© А.Р. Мартынюк, 2012

УДК 622.02

А.Р. Мартынюк

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Приведены результаты сравнительного анализа 9 классических и «неклассических» нелинейных упругих моделей. Эксперименты с учетом этих моделей показывают, что нелинейные эффекты, такие как статический и динамический модули образца, нелинейное затухание, скорости распространения волн, нелинейное затухание, медленная динамика (релаксация), гистерезисное поведение, дискретная память, амплитуда высших гармоник, сдвиг резонансной частоты, являются более чувствительными, чем линейные характеристики. Установлено, что практически все рассматриваемые модели базируются на гистерезисной модели Preisach-Mayergoyz (PM); это может быть использовано при конструировании альтернативной модели с учетом позитивных характеристик рассматриваемых моделей.

Ключевые слова: нелинейно-мезоскопическая упругость, нелинейность горных пород, моделирование, неоднородно-структурные материалы, гистерезис, дискретная память, высшие гармоники, отклик, затухание.

Существует обширный класс материалов, которые называются структурно нелинейными упругими материалами (мезоскопическими, или наноупругими). К таковым относится большинство горных пород. В них при деформации появляются такие нелинейные свойства, как гистерезис, дискретная память, сдвиг максимума резонансной кривой, нелинейное затухание, квадратичная зависимость для третьей гармоники и.т.д.

Другим классом материалов, называемых «классическими нелинейными», являются «обычные» материалы (стекло,монокристаллы и т.д.); их можно считать структурно-гомогенными. Нелинейные эффекты в них значительно отличаются от предыдущих «неклассических» материалов, в которых причиной нелинейности является структурная неоднородность (трещины, межзеренные контакты и т.д.), а во обычных — нарушения на атомарном уровне (ангармонизм в кристаллической решетке, скопление дислокаций и.т.д.)

Основополагающей математической моделью «классической» нелинейной среды является модель, предложенная Ландау Л.Д. и Лифшицем Е.М. [1]

Уравнение состояния в этом случае имеет вид:

$$\sigma = E(\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \delta\varepsilon^3 + \ldots), \qquad (1)$$

где σ — упругое напряжение, ε — деформация, E — модуль упругости. Безразмерные коэффициенты нелинейности β и δ составляют величины порядка нескольких единиц, т.е. нелинейные поправки по сравнению с линейными слагаемыми очень малы, но именно их наличием обусловлены такие явления как тепловое расширение, зависимость скорости упругих волн от механического напряжения и т.д. Однако, введение нелинейных слагаемых в уравнение Гука не может объяснить такие нелинейные явления как гистерезис, дис-

кретная память, медленная динамика (релаксация), увеличение амплитуды высших гармоник и т.д.

Поэтому для гистерезисных сред была предложена реологическая модель, которая предусматривает введение в уравнение состояния (1) слагаемого $\hat{S}\left[\varepsilon, sign(\dot{\varepsilon})\right]$, отвечающего за гистерезис. [2]

$$\hat{S} = \begin{cases} \varepsilon - \left(\frac{\beta_1}{2}\right)\varepsilon^2, \varepsilon > 0, \ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} > 0 \\ \varepsilon\left[1 - \frac{\varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2)}{2}\right] + \frac{\beta_2}{2}\varepsilon^2, \ \varepsilon > 0, \ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} > 0 \\ \varepsilon + \left(\frac{\beta_3}{2}\right)\varepsilon^2, \varepsilon < 0, \ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} < 0 \\ \varepsilon\left[1 - \frac{\varepsilon_0(\beta_2 + \beta_4)}{2}\right] + \frac{\beta_4}{2}\varepsilon^2, \ \varepsilon > 0, \ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где ε — деформация, а β_1, β_2 ,β_3, β_4 — коэффициенты нелинейности, которые могут быть выражены через модули Ландау A,B, C или коэффициенты Ламе и модули Мэрнагана.

К классическим нелинейным моделям относятся феноменологические вязкоупругие модели: тело Максвелла, Кельвина—Фойхта, стандартное линейное тело, оптимальное тело. [3] В этих моделях среда рассматривается как изотропная, однородная, а базовым слагаемым в уравнениях состояния этих моделей является уравнение Гука для идеальной среды.

Более универсальной является пространственная модель Preisach-Mayergoyz, которая успешно описывает нелинейно-упругое поведение структурно-неоднородных горных пород с дискретной памятью. Эта модель базируется на представлении, что упругие свойства в макроскопическом образце являются результатом интегрального отклика большого числа индивидуальных упругих элементов (примерно в количестве 10^{12} в 1 $см^3$ горной породы).[4] Такими дефектами являются микротрещины, межзеренные контакты, расслоения, поры, заполненные газом или жидкостью. Каждый упругий элемент может или не может демонстрировать гистерезисное поведение. Индивидуальные элементы группируются для последующего анализа в так называемом PM-пространстве.

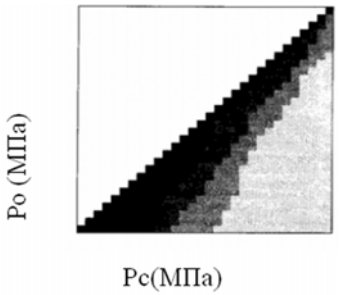

Рис. 1. Гистерезисные частицы с более темным, серым и светлым фоном имеют соответственно более высокую, среднюю и слабую степень гистерезиса

Каждый элемент характеризуется двумя параметрами длины (l_0, l_c) и двумя параметрами напряжения (σ_0, σ_c) причем l_0, σ_0 — означают параметры открытого элемента(например, микротрещины), а l_c и σ_c — параметры закрытого элемента.

Суть модели заключается в том, что из состояния (σ_0, l_0) элемент скачком переходит в состояние

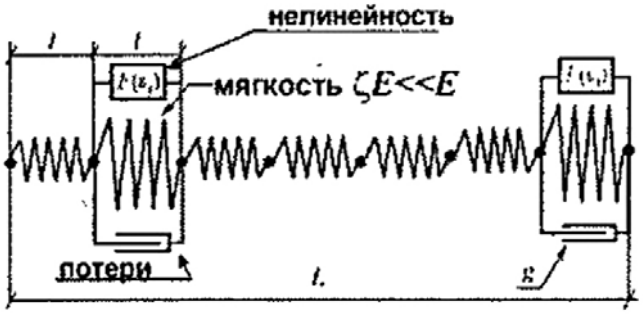

Рис. 2. Реологическая модель среды, с контрастно-мягкими дефектами-включениями, создающими нелинейность и диссипацию; *1* — потери

(σ_c, l_c). Все множество имеющихся гистерезисных элементов группируются по параметрам (σ_0, σ_c) в РМ-пространстве.

Гистерезисные элементы находятся ниже диагонали (рис.1), а негистерезисные – на диагонали, причем, чем дальше от диагонали удален элемент, тем больше у него гистерезис.

Плотность гистерезисных единиц в РМ-пространстве дается зависимостью $\rho(\sigma_c, \sigma_0)$ [2]:

$$\rho(\sigma_c, \sigma_0) = B(\sigma_0)\delta(\sigma_c - \sigma_0) + \alpha, \quad (3)$$

где δ есть дельта-функция, B — плотность в РМ пространстве негистерезисных элементов на диагонали, α — представляет распределение гистерезисных элементов в РМ-пространстве. Используя макроскопическую зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$, и компьютерные вычислительные программы (LISA), можно получить распределение гистерезисных частиц в исследуемом объеме горной породы, и выявить области с максимальной концентрацией дефектов(структурных нарушений). РМ-модель абстрактная, в ней за нелинейность отвечают абстрактные частицы (гистероны). В реальной, физической модели отвечает присутствие твердых и мягких фаз, причем объем последних значительно меньше твердой фазы, являющейся основной матрицей материала. Однако деформация на этих включениях значительна, и это является причиной нелинейного отклика. В одномерном варианте модель представляет собой цепочку элементов разной степени упругости (рис. 2) (модель Зайцева Ю.В.) В этой модели по аналогии с РМ вместо плотности гистерезисных элементов $\rho(\sigma_0, \sigma_l)$ вводится плотность дефектов ν. Элементы материала-матрицы зерна принимаются идеально упругими, подчиняющимися закону Гука, а дефекты (микротрещины, границы зерен и т.д.) являются вязкоупругими с различными значениями коэффициентов вязкости и модулей упругости.

Их состояние описывается уравнением [5]:

$$\sigma = \xi E(\varepsilon_1 + F(\varepsilon_1)) + g\frac{d\varepsilon_1}{dt}, \quad (4)$$

где ξ — коэффициент мягкости; ε_1 — деформация объекта; $F(\varepsilon_1)$ — функция, описывающая нелинейность среды дефекта $(F(\varepsilon_1) = \gamma^n \varepsilon_1^n)$.

Макроскопическая связь напряжение-деформация в рамках данной модели принимает простую зависимость:

$$\sigma = \varepsilon E_{eff}(1 + \varepsilon^{n-1}\gamma_{eff}^n), \quad (5)$$

где $\frac{E_{eff}}{E} = \frac{1}{1-\nu+\frac{\nu}{\xi}}$; $\frac{\gamma_{eff}^{(n)}}{\gamma^n} = \frac{1-\nu+\frac{\nu}{\xi^n}}{\left(1-\nu+\frac{\nu}{\xi}\right)^n}$. (6)

Здесь $\xi << 1$ и $\nu < \xi << 1$.

Для трещин показатель $\xi = 10^{-4}$. Сравнение рассматриваемой модели с моделью Кельвина—Фойхта, справедливой для однородной среды, показывает, что уровень нелинейности в первой на 4-6 порядков выше. Высокая чувствительность акустической нелинейности к появлению микроструктурных дефектов может быть использована в разработке способов неразрушающего контроля, сейсмического мониторинга.

Другой моделью, альтернативной РМ-модели, является модель M. Scalerandi и др., в которой принято в качесмтве основного элемента ячейка GBG (т.е. зерно-граница-зерно) (рис.3) [6]. В зависимости от упругого поведения зерен

и контакта между ними, ячейка GBG может быть линейно-упругой, классической нелинейной или неклассической нелинейной, и не ограничиваться только двумя скачкообразными состояниями («закрыто-открыто»).

Экспериментальные определения нелинейных показателей осуществляется с помощью известных статических и квазистатических зависимостей $\sigma = f(\varepsilon)$. Используются также и волновые методы, основанные на изменении фазы, амплитудно-частотной характеристики, модуляции и резонанса сейсмической волны, причем последний метод наиболее распространен. Экспериментальные резонансные исследования нелинейности позволяют получить целый комплекс показателей, которые в совокупности дают возможность судить о состоянии структурной неоднородности горной породы. По ассиметричности, по сдвигу максимума резонансных кривых можно оценить проявления гистерезиса даже при очень малых деформациях; кроме того, определяется влаго- и газонасыщенность породы и характер релаксации, а также измеряются амплитуды 2-й и 3-й гармоник, что является дополнительным показателем гистерезисности материала. Наконец, можно вычислять скорость пространственного затухания при низко- и высокочастотном возбуждении колебаний.

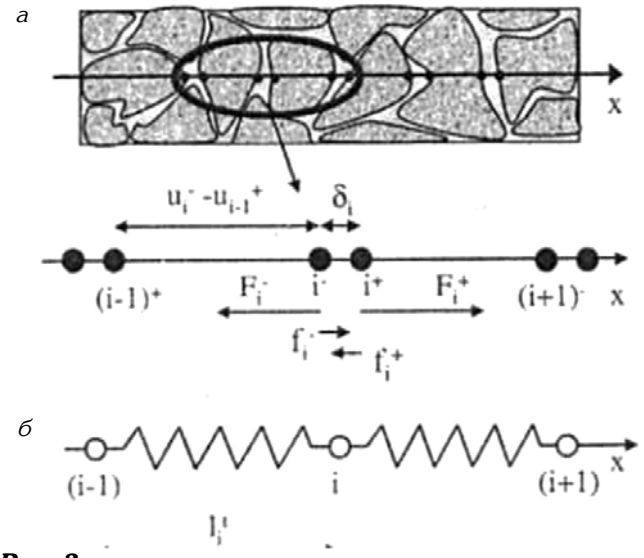

Рис. 3: *а* — одномерная модель гистерезисного элемента. Черные точки ограничивают межзеренные упруго-вязкие промежутки; *б* — упрощенная решетка модели. *u* — смещение; *F* — сила; *i* — порядковый номер подузла

Другое альтернативное направление теоретических моделей гистерезисного поведения и дискретной памяти в горных породах представлено работами, в которых рассматриваются хаотическая и ориентированная трещиноватость и напряженное состояние горного массива, динамическое развитие системы трещин с их заполнением газом или жидкостью. В этих моделях внимание уделено, в основном, характеру и развитию самой трещины (состоянию берегов трещины, ее ориентации относительно направления приложенного напряжения, состоянию вокруг трещины, в соответствии с критериями прочности и т.д.) [7] В противоположность этому взгляду в моделях Preisach-Mayergoyz индивидуальность трещин определяется только двумя характеристиками σ и l (критическими напряжениями закрытия и открытия трещины и ее длиной), оставляя без внимания внутреннее состояние трещины. Основным показателем служит лишь плотность дефектов, независимо от их природы.

Таким образом, в результате сопоставления ряда нелинейных моделей для мезоскопически неоднородных сред установлено, что одно направление их базируются на гистерезисной модели РМ, а в другом рассматривается динамика трещиноватости образца. Оба направления имеют разработанное компьютерное обеспечение для численного построения теоретических моделей и обработки экспериментальных данных. На их основе можно разработать усовершенствованную обобщенную модель, которая даст возможность экспериментально определить комплекс нелинейных показателей, характеризующих состояние массива: статический и динамический модули, скорости распространения волн, нелинейное затухание, медленная динамика (релаксация), гистерезисное поведение, дискретная память, амплитуда высших гармоник. Полученные показатели могут быть использованы при мониторинге состояния горного массива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. — М.: Наука, 1965. — 204с.

2. *Ostrovsky L., Johnson P.A.* Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials, Rivista Del Nuovo Cimento Ital. Phys. Soc., 2001,v.24,N.7, p.1-46.

3. *Кондратьев О.К.* Сейсмические волны в поглощающих средах. — М.: Недра, 1986. — 175 с.

4. *Guyer R.A. and Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: Evidence of a new class of materials, Phys. Today, 1999, 52, p. 30-35.

5. *Зайцев Ю.В., Назаров В.Е., Таланов В.И.* Неклассические проявления микроструктурно-обусловленной нелинейности: новые возможности для акустической диагностики. — УФН., 2006. — Т. 176. — № 1. — С. 98—101.

6. *Scalerandi M., Delsanto P.P., Johnson P.A.* Stress induced conditioning and thermal relaxation in the simulation of quasi-static compression experiments. J. Phys.D: Appl.Phys.36 (2003), P.288—293.

7. *Лавров А.В., Шкуратник В.Л., Филимонов Ю.Л.* Акустоэмиссионный эффект памяти в горных породах. — М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2004. — 456с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Мартынюк Александр Рафаэльевич — кандидат технических наук, доцент,
e-mail: martynyuk@post.ru,
Московский государственный горный университет.