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)^2} \quad (5)$$

Выражение (5) описывает плоское скалярное поле. Графически скалярное поле (5) представляется семейством линий уровня $U_3^j(x, y) = b^j$, где $b^j = const$.

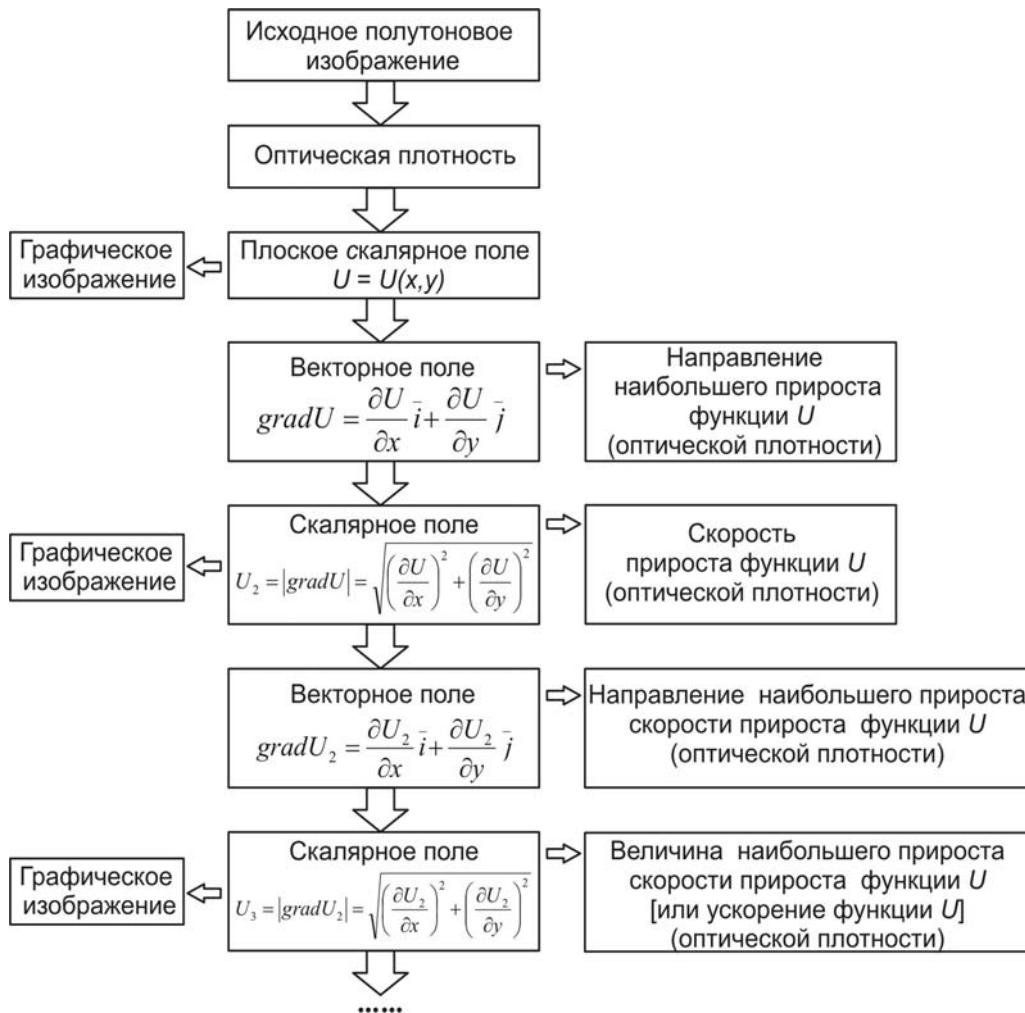


Рис. 1. Скалярные и векторные поля при анализе исходного изображения

Последовательность рассмотрения скалярных и векторных полей приведена на рис. 1.

Очевидно, что эта последовательность будет конечной, когда $U_i(x, y) = \text{const}$ для любых $(x, y) \subseteq D$ и, соответственно, $U_{i+1}(x, y) = 0$ для $(x, y) \subseteq D$.

Анализ выражений на рис. 1 позволяет сделать выводы относительно формы поверхности барельефа.

Объем материала, снимаемого при изготовлении барельефа, определяется выражением:

$$V = k \cdot \int_D (U_{\max} - U) d\sigma, \quad (6)$$

где U_{\max} – максимальное значение оптической плотности исходного изображения, U – текущее значение оптической плотности по зависимости (1).

Прежде всего, представляет интерес характер формы поверхности при $U_i = \text{const}$. Рассмотрим эти случаи (рис. 2).

Пусть $U = \text{const}$. Тогда $\text{grad}U = 0$ и результатом отображения s будет отсек плоскости $z = \text{const}$. Для такого участка барельефа в общем случае требуется двухкоординатная обработка.

Пусть $U_2 = \text{const}$. Из (3) следует

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = a, \quad (7)$$

где $a = \text{const}$.

Решение дифференциального уравнения (7) возможно существенно упростить, следя геометрической интерпретации градиента скалярного поля. Выражение (1) в R^3 описывает поверхность. В силу (7) такой поверхностью является плоскость, либо огибающая семейства плоскостей, для которых тангенс угла наклона к координатной плоскости Oxy равен a [4]. Линия ската плоскости параллельна градиенту. Огибающая в таком случае является прямым круговым конусом. Искомое скалярное поле U является центрально симметричным. Рассмотрим сечение этого скалярного поля координатной плоскостью $y = 0$. В этой плоскости $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$.

Тогда

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i}, \quad U_2 = |\text{grad}U| = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|,$$

Дифференциальное уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a, \quad \text{откуда} \quad U = a \cdot x + b.$$

Здесь b определяется из начальных условий, например, радиуса основа-

ния конуса в координатной плоскости Oxy . Поверхность барельефа будет прямым круговым конусом, в частном случае – наклонная плоскость. При рассмотрении произвольной точки $(x_t, y_t) \subseteq D$ следует сделать подстановку $x = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$.

Для такого участка барельефа требуется трехкоординатная обработка.

Важное значение при воспроизведении поверхности барельефа имеет **четкость – выделение небольших (по относительной площади) фрагментов поверхности**. Численно оценить четкость возможно величиной:

$$P_2 = \frac{1}{S_D - S_{D_p}} \int_{D_p} U_2 d\delta,$$

где D_p – область перехода от фона к небольшому фрагменту, S_D – площадь этой области.

P_2 определяет среднюю скорость изменения высоты рельефа на участке перехода D_p .

Рассмотрим случай, когда $U_3 = \text{const}$. Из (5) следует

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial y}\right)^2} = a, \quad (8)$$

где $a = \text{const}$.

Решение дифференциального уравнения (8) упростим аналогично предыдущему случаю.

$$\text{Тогда } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a.$$

$$\text{Отсюда } \frac{\partial U}{\partial x} = a \cdot x + b$$

$$\text{и } U = 0,5 \cdot a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

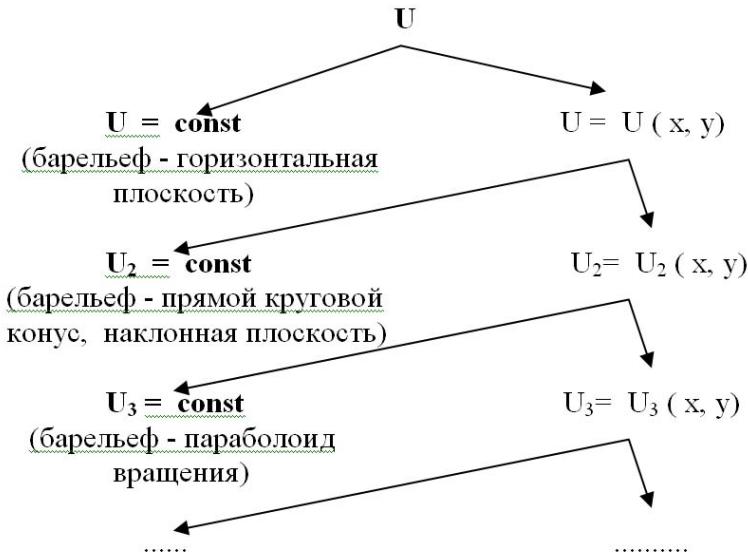


Рис. 2. Поверхности барельефа для некоторых случаев скалярных полей

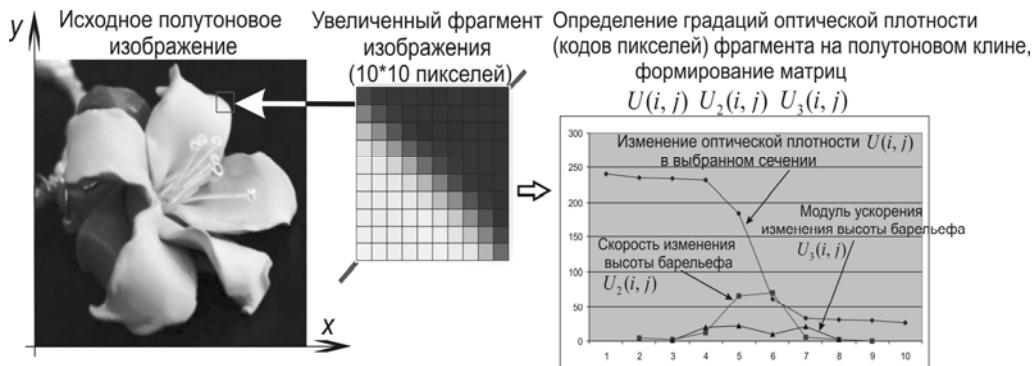


Рис. 3. Пример обработки полуточнового изображения общего вида

Подберем систему координат таким образом, чтобы параметры $b = 0$ и $c = 0$. Тогда поверхность барельефа будет параболоидом вращения. При рассмотрении произвольной точки $(x_t, y_t) \subseteq D$ следует также сделать подстановку $x = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$.

Важное значение при воспроизведении поверхности барельефа имеет **резкость – выделение границ между смежными фрагментами по-**

верхности барельефа, отличающимися высотой рельефа. Численно оценить резкость возможно величиной:

$$P_3 = \frac{1}{S_D} \int_{D_p} U_3 d\delta,$$

где D_p – область перехода между смежными фрагментами, S_D – площадь этой области^{\$} P_3 определяет

среднее ускорение изменения высоты рельефа на участке перехода D_p .

В силу сложности реальных полутоновых изображений, используемых для воспроизведения поверхностей барельефов, моделирование скалярных полей в общем случае возможно посредством представления исходного изображения в виде совокупности наименьших логических элементов – пикселей. Каждому пикселию изображения ставится в соответствие значение оптической плотности на полутоновом клине [3], при этом клин имеет 16 градаций оптической плотности, что в кодах пикселей соответствует диапазону от 0 до 255. Таким образом, строим матрицу уровней для исходного полутонового изображения:

$$U(i, j) = \begin{vmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & U_{1,j} \\ U_{2,1} & U_{2,2} & \dots & U_{2,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{i,1} & U_{i,2} & \dots & U_{i,j} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Матрица $U(i, j)$ является дискретным представлением исходного полутонового изображения и является аналогом описания (1). Для определения модуля градиента находим первые прямые разности значений уровней пикселей как аналогов $\frac{\partial U}{\partial x}$ и

$$\frac{\partial U}{\partial y}:$$

$$\Delta U_x(i, j) = U_{(i, j+1)} - U_{(i, j)},$$

$$\Delta U_y(i, j) = U_{(i+1, j)} - U_{(i, j)}.$$

При этом шаг по осям координат считаем равным единице. Тогда модуль градиента примет значение:

$$U_2(i, j) = |gradU| = \sqrt{(\Delta U_x(i, j))^2 + (\Delta U_y(i, j))^2}.$$

Матрица $U_2(i, j)$ является дискретным представлением скалярного поля (3). Анализируя эту матрицу, на барельефе можно выделить области перехода между фрагментами поверхности с различной высотой и оценить скорость этого перехода.

Для определения модуля градиента $U_3(i, j)$ находим вторые прямые разности значений уровней пикселей как аналогов $\frac{\partial U_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_2}{\partial y}$:

$$\Delta^2 U_x(i, j) = \Delta U_x(i, j+1) - \Delta U_x(i, j),$$

$$\Delta^2 U_y(i, j) = \Delta U_y(i, j+1) - \Delta U_y(i, j).$$

Соответственно,

$$U_3(i, j) = |gradU_2| = \sqrt{(\Delta^2 U_x(i, j))^2 + (\Delta^2 U_y(i, j))^2}.$$

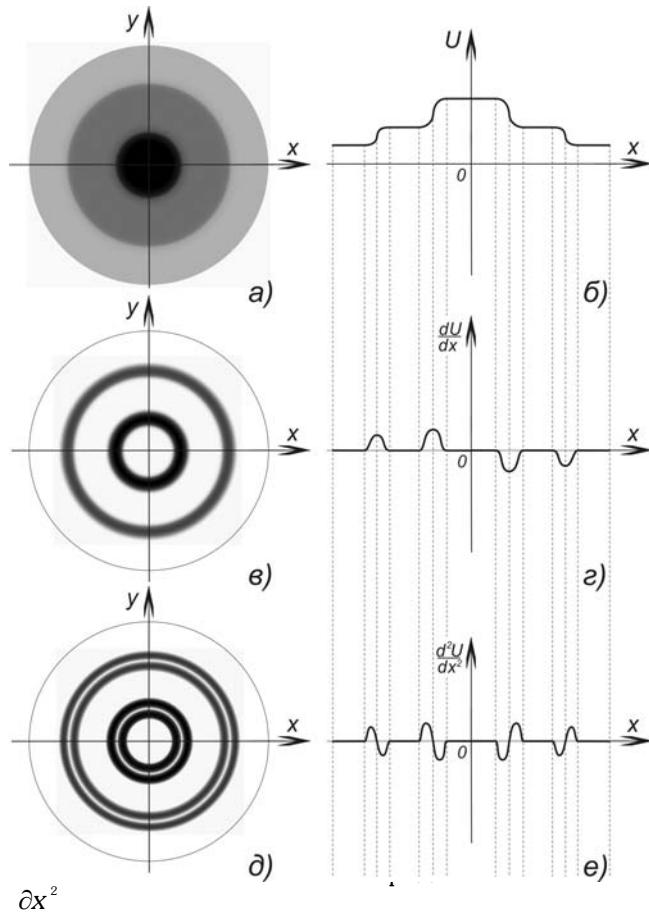
Применительно к матрице (9) используются известные методы обработки изображений [2].

На рис. 3 показан пример обработки полутонового изображения общего вида.

Рассмотрим некоторые частные виды исходных изображений, оптические плотности которых описываются аналитически.

Пусть исходное изображение описывается скалярным полем оптической плотности вида

$U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$. Полутоновое изображение этого поля приведено на рис. 4, а. Линиями уровня такого поля являются концентрические окруж-



склярное поле U_3 (рис. 4, д).

Рассмотрение склярных полей U_2 и U_3 позволяет определить области коррекции исходного изображения для повышения четкости выделения мелких фрагментов поверхности и резкости границ между смежными фрагментами. После определения границ областей коррекции для формы поверхности барельефа в координатной плоскости Oxy , проводится коррекция оптической плотности исходного изображения с помощью корректирующих функций для величин U_2 и U_3 , либо введением коэффициентов коррекции для величин U_2 и U_3 . Очевидно, что чем меньшее ко-

Рис. 4. Скалярные поля: а) исходное полуточковое изображение, б) сечение склярного поля $U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$, в) графическое изображение склярного поля U_2 , г) 1-я производная склярного поля U_2 в плоскости $y = 0$, д) графическое изображение склярного поля U_3 , е) 2-я производная склярного поля U_3 в плоскости $y = 0$

личество раз дифференцируема

функция (1), тем проще форма поверхности барельефа. Действительно, пусть (1) имеет вид $U = k \cdot y$ (рис. 5, а). Линии уровня такого поля приведены на рис. 4, б.

Тогда $\text{grad}U = k \vec{j}$,
 $U_2 = |\text{grad}U| =$,
 $= |k| = \text{const} \quad \text{grad}U_2 = 0$.

Скалярное поле U_2 графически показано на рис. 5, в, барельеф – на рис. 5, г. Барельеф представляет отсек плоскости, наклоненной к координатной плоскости Oxy .

Пусть склярное поле оптической плотности имеет вид

$$U = -\frac{U_0}{x_n} \sqrt{x^2 + y^2} + U_0 \quad (\text{рис. 6, а}).$$

Сечение склярного поля координатной плоскостью $y = 0$ приведено на рис. 6, б. В этой плоскости $\text{grad}U = -\frac{U_0}{x_n} \vec{i}$. В силу центральной

симметрии поля $U_2 = |\text{grad}U| = \frac{U_0}{x_n} =$

const, $\text{grad}U_2 = 0$.

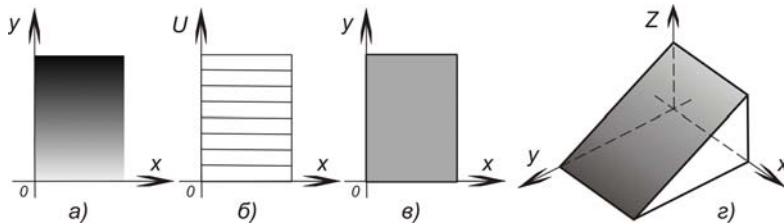


Рис. 5. Зависимость формы поверхности барельефа от исходного полутонового изображения: а) исходное полутоновое изображение, б) линии уровня скалярного поля $U = k \cdot y$, в) скалярное поле модуля градиента, г) поверхность барельефа

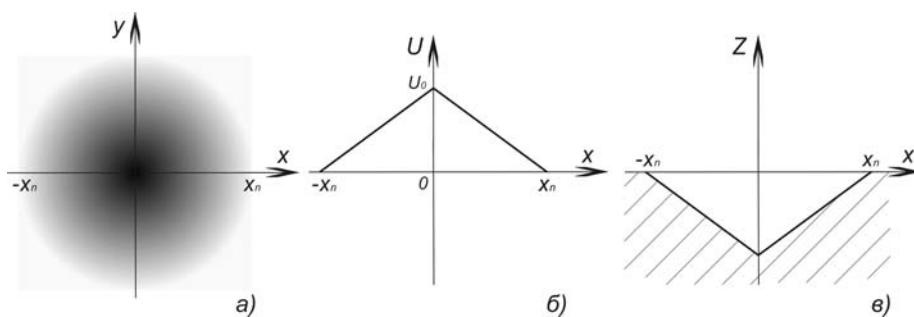


Рис. 6. Зависимость формы поверхности барельефа от исходного полутонового изображения: а) исходное полутоновое изображение, б) сечение скалярного поля $U = -\frac{U_0}{x_n} \sqrt{x^2 + y^2} + U_0$, в) сечение поверхности барельефа

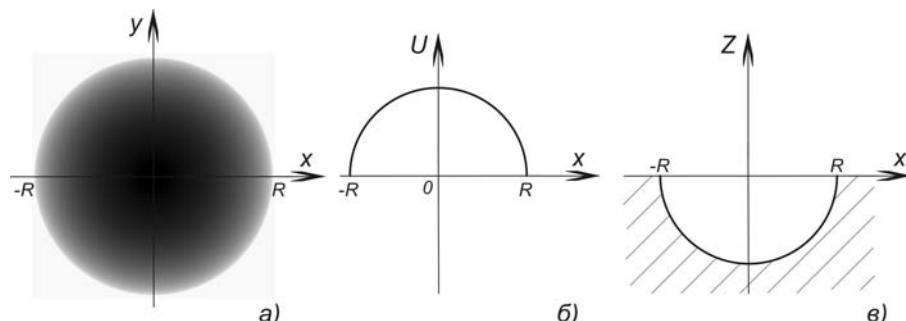


Рис. 7. Зависимость формы поверхности барельефа от исходного полутонового изображения: а) исходное полутоновое изображение, б) сечение скалярного поля $U = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, в) сечение поверхности барельефа

Барельеф представляет отсек прямого кругового конуса (рис. 6, в). Пусть скалярное поле опти-

ческой плотности имеет вид

$$U = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$
 (рис. 7, а).

чение скалярного поля координатной плоскостью $y = 0$ приведено на рис. 7, б.

В этой плоскости $\text{grad}U = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \vec{i}$.

В силу центральной симметрии поля $U_2 = |\text{grad}U|$,

$$\text{grad}U_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x} \vec{i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \vec{i} = -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{1.5}} \vec{i}.$$

При рассмотрении произвольной точки $(x_t, y_t) \subseteq D$ в этих зависимостях следует сделать подстановку $x = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$.

1. Бронштейн И.Н., Семеняев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1965. – 608 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.

Барельеф представляет отсек эллипсоида, в частном случае – сферы (рис. 7, в).

Таким образом, свойства последовательности скалярных полей определяют форму поверхности барельефа, а также позволяют получить количественные оценки ее изменения на переходных участках. Объективная оценка формы поверхности барельефа на стадии проектирования дает возможность избежать натурных экспериментов, повысить качество изделия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

3. ГОСТ 24930-81. Клин полутоновой для факсимильной аппаратуры. Технические требования.
4. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 608 с.
5. Орловский Е.Л. Передача факсимильных изображений. – М.: Связь, 1980. – 308 с.

ГЛАВ

Коротко об авторах

Миков И.Н. – доктор технических наук, профессор,
Мезенцева И.Л. – инженер, аспирант,
Киреев В.И. – доктор технических наук, профессор,
кафедра Технологии художественной обработки материалов,
Московский государственный горный университет,
Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru



О Т Р Е Д А К Ц И И

В Горном информационно-аналитическом бюллетене № 12, 2009 г., с. 171 в заголовке статьи «Роль Мосбасса в топливообеспечении центра России» следует читать:

© М.Н. Боднарук, 2009

М.Н. Боднарук

РОЛЬ МОСБАССА В ТОПЛИВООБЕСПЕЧЕНИИ ЦЕНТРА РОССИИ

M.N. Bodnaruk

На с. 173 коротко об авторе следует читать:

Боднарук М.Н. – студент кафедры ЭП, Московский государственный горный университет, Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru