

ОПЫТ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ УПРУГОГО ГИСТЕРЕЗИСА ГОРНЫХ ПОРОД РАЗЛИЧНЫХ ГЕНОТИПОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПРЕЙСАХА

Н.Г. Высотин¹, В.А. Винников¹

¹ НИТУ «МИСиС», Москва, Россия, e-mail: n.vysotin@misis.ru

Аннотация: С целью повышения достоверности данных, необходимых для построения численных геомеханических моделей, и получения более верных соотношений между свойствами образцов и свойствами породы в натуральных условиях для моделирования процессов горного производства важен учет параметров упругого гистерезиса. Одной из наиболее распространенных в настоящее время моделей упругого гистерезиса является модель пространства Прейсаха-Майергойца (ПМ), описывающая нелинейно-упругое поведение структурно-неоднородных сред с дискретной памятью, таких как горные породы (геоматериалы). В связи с этим целью данной работы является построение модели упругого гистерезиса для горных пород различного генезиса. Методом исследования является математическое моделирование в программном комплексе MathCAD процессов деформирования образцов горных пород в условиях упругого гистерезиса. Представлены элементы создания и результаты исследования математической модели упругого гистерезиса, которая основана на теории Прейсаха. Было установлено, что для образцов различных генотипов горных пород плотность распределения гистерезисов в ПМ-пространстве заметно различается. Таким образом, есть возможность адекватно оценить на основе предложенной модели степень гистерезисности различных горных пород, имеющих многоуровневую дефектную внутреннюю структуру.

Ключевые слова: образцы горных пород, моделирование, упругий гистерезис, петля гистерезиса, модель гистерезиса, теория Прейсаха, пространство Прейсаха-Майергойца, гистерезисная нелинейность, структура горных пород

Для цитирования: Высотин Н. Г., Винников В. А. Опыт построения модели упругого гистерезиса горных пород различных генотипов на основе теории Прейсаха // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2023. – № 11. – С. 5–16. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_11_0_5.

A case history of modeling elastic hysteresis of different-genotype rocks based on the Preisach model

N.G. Vysotin¹, V.A. Vinnikov¹

¹ National University of Science and Technology «MISIS», Moscow, Russia,
e-mail: n.vysotin@misis.ru

Abstract: For improving reliability of data required for the numerical geomechanical models, and for having more correct relations between properties of samples and in-situ properties of rocks for modeling production processes in mining, it is important to take into account parameters of elastic hysteresis. One of the most widespread models of elastic hysteresis is currently the Preisach–Mayergoyz (PM) model which describes the nonlinearly elastic behavior of structurally nonuniform media with the discrete memory, such as rocks (geomaterials). In this connection, the aim of this study is modeling elastic hysteresis for rocks of different genesis. The research method is MathCAD-based mathematical modeling of deformation of rock samples under conditions of elastic hysteresis. The article describes the elements and the results of the constructed mathematical model of elastic hysteresis based on the Preisach model. It is found that hysterion distributions in the PM space model observably differ in the samples of different-genotype rocks. In this fashion, it is possible to obtain an adequate valuation of the degree of hysteresis in rocks having multi-scale faulted internal structure using the proposed model.

Key words: rock samples, modeling, elastic hysteresis, hysteresis loop, hysteresis model, Preisach Model, Preisach–Mayergoyz space, hysteretic nonlinearity, rock structure.

For citation: Vysotin N. G., Vinnikov V. A. A case history of modeling elastic hysteresis of different-genotype rocks based on the Preisach model. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2023; (11):5-16. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_11_0_5.

Введение

Гистерезисные явления достаточно известны в физике, технике и других науках [1, 2]. В физике и технике зависимости гистерезисного типа встречаются в различных твердых телах с нелинейным откликом на внешнее механическое воздействие, в частности, в горных породах [3, 4].

На современном этапе развития науки и техники есть достаточно много математических моделей гистерезиса. В целом модели гистерезиса основаны на решении нелинейных дифференциальных уравнений или в линейные уравнения, описывающие модель, вводятся нелинейные гистерезисные компоненты.

С целью повышения достоверности данных, необходимых для построения численных геомеханических моделей и получения более верных соотношений между свойствами образцов и свойствами породы в натуральных условиях, для моделирования процессов горного про-

изводства важен учет параметров упругого гистерезиса [5].

В силу этого необходимо адекватно учитывать изменение структуры образцов горных пород в процессе деформирования, соответственно, корректно описывать зависимости напряжение-деформация [6]. Для этого нужно максимально точно определить нелинейные параметры упругого гистерезиса в этой аналитической зависимости.

Главной причиной гистерезисной нелинейности, проявляющейся на диаграммах деформирования таких микро-неоднородных тел, как горные породы, является накопление остаточных деформаций, чему способствует рост трещин и увеличение их количества [7].

Для непростых механических систем, таких как горные породы, части которых взаимодействуют друг с другом силами различного происхождения, теоретическое моделирование с распознаванием их параметров — сложная задача. Таким

образом, горные породы можно рассмотреть в аспекте известных экспериментальных значений входных и выходных параметров. Взаимосвязи между этими параметрами формируются на базе феноменологических моделей, компоненты которых идентифицируются с использованием экспериментальных данных [8 – 10].

Особое место занимают модели, строящиеся с использованием спектральных разложений по релейным нелинейностям, что было предложено в работах по магнетизму [11], в которых рассматривается процесс намагничивания как статистический результат перемагничивания отдельных элементарных областей (доменов).

В настоящее время эти идеи превращены в строгий математический аппарат и существенно развиты для упругого гистерезиса [9, 12 – 14]. Схожие феноменологические представления предложены и развиваются в различных областях механики и физики [11, 14 – 16]. Однако для идентификации параметров таких моделей часто требуются сложные экспериментальные исследования и интерпретации полученных данных [17, 18].

Таким образом, задачей данной работы является стремление дать максимально точное математическое описание влияния микроструктуры образцов на характеристику напряженно-деформированного состояния, без чего невозможно теоретически оценить степень гистерезисной нелинейности в процессе деформирования. Решение такой задачи также ведет к совершенствованию методов нелинейной диагностики состояния материалов, в том числе и геоматериалов.

Оценку напряженно-деформированного состояния конкретных горных пород можно получить эмпирическими методами, которые могут быть весьма затрат-

ными по времени и ресурсам, а также в каких-то случаях нецелесообразными. В силу этого для горных пород стремятся применять как аппроксимирующие, так и основанные на различных теориях гистерезиса математические модели.

Параметры упругого гистерезиса позволяют более качественно оценить в допустимой мере геомеханические процессы в реальных горных породах или правильно рассчитать параметры тепловых процессов, происходящих в массиве. Описание упругого гистерезиса осуществляется на основе введения нелинейных параметров в обобщенный закон Гука, а также с включением в физическое уравнение гистерезисных сред специального слагаемого, отвечающего за гистерезис.

Одна из наиболее распространенных в настоящее время моделей гистерезисных явлений — это модель пространства Прейсаха-Майергойца (ПМ-модель), описывающая нелинейно-упругое поведение структурно-неоднородных сред с дискретной памятью [19 – 25]. В связи с этим целью данной работы является построение модели упругого гистерезиса пород различного генотипа.

Основой ПМ-модели являются упругие элементы ПМ-пространства — так называемые гистероны, плотность ρ которых позволяет наблюдать за реакцией макроскопического геоматериала, демонстрирующего нелинейное гистерезисное поведение под воздействием деформационных процессов [13, 26, 27]. Гистероны в исследуемых геоматериалах — это гистерезисные упругие элементы структуры в микромасштабе (микротрещины, поры, межзеренное пространство и т.д.). Предполагается, что для пород различных генотипов существует характерная плотность гистеронов ρ , которая позволяет описывать упругие свойства этих пород (например, статический и динамический модули упругости).

В наших исследованиях (определения ρ по кривым нагружения образцов, полученных в результате статических механических испытаний) были использованы образцы пород различных генотипов: габбро, гранит, мрамор, известняк. Результат исследования позволит инвертировать плотность в пространство ПМ (построить математическую модель).

Методы

Известна «классическая» теоретическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние (НДС) микронеоднородных консолидированных твердых тел.

Такая модель как характеристика напряженно-деформированного состояния образцов горных пород с учетом гистерезисной нелинейности может быть представлена следующей зависимостью:

$$\sigma(\varepsilon) = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + \dots \quad (1)$$

где σ — напряжение; ε — относительная деформация; E_1 — модуль упругости 1-го порядка; E_2 — модуль упругости 2-го порядка.

«Классическая» теория распространения упругих волн в нелинейном материале основана на выражении плотности энергии как функции скалярных инвариантов тензора деформации. Эта формулировка, в которой напряжение считается аналитической функцией от деформации, была очень успешной в описании статики и динамики широкого спектра материалов [6, 26].

Применяя для аналитических исследований нелинейные уравнения упругости «классической» теории, практически невозможно описать гистерезис, который наблюдается в упругом отклике большинства горных пород и подобных физических сред. В породе напряжение не является аналитической функцией деформации. Поэтому в основу исследований положена система упругих эле-

ментов, которая гистерезисно реагирует на напряжения в горной породе.

Каждый упругий элемент характеризуется двумя состояниями — открытое и закрытое, которые описываются соответствующими параметрами длины (l_o, l_c) и параметрами напряжения (σ_o, σ_c), причем l_o, σ_o означают параметры открытого элемента (например, микротрещины), а l_c и σ_c — параметры закрытого элемента. Зависимость изменения длины гистерона от напряжения линейна и гистерезисна.

В ПМ-модели принято оценивать распределение упругих элементов по напряжениям в пространстве $\rho(\sigma_o, \sigma_c)$, т.е. каждому упругому элементу соответствуют точки с координатами (σ_o, σ_c) в этом пространстве (рис. 1). Точки пространства, где $\sigma_o = \sigma_c$, графически представляют собой диагональ, т.е. упругие элементы открыты и закрыты при одном и том же напряжении и не демонстрируют гистерезисное поведение [6, 26].

Соответствующая модель материала состоит из большого количества абстрактных гистерезисных упругих элементов, наблюдаемых в пространстве ПМ, которые проявляют различную степень гистерезиса, таким образом, чем больше гистерезисна упругая единица, тем дальше она находится от диагонали. Если гистерезис отсутствует, то все элементы попадают на диагональ, и модель сводится к классической теории, описанной выше.

Плотность ρ упругих единиц в ПМ-пространстве определяется так [8, 28]:

$$[\varepsilon \uparrow - \varepsilon \downarrow](i) = (l_o - l_c) \cdot \sum_{m=i+1}^{N-1} \sum_{n=0}^i \rho(m, n), \quad (2)$$

где $[\varepsilon \uparrow - \varepsilon \downarrow](i)$ — величины деформаций, соответствующие ветвям разгрузки и нагрузки при одном и том же значении напряжения, соответственно; i — номер шага по значениям напряжений, $i = 0$

соответствует минимальному значению напряжения, $i = N$ – максимальному; $\rho(m, n)$ – функция, представляющая плотность гистерезисных микроскопических упругих элементов, т.е. число гистеронов в единичной площади пространства ПМ-модели.

В работе использовался метод «экспоненциального ослабления», заключающийся в том, что если известно значение ρ под диагональю (т.е. $\rho(i, i-1)$), то остальные элементы, стоящие в i -м столбце, можно вычислить по формуле

$$\rho(i, k) = \rho(i, i-1) \cdot e^{-\alpha(i-1-k)}, \quad (3)$$

где $k = 0, \dots, i-1$, а α – параметр метода, называемый коэффициентом ослабления, в данном исследовании равен 0,025.

В математических моделях ПМ-пространство (треугольник Прейсаха-Майергойца) формируют как нижнедиагональную матрицу размера $N \times N$, где ненулевые значения функции распределения ограничены треугольником.

Функция плотности распределения гистеронов в ПМ-пространстве опреде-

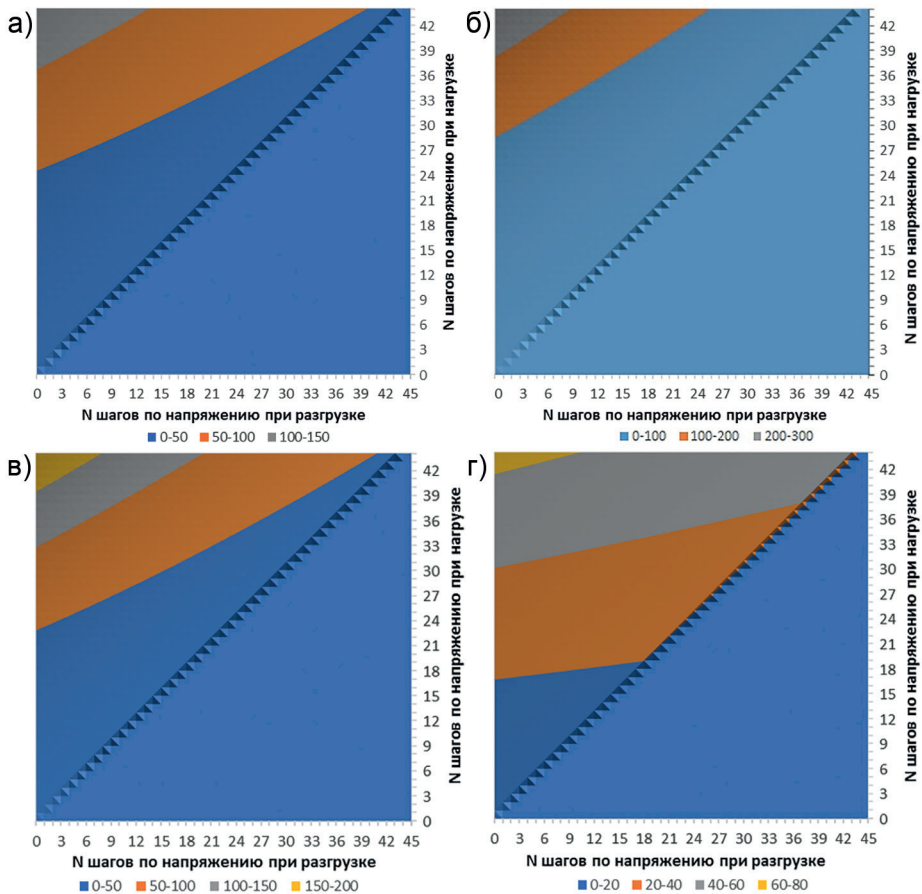


Рис. 1. Плотность распределения гистеронов в ПМ-пространстве по напряжениям нагрузки σ_l , МПа и разгрузки σ_r , МПа образцов: гранит красный, $\sigma_{max} = 75$ МПа (а); мрамор, $\sigma_{max} = 30$ МПа (б); габбро, $\sigma_{max} = 70$ МПа (в); известняк, $\sigma_{max} = 30$ МПа (г)

Fig. 1. The hysteros density in the PM-space in terms of loading stresses σ_l , MPa and unloading stresses σ_r , MPa samples: red granite, $\sigma_{max} = 75$ MPa (a); marble, $\sigma_{max} = 30$ MPa (b); gabbro, $\sigma_{max} = 70$ MPa (v); limestone, $\sigma_{max} = 30$ MPa (g)

ляется на основе проведенных экспериментов по статическому нагружению образцов горных пород согласно стандарту DIN EN 14580-2005. Определению модуля упругости E предшествует уплотнение образца двумя циклами нагрузки и разгрузки, что способствует получению стабильных деформационных характеристик и обратимому упругому деформированию во время испытаний образцов горной породы.

Физический эксперимент по определению упруго-пластических характеристик проводился на образцах горных пород призматической формы с линейными размерами $20 \times 20 \times 40$ мм, обоснования размеров образцов и методики испытаний приведены в [28, 29]. Испытания проводились на автоматизированной испытательной машине LFM-50 kN, в встроенной программе которой были заданы: режим испытаний — одноосное сжатие с измерением деформации по перемещению сжимающих плит установки; значения напряжения 33% для нагрузки и 2% для разгрузки от предела прочности на одноосное сжатие для каждого цикла; в третьем цикле испытаний нагрузка и разгрузка производились с постоянной скоростью 0,3 МПа/с.

На основе полученных экспериментальных зависимостей $\sigma(\epsilon)$ в среде MathCAD с использованием формул (1) — (3) были рассчитаны матрицы значений $\rho(\sigma_0, \sigma_c)$. Этот процесс проводился следующим образом: напряжения при нагрузке и разгрузке были разделены на 45 равных интервалов, соответственно, были получены одинаковые значения напряжений как при нагрузке, так и при разгрузке. По этим значениям напряжений были интерполированы деформации. Таким образом, были получены при каждом значении напряжений соответствующие им деформации при нагрузке и разгрузке, по разнице которых определяется ширина раскрытия петли уп-

ругого гистерезиса и, в целом, степень гистерезисной нелинейности геоматериалов. Также степень гистерезисности была определена шириной раскрытия петли гистерезиса по оси напряжений, значения которых и были использованы для определения плотности гистеронов в пространстве Прейсаха-Майергойца в соответствии с формулой (3).

Результаты расчетов представлены на рис. 1.

Результаты и их обсуждение

В соответствии с математической моделью Прейсаха-Майергойца были построены плотности распределения гистеронов в ПМ-пространстве для пород различных генотипов, представленные на рис. 1. Из этого рисунка также видно, что каждый генотип пород обладает своим видом плотности распределения гистеронов в ПМ-пространстве.

На графическом представлении ПМ-пространства мрамора можно увидеть, что плотность гистеронов больше вблизи диагонали, что означает незначительное отличие напряжений разгрузки σ_0 гистерезисных элементов мрамора от напряжений при нагрузке σ_c . В целом плотность гистеронов больше при напряжениях, не превышающих 20 МПа, выше этого значения кривые нагрузки и разгрузки смыкаются и гистерезис не наблюдается. Ту же самую ситуацию можно наблюдать для образца известняка, что подтверждает схожесть упругого гистерезиса для однотипных по генезису пород известняка и мрамора.

Скальные породы отличаются более высокими параметрами упругого гистерезиса [23, 25] и меньшей степенью гистерезисности, так как в процессе деформирования в отличие от пластичных пород трещины смыкаются быстрее.

Таким образом, модель Прейсаха-Майергойца, основанная на простейшей статистической системе гистерезисных

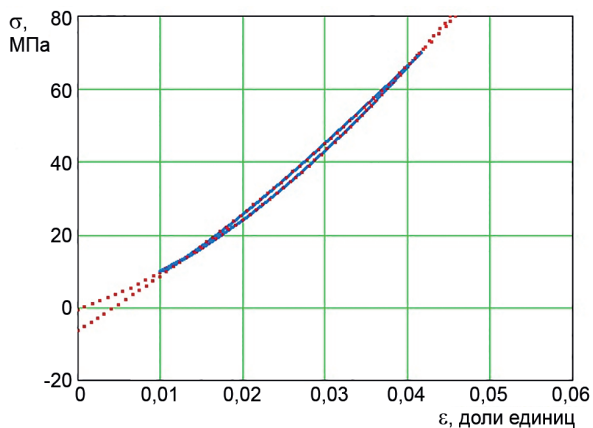


Рис. 2. Экспериментальная (синяя сплошная) и расчетная (красная пунктирная) петли упругого гистерезиса образца габбро

Fig. 2. Experimental (solid blue curve) and calculated (dashed red curve) elastic hysteresis loops of a gabbro sample

частиц, позволяет качественно и количественно оценивать нелинейное упругое поведение такого иерархически сложного по структуре материала, как горная порода.

Можно наблюдать наибольшую плотность гистеронов (порядка 200 единиц) вдали от диагонали (фиолетовый цвет), разделяющей ПМ-пространство, это значит, что напряжение разгрузки σ_0 микроскопических гистерезисных элемен-

тов горных пород в целом значительно отличаются от напряжения нагрузки σ_c . Плотность гистеронов, для которых σ_0 и σ_c 2,5–3% от предела прочности, больше, чем при больших значениях напряжений, что также демонстрирует нелинейность на начальном этапе диаграммы деформирования. Наименьшее количество гистеронов — в начале нагрузки и в конце разгрузки, порядка 0–3 единиц.

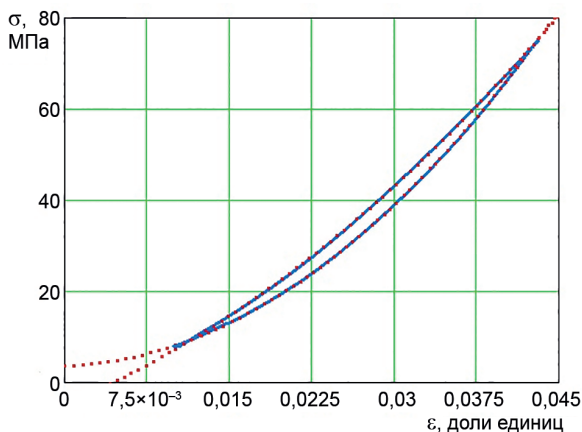


Рис. 3. Экспериментальная (синяя сплошная) и расчетная (красная пунктирная) петли упругого гистерезиса образца гранита

Fig. 3. Experimental (solid blue curve) and calculated (dashed red curve) elastic hysteresis loops of a granit sample

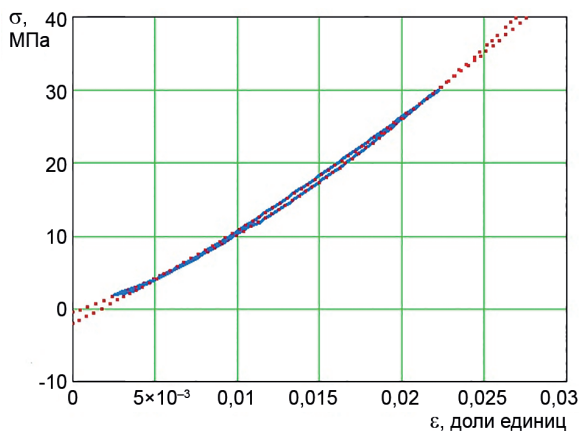


Рис. 4. Экспериментальная (синяя сплошная) и расчетная (красная пунктирная) петли упругого гистерезиса образца мрамора

Fig. 4. Experimental (solid blue curve) and calculated (dashed red curve) elastic hysteresis loops of a marble sample

Модели в ПМ-пространстве находятся в соответствии с экспериментальными данными деформирования образцов в условиях упругого гистерезиса. Плотность гистеронов увеличивается при удалении от диагонали, поэтому можно сделать вывод о том, что в данных горных породах много гистерезисных элементов, имеющих значительную разницу между напряжениями нагрузки и разгрузки.

Особенно стоит отметить образцы габбро, для которых наибольшая плотность гистеронов наблюдается по всей длине вблизи диагонали. Этот факт свидетельствует о том, что напряжения нагрузки и разгрузки различаются незначительно по сравнению с породами других генотипов. Это соответствует экспериментальным диаграммам деформирования (см. рис. 2–5). В качестве примера приведены экспериментальные и модель-

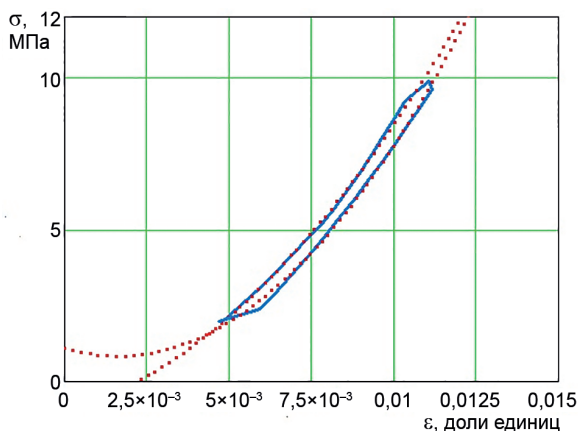


Рис. 5. Экспериментальная (синяя сплошная) и расчетная (красная пунктирная) петли упругого гистерезиса образца известняка

Fig. 5. Experimental (solid blue curve) and calculated (dashed red curve) elastic hysteresis loops of a limestone sample

ные замкнутые кривые упругого гистерезиса для габбро и гранита (соответственно, рис. 2 и рис. 3).

Кривые построены на основе 45 дискретных участков. На них можно увидеть, что восходящая и нисходящая кривые достаточно близки друг к другу, т.е. имеют малую степень гистерезисности, в отличие от мрамора и известняка [23, 25] — рис. 4 и рис. 5.

Заключение

Вопрос моделирования процессов деформирования горных пород в настоящее время актуален, на что указывает множество работ в этой области. Его решение даст возможность создавать и совершенствовать методы построения численных геомеханических моделей и получать более верные взаимосвязи между свойствами образцов и свойствами породы в натуральных условиях для исследования, моделирования и проектирования процессов горного и нефтегазового производства.

На основе обзора существующих математических моделей механического поведения твердых тел, в том числе горных пород, выявлено, что перспективным подходом к описанию процесса накопления деформации в условиях упругого гистерезиса является теория Прейсаха, несмотря на сложности ее реализации в программных комплексах.

В данной работе исследовано проявление упругого гистерезиса в образцах горных пород (габбро, мрамора, известняка и гранита). Обосновано применение модели механического поведения образцов в условиях упругого гистерезиса Прейсаха, построенной на основе экспериментальных данных. Показано, что модель пространства Прейсаха-Майергойца способна качественно и количественно описывать поведение нелинейной упругой среды, такой как горная порода.

Было установлено, что для образцов различных генотипов горных пород плотность распределения гистеронов в ПМ-пространстве заметно различается. Таким образом, модель Прейсаха-Майергойца позволяет с учетом особенностей микроструктуры описывать упругий гистерезис исследуемых образцов горных пород, имеющих многоуровневую дефектную внутреннюю структуру.

Перспективы и направления будущих исследований

Исследования в области построения моделей упругого гистерезиса горных пород различных генотипов, в том числе на основе теории Прейсаха, имеют широкие перспективы и могут привести к значительным прорывам в области горного дела и геотехники. Вот некоторые возможные направления будущих исследований:

1. Изучение влияния генотипов горных пород на параметры их упругого гистерезиса, что даст возможность выявлять особенности поведения различных пород при циклических нагрузках.

2. Использование новых экспериментальных и численных методов для измерения и моделирования упругого гистерезиса пород и разработка на этой основе новых методов исследования упругих свойств горных пород.

3. Анализ влияния различных факторов (влажности, температуры, скорости деформации и других) на параметры упругого гистерезиса горных пород для исследования поведения пород при циклических нагрузках.

4. Применение модели упругого гистерезиса для решения практических задач в горном деле и геотехнике. Это может включать использование модели для прогнозирования поведения горных пород при различных условиях нагрузки и оптимизации проектирования горных сооружений.

5. Исследование возможности использования модели упругого гистерезиса для оценки состояния и прогнозирования поведения горных пород в различных геологических условиях. Это может включать изучение влияния различных геологических факторов (например, структуры горных пород) на параметры их упругого гистерезиса.

В целом, исследование в области построения модели упругого гистерезиса

горных пород различных генотипов на основе теории Прейсаха имеет большой потенциал для расширения наших знаний о поведении горных пород и разработки новых методов и подходов к горному делу и геотехнике.

Авторы выражают признательность за помощь профессору, д.т.н Е.Б. Черепецкой, ведущему инженеру, к.т.н. П.И. Дубинину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Литературу с п. 1 по п. 7 и с п. 10 по п. 16 смотри в REFERENCES.

8. Авербах В. С., Бредихин В. В., Коньков А. И., Лебедев А. В., Манаков С. А., Таланов В. И. Акустическая нелинейность гранита. Сравнение данных натурального и лабораторного экспериментов // Акустический журнал. — 2016. — Т. 62. — № 3. — С. 363–368. DOI: 10.7868/S0320791916030023.

9. Машинский Э. И. Амплитудно-зависимый гистерезис скорости волны в горных породах в широком диапазоне частот: экспериментальное исследование // Горные науки и технологии. — 2021. — Т. 6. — № 1. — С. 23–30. DOI: 10.17073/2500-0632-2021-1-23-30.

17. Данилин А. Н., Виноградов А. А., Карнет Ю. Н. Модели гистерезиса: краткий обзор // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2016. — Т. 22. — № 2. — С. 295–308.

Литературу с п. 18 по п. 25 смотри в REFERENCES.

26. Высотин Н. Г. Упругий гистерезис горных пород различных генотипов // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2022. — № 5-2. — С. 72–79. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_52_0_72.

27. Белозеров И. П., Губайдуллин М. Г. О концепции технологии определения фильтрационно-емкостных свойств терригенных коллекторов на цифровой модели керна // Записки Горного института. — 2020. — Т. 244. — С. 402–407. DOI: 10.31897/PMI.2020.4.2.

28. Высотин Н. Г. Нелинейные особенности упругого гистерезиса образцов горных пород при циклическом одноосном нагружении // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2021. — № 4-1. — С. 148–157. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_41_0_148.

29. Винников В. А., Высотин Н. Г. Методика проведения испытаний по определению статического модуля упругости горных пород с использованием результатов лазерно-ультразвуковой спектроскопии // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2018. — № S1. — С. 90–101. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-1-1-90-101. **ГИАБ**

REFERENCES

1. Moses P. A new object-oriented simulation tool for modeling preisach-based magnetic hysteresis nonlinearities. *WSEAS Transactions on Systems*. 2018, vol. 17, pp. 24–35.

2. Wawrzala P. Application of a preisach hysteresis model to the evaluation of PMN-PT ceramics properties. *Archives of Metallurgy and Materials*. 2013, vol. 58, no. 4, pp. 1347–1350.

3. Lott M., Remillieux M. C., Garnier V., Le Bas P.-Y., Ulrich T. J., Payan C. Nonlinear elasticity in rocks. A comprehensive three-dimensional description. *Physical Review Materials*. 2017, vol. 1, no. 2, article 023603, pp. 1–10. DOI: 10.1103/PhysRevMaterials.1.023603.

4. Wang X., Song L., Gao X., Chang X. Effect of loading rate on the nonlinear elastic response of concrete. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2021, vol. 25, no. 5, pp. 909 – 923. DOI: 10.1080/19648189.2018.1553209.
5. Tong L. H., Yu Y., Xu C. Nonlinear dynamic behavior of cemented granular materials under impact loading. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019, vol. 151, pp. 70 – 75. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.11.015.
6. Bittner J. A., Popovics J. S. Mechanistic diffusion model for slow dynamic behavior in materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2021, vol. 150, article 104355. DOI: 10.1016/j.jmps.2021.104355.
7. Shokouhi P. Rivière J., Guyer R. A., Johnson P. A. Slow dynamics of consolidated granular systems: Multi-scale relaxation. *Applied Physics Letters*. 2017, vol. 111, no. 25, article 251604. DOI: 10.1063/1.5010043.
8. Averbakh V. S., Bredikhin V. V., Kon'kov A. I., Lebedev A. V., Manakov S. A., Talanov V. I. Acoustic nonlinearity of granite: Comparison of data of field and laboratory experiments. *Akusticheskij Zhurnal*. 2016, vol. 62, no. 3, pp. 363 – 368. [In Russ]. DOI: 10.7868/50320791916030023.
9. Mashinskii E. I. Amplitude-dependent hysteresis of wave velocity in rocks in wide frequency range: An experimental study. *Mining Science and Technology (Russian Federation)*. 2021, vol. 6, no. 1, pp. 23 – 30. DOI: 10.17073/2500-0632-2021-1-23-30.
10. Sens-Schönfelder C., Snieder R., Li X. A model for nonlinear elasticity in rocks based on friction of internal interfaces and contact aging. *Geophysical Journal International*. 2019, vol. 216, no. 1, pp. 319 – 331. DOI: 10.1093/gji/ggy414.
11. Andreev M. V., Askarov A., Suvorov A. Design of the magnetic hysteresis mathematical model based on Preisach theory. *Electrical Engineering*. 2019, vol. 101, no. 4, pp. 3 – 9. DOI: 10.1007/s00202-018-0751-3.
12. Ling W., Ba J., Carcione J. M., Zhang L. Poroacoustoelasticity for rocks with a dual-pore structure. *Geophysics*. 2021, vol. 86, no. 1, pp. MR17 – MR25. DOI: 10.1190/geo2020-0314.1.
13. Sajeva A., Capaccioli S. Including Plastic Strain Into the Discrete Preisach-Mayergoyz Space: Application to Granular Media. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2019, vol. 124, no. 11, pp. 10983 – 10998. DOI: 10.1029/2019JB017833.
14. Tang J., Wang H., Li J., Su W., Guan J. Nonlinear hysteretic evolution characteristics of rock deformation and permeability. *Shiyou Diqui Wuli Kantan / Oil Geophysical Prospecting*. 2017, vol. 52, no. 3, pp. 509 – 515. DOI: 10.13810/j.cnki.issn.1000-7210.2017.03.013.
15. Sajeva A., Capaccioli S. A discrete formulation of the elasto-plastic Preisach-Mayergoyz space with variable pressure step. *81st EAGE Conference and Exhibition 2019*, London. 2019. DOI: 10.3997/2214-4609.201901031.
16. Sajeva A., Filograsso R., Capaccioli S. Including plastic behaviour in the Preisach-Mayergoyz space to find static and dynamic bulk moduli in granular media. *2018 SEG International Exposition and Annual Meeting, SEG 2018*, Anaheim. 2019, pp. 3517 – 3521. DOI: 10.1190/segam2018-2994837.1.
17. Danilin A. N., Vinogradov A. A., Karnet Yu. N. Models of hysteresis, a brief survey. *Mechanics of composite materials and structures*. 2016, vol. 22, no. 2, pp. 295 – 308.
18. Zsurzsan T-G., Andersen M. A. E., Zhang Z., Andersen N. A. Preisach model of hysteresis for the Piezoelectric Actuator Drive. *Proceedings of the 41st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society IEEE*. 2015, pp. 2778 – 2783. DOI: 10.1109/iecon.2015.7392524.
19. Aleshin V. V., Van Den Abeele K. Preisach description for solids with frictional cracks. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018, vol. 104, pp. 28 – 38.
20. Eichler J., Novak M., Kosek M. Experimental – Numerical Method for Identification of Weighting Function in Preisach Model for Ferromagnetic Materials. *21st International Conference on Applied Electronics, AE 2016*. 2016, pp. 75 – 80.
21. Khandelwal A., Chakrapani S. K. Nonclassical nonlinear elasticity of crystalline structures. *Physical Review E*. 2021, vol. 104, no. 4, article 045002. DOI: 10.1103/PhysRevE.104.045002.

22. Kus V., Dolejs E. Elasticity index evaluation based on le Cam divergence and kernel density estimator in PM space. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021, vol. 1730, no. 1, article 012008. DOI: 10.1088/1742-6596/1730/1/012008.

23. Pecorari C. Modeling the elasto-acoustic hysteretic nonlinearity of dry Berea sandstone. *Wave Motion*. 2015, vol. 52, pp. 66 – 80. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.09.001.

24. Renaud G., Rivière J., Larmat C., Rutledge J. T., Lee R. C., Guyer R. A., Stokoe K., Johnson P. A. In situ characterization of shallow elastic nonlinear parameters with Dynamic Acoustoelastic Testing. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2014, vol. 119, no. 9, pp. 6907 – 6923. DOI: 10.1002/2013JB010625.

25. Tencate J. A. Nonlinear resonant ultrasound spectroscopy: Assessing global damage. *Nonlinear ultrasonic and vibro-acoustical techniques for nondestructive evaluation*. Springer International Publishing. 2018, pp. 89 – 101. DOI: 10.1007/978-3-319-94476-0_2.

26. Vysotin N. G. The elastic hysteresis of rocks of different nature. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2022, no. 5-2, pp. 72 – 79. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_52_0_72.

27. Belozеров I. P., Gubaidullin M. G. Concept of technology for determining the permeability and porosity properties of terrigenous reservoirs on a digital rock sample model. *Journal of Mining Institute*. 2020, vol. 244, pp. 402 – 407. DOI: 10.31897/PMI.2020.4.2.

28. Vysotin N. G. The specific non-linear elastic hysteresis of rocks under cyclic uniaxial Tension. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2021, no. 4-1, pp. 148 – 157. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_41_0_148.

29. Vinnikov V. A., Vysotin N. G. Method of testing on the static module for the elasticity of mineral rocks with using the results of laser-ultrasonic spectroscopy. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2018, no. S1, pp. 90 – 101. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-1-1-90-101.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Высотин Николай Геннадьевич*¹ – старший преподаватель, e-mail: n.vysotin@misis.ru, ORCID ID: 0000-0002-3011-053X,

*Винников Владимир Александрович*¹ – д-р физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой,

e-mail: evgeny.vinnikov@gmail.com, Scopus Author ID: 23037295300,

¹ НИТУ «МИСиС».

Для контактов: Высотин Н.Г., e-mail: n.vysotin@misis.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*N.G. Vysotin*¹, Senior Lecturer,

e-mail: n.vysotin@misis.ru,

ORCID ID: 0000-0002-3011-053X,

*V.A. Vinnikov*¹, Dr. Sci. (Phys. Mathem.),

Assistant Professor, Head of Chair,

e-mail: evgeny.vinnikov@gmail.com,

Scopus Author ID: 23037295300,

¹ National University of Science and Technology «MISIS»,

119049, Moscow, Russia.

Corresponding author: N.G. Vysotin, e-mail: e-mail: n.vysotin@misis.ru.

Получена редакцией 03.05.2023; получена после рецензии 15.07.2023; принята к печати 10.10.2023.

Received by the editors 03.05.2023; received after the review 15.07.2023; accepted for printing 10.10.2023.