

РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСА ЖЕСТКОПЛАСТИЧНОЙ МОДЕЛИ

Аннотация. Раскрыта проблема устойчивости грунтовых откосов, сформированных естественным и искусственным путем. Проведен краткий обзор некоторых популярных методов расчета устойчивости откосов (насыпи и выемки). Раскрыты основные достоинства и недостатки методов. Ключевыми особенностями каждого из методов является количество учитываемых уравнений равновесия. Предложена методика решения задачи устойчивости откоса в аналитическом виде при использовании жесткопластичной модели для описания процессов, происходящих при потере устойчивости и сдвиге грунта. Методика предполагает решение системы уравнений из двух или трех уравнений, выведенных автором статьи. Помимо геометрии откоса, физико-механических характеристик грунта задается функция потери устойчивости, в виде которой и ищется решение. Предложен алгоритм решения задач по данной методике. Отличительной чертой методики является то, что решением задачи является аналитически заданная, а не кусочно-линейная функция. Рассмотрен пример в виде вертикального откоса.

Ключевые слова: откос, насыпь, выемка, устойчивость, аналитическое решение.

DOI: 10.25018/0236-1493-2019-02-0-20-27

Введение

Откосом называется грунтовый массив, имеющий ярко выраженный перепад высот любого очертания: линейного и криволинейного. Откосы формируются естественным и техногенным путями. Последний предполагает собой устройство насыпей и выемок. Насыпи — искусственно создаваемый массив сыпучего тела конечных размеров. Пример — насыпь под железнодорожные пути, автомобильные трассы и т.п. Выемка же об-

разуется удалением некоторого объема грунта, например, при откопке котлована без специальных креплений.

Довольно очевидно, что глубина выемок и высота насыпи (далее высота откоса) должна быть ограничена: слишком большая высота может привести к авариям. Так, СНИП 12-04-2002 («Безопасность труда в строительстве») ограничивает глубину и крутизну откоса, в зависимости от типа грунта (см. таблицу). При больших высотах откоса требуется либо

№ пп	Виды грунтов	Крутизна откоса (отношение его высоты к заложению) при глубине выемки, м, не более		
		1,5	3,0	5,0
1	Насыпные неслежавшиеся	1 : 0,67	1 : 1	1 : 1,25
2	Песчаные	1 : 0,5	1 : 1	1 : 1
3	Супесь	1 : 0,25	1 : 0,67	1 : 0,85
4	Суглинок	1 : 0	1 : 0,5	1 : 0,75
5	Глина	1 : 0	1 : 0,25	1 : 0,5
6	Лессовые	1 : 0	1 : 0,5	1 : 0,5

дорогостоящие конструктивные решения (ограждающая конструкция, геосинтетические материалы, сваи и др.), либо требуется производить расчет откоса и проверять его устойчивость.

Множество откосов, которые возводятся сегодня имеют большую высоту, чем в таблице. Это объясняется стесненностью строительных площадок и стремлением к удешевлению строительства. Слишком глубокие откосы устраиваются под защитой специальных сооружений: насыпи — под защитой подпорных стен, габионных конструкций и геосинтетических материалов, выемки — под защитой шпунтового ограждения или стены в грунте. Данные технологии чрезвычайно дорогостоящие, поэтому актуальным является расчет устойчивости откосов высотой более 5 м, различного очертания с приложенной полезной нагрузкой с учетом геологических и гидрогеологических условий строительной площадки.

Краткий обзор некоторых существующих методов расчета устойчивости откосов

В настоящее время существуют множество методов расчета устойчивости откоса, но они все имеют схожие допущения, а отличия состоят в количестве учитываемых уравнений равновесия. Допущения принимаются в виде: 1) гипотеза затвердевшего тела, 2) проведем

классификацию аналогично [1] и [3] с учетом [8].

Проведем классификацию аналогично [1] и [3] с учетом [8].

Метод круглоцилиндрической поверхности скольжения: очень распространенный метод, имеющий большое количество небольших модификаций и называемый также шведский метод, метод отсеков, метод Феллиниуса (см. [6]), метод Терцаги и т.д. Метод предполагает, что сползание происходит вращением вокруг некой точки O , а поверхность скольжения — дуга круга, радиус которого в задаче ищется перебором. В методе используется уравнения моментов сил, относительно точки O и уравнение равновесия вертикальных сил. Вначале назначается центр вращения откоса (точка O), затем проводится дуга, предполагаемым радиусом R , отсек делится на блоки, для каждого из которых составляются вышеуказанные уравнения равновесия. Метод прост, но в нем не выполняется одно из уравнений равновесия, и он не позволяет получить оползневое давление.

Метод Соловьева: идея в приравнивании работ сдвигающих и удерживающих сил на виртуальном перемещении вдоль кривой скольжения.

Метод Маслова: центральная идея в том, что коэффициент устойчивости откоса принимается равным минимальному

а)



б)



Рис. 1. Откосы: насыпь (а); выемка (б)

Fig. 1. Slopes: embankment (a); excavation (b)

значению коэффициента по высоте откоса. То есть откос делится на отсеки, в каждом из которых угол наклона откоса сравнивается с углом сопротивления сдвигу. Метод позволяет построить равнопрочный откос, но не позволяет вычислить оползневое давление.

Метод Чугаева: метод состоит в замене кривой сдвижения, одной прямой либо рядом прямолинейных участков. На основе критерия прочности Кулона-Мора составляется график — «линия связи». Устойчивость отсека и массива определяется сравнением фактических физико-механических свойства грунта с «линией связи».

Метод горизонтальных сил (он же метод Берера, шанхайский метод): метод состоит в выполнении уравнения равновесия на горизонтальную ось для каждого из отсеков откоса. Коэффициент устойчивости вычисляется как отношение сил трения и сцепления к общей силе сдвигу (оползневому давлению).

Метод касательных сил (он же метод Шахунянца, метод прислоненных отсеков): метод состоит в выполнении уравнения равновесия сил вдоль намеченной кривой скольжения. Коэффициент устойчивости — есть отношение удерживающих сил к сдвигающим.

Аналитический метод Г.М. Шахунянца: метод похож на предыдущим с одним отличием: учитываются силы взаимодействия между отсеками, перпендикулярно их граням (аналогично методу Бишоппа [5]). Для их нахождения используют второе уравнение равновесия. Массив рассматривают, начиная с первого отсека, в котором вычисляют первую горизонтальную силу взаимодействия между отсеками. Для решения расчета всех реакций в остальных отсеках достаточно двух уравнений равновесия.

Метод снижения прочности: Данный метод реализован в программных комплексах при моделировании методом КЭ.

Суть метода в плавном снижении прочностных характеристик грунта откоса, пока сдвигающие силы не превысят удерживающие по теории Кулона-Мора. То есть для поиска кривой потери скольжения необходимо решить задачу n количество раз. Таким образом: поверхность скольжения формируется во время расчета, а не угадывается заранее (подробнее см. [2]). Сравнение результатов расчета по аналитическим методикам и методом КЭ у некоторых авторов (например [4]) показывает, что методики показывают похожие результаты.

Остальные методы расчета устойчивости изложены в [9, 11, 12].

Предлагаемый аналитический метод расчета устойчивости откосов

В данной методике на начальном этапе разработки воспользуемся жесткопластичной моделью массива на основе теории прочности Кулона-Мора. Основные ее положения состоят в том, что:

- пластичная деформация происходит в виде сдвига по площадкам скольжения (т.е. фактически, это разрушение);
- сдвигу сопротивляется (до уровней напряжений пластичного сдвига) сцепление и трение по площадке сдвига;
- пластичность определяется только главным максимальным напряжением σ_1 (или главным минимальным напряжением σ_3).

На рис. 2 показана основная идея жесткопластичной модели: элемент сопротивляется внешнему сдвигающему воздействию, не перемещаясь (участок 1 на рис. 2, б), до момента, когда напряжения от внешнего воздействия не достигнут предельного значения τ_c . В этот момент происходит разрушение элемента, и он начинает перемещаться без сопротивления. Внешнему воздействию на участке 1 сопротивляются сцепление C и трение φ . Трение линейно зависит от

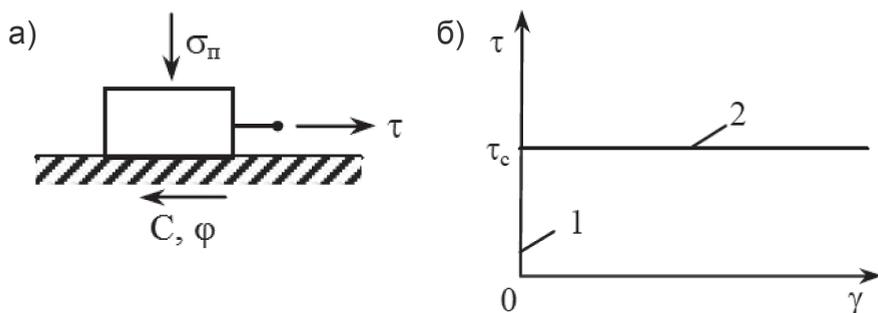


Рис. 2. Схема и график жесткопластичной модели
Fig. 2. Scheme and graph of rigid-plastic model

вертикально приложенной нагрузки или от главного нормального напряжения σ_1 . Условие прочности Кулона-Мора для жесткопластичной модели имеет вид:

$$\tau_c = C + \sigma_n \operatorname{tg}(\varphi),$$

где C — сцепление, σ_n — главное нормальное напряжение на площадке скольжения, φ — угол внутреннего трения.

Рассмотрим прямолинейный откос, который необходимо исследовать на предмет потери устойчивости положения (рис. 3). Обозначим $f(x)$ — функцию, описывающую кривую потери устойчивости, $g(x)$ — функцию, описывающую очертания откоса. Начало координат (точка O) расположим в начале откоса, в точке

пересечения с нижней горизонтальной плоскостью. Ось абсцисс (OX) направим вправо, ось ординат (OZ) вверх. Обозначим a — полная длина по горизонтали функции скольжения. Будем рассматривать пока задачу устойчивости без приложенной сверху полезной нагрузки.

Выделим бесконечно малый (по ширине) трапециевидный «столбик» грунта от функции скольжения до верха откоса, шириной dx на расстоянии x от начала координат. Вес выделенного элемента составит:

$$\gamma[g(x) - f(x)] \cdot dx,$$

где γ — плотность грунта; dx — ширина элемента.

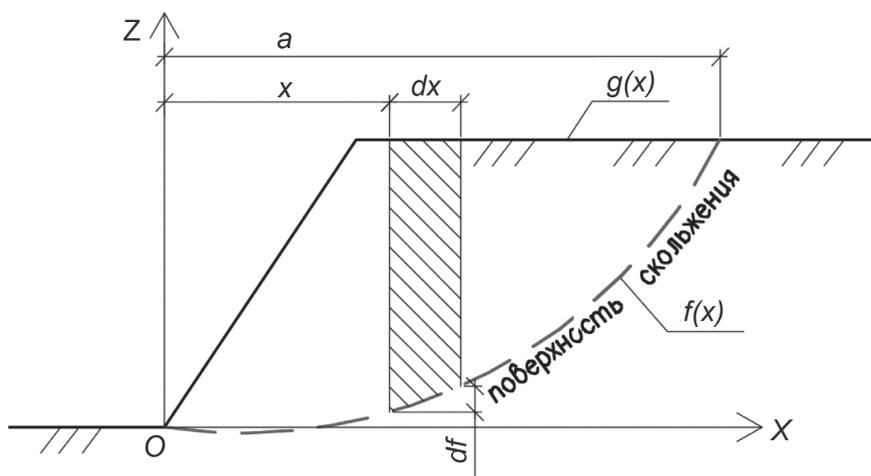


Рис. 3. Прямолинейный откос
Fig. 3. Rectilinear slope

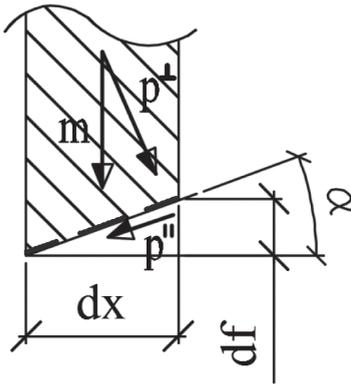


Рис. 4. Разложение векторов
Fig. 4. Decomposition of vectors

Примем в рамках данной первичной модели, что массив сползает как единое тело. Тогда рассмотрим узел А и выведем основные расчетные положения аналитической модели. Так как ширина элемента бесконечно малая, то наклонную площадку скольжения можно принять наклонной прямой. Изменение значения функции в данном элементе обозначим df . Тогда длина площадки скольжения (наклонная прямая) составит:

$$\sqrt{(dx)^2 + (df)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

Разложим вертикальную силу от собственного веса элемента на две: вдоль и поперек площадки скольжения. Для этого составим векторную сумму p^\perp и p^\parallel (см. рис. 4).

Выразим значения p^\perp и p^\parallel в долях от масс элемента m :

$$\begin{cases} (p^\perp)^2 + (p^\parallel)^2 = m^2 \\ \frac{p^\parallel}{p^\perp} = \operatorname{tg}(\alpha) \end{cases}$$

где α — угол наклона площадки скольжения относительно горизонтали. Тангенс этого угла — есть отношение приращения функции df к приращению аргумента dx функции, что по определению при стремлении приращения аргумента dx

к нулю есть первая производная функции: df/dx . Тогда:

$$\begin{cases} (p^\perp)^2 + (p^\parallel)^2 = m^2 \\ \frac{p^\parallel}{p^\perp} = \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p^\parallel = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot p^\perp \\ (p^\perp)^2 + (p^\perp)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = m^2 \end{cases}$$

Теперь можно выразить значения p^\perp и p^\parallel в долях от масс элемента m :

$$p^\perp = \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}} = \frac{\gamma[g(x) - f(x)] \cdot dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}}$$

$$\begin{aligned} p^\parallel &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot p^\perp = \frac{m \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}} = \\ &= \frac{\gamma[g(x) - f(x)] \cdot dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись условием прочности Кулона-Мора для жесткопластичной модели, имеем:

$$\begin{aligned} \tau_c &= C + \sigma_n \operatorname{tg}(\varphi) = C \cdot dx \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} + \\ &+ \frac{\gamma[g(x) - f(x)] \cdot dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}} \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \end{aligned}$$

Сдвигающие напряжения по площадке скольжения равны p^\parallel .

Просуммируем сдвигающие и удерживающие напряжения по площадкам скольжения вдоль всей функции $f(x)$ от начала функции до a :

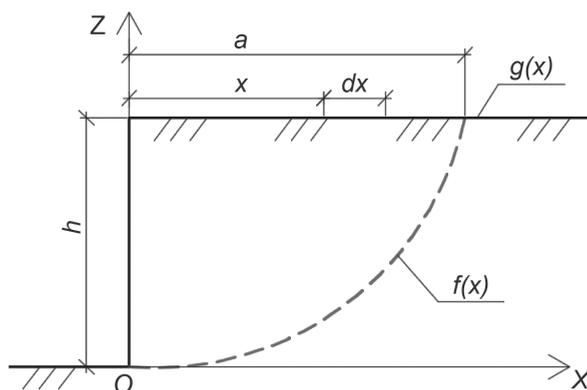


Рис. 5. Пример
Fig. 5. Example

$$\int_0^a [p^\perp \cdot \operatorname{tg}(\varphi) + c \cdot l - p^\parallel] dx =$$

$$= \int_0^a \left[\frac{\gamma [g(x) - f(x)] \cdot dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}} \cdot \operatorname{tg}(\varphi) + C \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{\gamma [g(x) - f(x)] \cdot dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right] dx = 0$$

Можно обозначить граничное условие, при котором в точке с абсциссой a значения функции скольжения и очертаения откоса равны.

$$f(x)|_{x=a} = g(x)|_{x=a}$$

В итоге, получилось интегральное уравнение относительно неизвестной функции скольжения массива $f(x)$. Методика решения уравнения следующая:

- задается функция очертаения откоса $g(x)$, на основе измерений откоса;
- в итоговую формулу вводятся характеристики массива из инженерно-геологических изысканий: сцепление (c), угол внутреннего трения (φ), плотность (γ);
- назначается функция потери устойчивости $f(x)$ с параметрами, которые

устанавливаются выполнением граничных условий после решения уравнения.

Функцию потери устойчивости $f(x)$ автор задавал в виде:

$$f(x) = b\sqrt{R^2 - (x - d)^2} + h,$$

$$f(x) = b \cdot e^{d-x} + h$$

где b , d , h — параметры (числовые коэффициенты).

Пример

Рассмотрим в качестве примера вертикальный однородный откос, высотой h .

Решение будем искать в виде:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} - y_0$$

Граничные условия задачи:

$$\begin{cases} f(x)|_{x=a} = h \\ f(x)|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{R^2 - (y_0 + h)^2} + x_0$$

Первое граничное условие означает равенство значений функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке выхода поверхности скольжения на поверхность. Второе граничное условие означает, что начинается поверхность скольжения в точке O .

Подставляя принятые функции в выведенные уравнения после соответствующих выкладок получим нелинейное уравнение для определения неизвест-

ного параметра функции/проверки выполнения условия устойчивости:

$$\left[\frac{h\gamma\lambda}{R} \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} - \frac{\gamma\lambda}{R} \left(R^2 - (x - x_0)^2 + y_0 \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right) + \frac{cR}{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}} + \frac{h\gamma}{R} (x - x_0) - \frac{\gamma}{R} (x - x_0) \left(\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0 \right) \right]_0^a = 0$$

Решая данное нелинейное уравнение вместе с граничными условиями, получаем три неизвестных параметра R , x_0 ,

y_0 и окончательный вид искомой функции потери устойчивости откоса.

Выводы

В статье рассмотрены основные существующие методики расчета устойчивости откоса. Выведены основные положения аналитического метода расчета устойчивости на основе жесткопластичной модели. Продемонстрирован пример расчета по вышеуказанной методике. Дальнейшее усовершенствование методике будет производиться в направлениях: учет нагрузки на откосе/горизонтальных площадках, учет неоднородности грунтового основания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далматов Б. И. Механика грунтов, основания и фундаменты (включая специальный курс инженерной геологии). 2-е изд. перераб. и доп. — Л.: Стройиздат, Ленингр. Отд-ние, 1988. — 415 с., ил.
2. Федоренко Е. В. Метод расчета устойчивости путем снижения прочностных характеристик // Транспорт Российской Федерации. Журнал о науке, практике, экономике. — 2013. № 6. — С. 24–26.
3. Рекомендации по выбору методов расчета коэффициента устойчивости склона и оползневого давления. — М.: ЦБНТИ Минмонтажспецстроя СССР, 1986. — 123 с.
4. Леханова К. В., Новозинский А. Л. Сравнение численных и аналитических методов расчета устойчивости грунтовых откосов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. — 2011. — № 1. — С. 45–50.
5. Bishop A. W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes // Geotechnique, 1955. Vol. 5, pp. 7–17.
6. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams, Trans. 2nd Cong. on Large Dams, 1936, Vol. 4, p. 445.
7. Spencer E. A method of analysis of the stability of embankment assuming parallel interslice forces // Geotechnique. Vol. 17. 1967. Pp. 11.
8. Albataineh N. Slope stability analysis using 2d and 3d methods // The graduate faculty of the university of Akron. 2006. 143 p.
9. Жабко А. В. Аналитическая геомеханика. — Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. — 224 с.
10. Каспарьян Э. В., Козырев А. А. Геомеханические проблемы при открытых горных работах // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2015. — № 4. — С. 134–139.
11. Нгуен Тхай Хоанг Оценка устойчивости грунтовых откосов гидротехнических сооружений с применением вариационного принципа: дис ... канд. технич. наук: 05.23.07. — СПб., 2014. — 106 с.
12. Жабко А. В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Устойчивость откосов в поле тектонических, сейсмических и гидростатических напряжений // Известия УГГУ. — 2016. — Вып.4. — С. 50–53. **ПИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Костенко Богдан Валерьевич — аспирант, Санкт-Петербургский горный университет, инженер, ОАО «Научно-исследовательский, проектно-изыскательский институт «Ленметрогипротранс», e-mail: polo_olop@mail.ru.

Analytical procedure for slope stability calculation using rigid-plastic model

Kostenko B.V., Graduate Student,
Saint Petersburg Mining University, 199106, Saint-Petersburg, Russia,
Engineer, Open Stock Company Scientific, Research, Design and Surveying Institute
«Lenmetrogioprotrans», 191002, Saint-Petersburg, Russia, e-mail: polo_olop@mail.ru.

Abstract. The problem of slope stability of natural and artificial embankments is explained. A brief review of popular methods of slope stability calculation (in terms of embankments and excavations) is given with their key advantages and shortcomings. A feature of each method is the number of included equations of equilibrium. This article proposes a procedure for solving the problem on slope stability using a rigid-plastic model to describe the processes of instability and shearing. The procedure provides solution of a system composed of two or three equations derived by the author of this article. Alongside with the slope geometry and physical and mechanical properties of soil, a function of instability is set, and the solution is found in the form of this function. The algorithm of the problem solution using the proposed procedure is described. The feature of this procedure is the problem solution in the form of an analytically preset rather than piecewise-linear function. The procedure implementation is illustrated in terms of a vertical slope.

Key words: slope, embankment, excavation, stability, analytical solution.

DOI: 10.25018/0236-1493-2019-02-0-20-27

REFERENCES

1. Dalmatov B. I. *Mekhanika gruntov, osnovaniya i fundamenti (vklyuchaya spetsial'nyy kurs inzhenernoy geologii)*. 2-e izd. [Mechanics of soils, basements and foundations (including special geotechnical engineering course). 2nd edition], Leningrad, *Stroyizdat*, 1988, 415 p.
2. Fedorenko E. V. Metod rascheta ustoychivosti putem snizheniya prochnostnykh kharakteristik [Method of calculating stability by reducing strength characteristics]. *Transport Rossiyskoy Federatsii. Zhurnal o nauke, praktike, ekonomike*. 2013, no 6, pp. 24–26. [In Russ].
3. *Rekomendatsii po vyboru metodov rascheta koeffitsienta ustoychivosti sklona i opolzneвого davleniya* [Recommendations on selection of methods of slope stability and land slide pressure calculation], Moscow, TSBNTI Minmontazhspetsstroya SSSR, 1986, 123 p.
4. Lekhanova K. V., Novodzinskiy A. L. Svrnenie chislennykh i analiticheskikh metodov rascheta ustoychivosti gruntovykh otkosov [Comparison of numerical and analytical methods of soil slope stability calculation], *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 2011, no 1, pp. 45–50. [In Russ].
5. Bishop A. W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes. *Geotechnique*, 1955. Vol. 5, pp. 7–17.
6. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams, *Trans. 2nd Cong. on Large Dams*, 1936, Vol. 4, p. 445.
7. Spencer E. A method of analysis of the stability of embankment assuming parallel inter-slice forces. *Geotechnique*. 1967. Vol. 17. Pp. 11.
8. Albatineh N. Slope stability analysis using 2d and 3d methods. *The graduate faculty of the university of Akron*. 2006. 143 p.
9. Zhabko A. V. *Analiticheskaya geomekhanika* [Analytical geomechanics], Ekaterinburg, Izd-vo UGGU, 2016, 224 p.
10. Kaspar'yan E. V., Kozyrev A. A. Geomekhanicheskie problemy pri otkrytykh gornyykh rabotakh [Geomechanical problems in open pit mining], *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2015, no 4, pp. 134–139. [In Russ].
11. Nguen Tkhai Khoang *Ustoychivosti gruntovykh otkosov gidrotekhnicheskikh sooruzheniy s primeneniem variatsionnogo printsipa* [Estimate of soil slope stability at waterworks using a variation principle], Candidate's thesis, Saint-Petersburg, 2014, 106 p.
12. Zhabko A. V. *Teoriya rascheta ustoychivosti otkosov i osnovaniy. Ustoychivost' otkosov v pole tektonicheskikh, seysmicheskikh i gidrostaticheskikh napryazheniy* [Theory of stability calculation of slopes and foundations. Slope stability in the field of tectonic, seismic and hydrostatic stresses], *Izvestiya UGGU*. 2016. Issue 4, pp. 50–53. [In Russ].