УДК 622.33.002.5

Л.В. Кулецкий, А.М. Балабышко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ МОДУЛЯТОР ДИНАМИЧЕСКОГО РОТОРНОГО ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОГО ДИСПЕРГАТОРА С УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Семинар № 16

На сегодняшний день приведено достаточно доказательств того, что динамический роторный гидромеханический диспергатор (ДРГМД) с упругим элементом, соединяющим валы роторов аппарата и привода, удовлетворяет всем признакам автоколебательной системы. Для построения математической модели, описывающей автоколебания ротора ДРГМД и скорость течения жидкости через модулятор, примем следующую физическую модель.

Пусть на ротор действуют следующие моменты сил:

- момент упругих сил со стороны упругого элемента $M_{уп}= c\varphi$, где c – коэффициент упругости кручения, φ – угловое смещение от положения равновесия ротора аппарата относительно вращающейся системы координат;

- момент сил Кориолиса, возникающий вследствие радиального течения жидкости в патрубке вращающегося ротора $M_{кор}=Z_c\rho l_{р.э.}a_p h w_0 v(t)$, где ρ – плотность жидкости; $l_{р.э.}=l_p+l_{пр}$ – эффективная длина ротора равная сумме длины патрубка в боковой стенке ротора и присоединенной длине на входе в патрубок ротора, которая возникает при нестационарных течениях и физически следует из-за наличия присоединенной массы; a_p – ширина патрубка ротора; h – высота патрубка ротора; w_0 – скорость вращения привода, $v(t)$ – переменная скорость течения жидкости за период; t – время; Z_c – число патрубков в статоре, равное числу патрубков в роторе, которые открывают на данном периоде модуляции патрубки статора, остальные $Z_p – Z_c$ патрубков ротора являются закрытыми, естественно, при эквидистантном расположении патрубков на боковой рабочей поверхности ротора и статора. Если $N = Z_p/Z_c$, то $Z_p – Z_c = (N-1)\, Z_c$, где N, как правило, целое число. В этом случае все патрубки статора идентичны: они начинают открываться и закрываться одновременно.

Допустим, что дополнительный момент сил вязкого сопротивления в зазоре, который определяется только дополнительными колебаниями ротора, пропорционален колебательной скорости:

$$M_{соп} = k\frac{d\varphi}{dt} = k\dot{\varphi} \qquad (1)$$

где $к$ – коэффициент увлечения жидкости в полости ротора, зависящий от объемного расхода жидкости через аппарат, формы внутренней полости ротора, вязкости жидкости.

При вышеуказанной физической модели запишем уравнение колебаний ротора относительно лабораторной системы отсчета:

$$J\ddot{\varphi} = M_{кор} - k\dot{\varphi} - c\varphi, \qquad (2)$$

где $\ddot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2$; J - сумма приведенных моментов инерции колебательной системы и присоединенной массы жидкости.

Приведенный момент инерции роторов аппарата $I_а$ и привода $I_п$ вычислим по формуле:

$$I_{кс} = \frac{J_a}{1 + J_n / J_a} \qquad (3)$$

Здесь предполагается, что $I_п >> I_а$, хотя последнее выражение не ограничено приведенным неравенством. Оно справедливо для любого соотношения моментов инерции роторов.

Для вычисления момента инерции присоединенной массы жидкости допустим, что масса жидкости в зазоре между ротором и статором много меньше массы жидкости в полости ротора и ею мы будем пренебрегать. Присоединенную массу жидкости в полости ротора вычислим из кинетической энергии вращающейся жидкости:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{D_{вх}}{2}}^{R_p - l_p} w_0^2 dJ_{пж} = \int\limits_{\frac{D_{вх}}{2}}^{R_p - l_p} w_0^2 k \rho r^2 \pi r dr H_в =$$

$$= \pi k \rho H_в w_0^2 \int\limits_{\frac{D_{вх}}{2}}^{R_p - l_p} r^3 dr = \qquad (4)$$

$$= \frac{\pi k w_0^2}{4} \rho H_в [(R_p - l_p)^4 - \left(\frac{D_{вх}}{2}\right)^4].$$

Отсюда следует, что момент инерции присоединенной массы жидкости в полости ротора вычисляется из выражения:

$$J_{пж} = \frac{\pi k}{2} \rho H_в \times$$

$$\times [(R_p - l_p)^4 - \left(\frac{D_{вх}}{2}\right)^4] \qquad (5)$$

где r – радиальная координата; $H_в$ – высота полости ротора; $D_{вх}$ – внутренний диаметр входного патрубка в аппарат; R_p – радиус внешней рабочей поверхности ротора.

Проведя алгебраические преобразования, формула (2) примет вид:

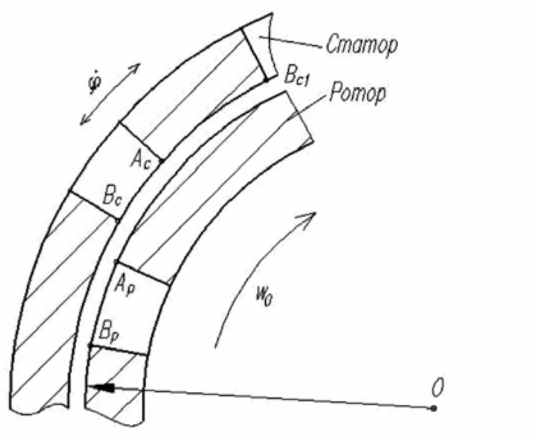
$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = f_0 (w_0 + \dot{\varphi}) v(t), \qquad (6)$$

где $\beta = k/2J$ $\Omega_0^2 = c/J$; $f_0 = \rho\ l_{р.э} a_p h/J$ – в нашей физической модели постоянные.

Скорость течения жидкости в патрубке статора $v(t)$ определим из уравнения Коши-Лагранжа [1] при развитом турбулентном (автомодельном) течении, которое наблюдается при значении модифицированного критерия Рейнольдса $Re_{0c} = v_0 d_{эс} \rho/\mu > 500$ [2], где $v_0 = (2\Delta P/\rho)^{1/2}$ – скорость течения идеальной жидкости с плотностью ρ при разности давления жидкости на моду-ляторе ΔP; $d_{эс} = 4S_c/П_c$ – эквивалентный гидравлический диаметр патрубка статора; $S_c = a_c h$ – площадь проходного сечения патрубка статора шириной a_c и высотой h, в данном случае равной высоте патрубка ротора; $П_c = 2(a_c + h)$ – смачиваемый периметр нормального сечения патрубка статора.

$$\frac{dv'}{dt'} = Ho\left[1 - \xi(\varphi', \dot{\varphi}', t') v'^2_c (\dot{\varphi}, t')\right], \qquad (7)$$

где $\varphi' = \varphi/w_0 t_0$; v_c – скорость течения жидкости в патрубке статора; $Ho = v_0 t_0/2l$ – критерий гомохронности, харак-



К уточнению площади проходного сечения диафрагмы модулятора динамического роторного ГМД

теризующий нестационарность процесса течения жидкости; $t_0 = a_c/w_0R_p$ – масштаб времени; l - эквивалентная длина модулятора; $\xi(\varphi',\dot{\varphi}',t')$ - коэффициент гидравлического сопротивления модулятора, зависящий от относительных углового смещения φ' от положения равновесия во вращающейся системе координат, колебательной скорости $\dot{\varphi}'$ и относительного времени.

Искомая скорость в патрубке ротора определяется из уравнения непрерывности несжимаемой жидкости

$$v_c a_c h = v_p a_p h. \tag{8}$$

Откуда следует

$$v_p = v_c a_c / a_p = v_c / A. \tag{9}$$

Допустим, что коэффициент гидравлического сопротивления ξ при нестационарном течении несжимаемой жидкости ($l/v_{зв}$<<Т, что всегда выполняется; Т – период модуляции, $v_{зв}$ - скорость звука в жидкости) равен коэффициенту гидравлического сопротивления при стационарном течении. В несжимаемой жидкости скорость возмущения равна бесконечно большой величине, и говорить о фронте волны некорректно, и, тем более, об его искажении при нестационарном течении – источнике зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от ускорения.

Исходя из справочной литературы для гидравлических сопротивлений получим выражение для коэффициента гидравлического сопротивления модулятора:

$$\xi_{кв} = \xi_{вх} + \left(\frac{1}{(\varepsilon S') - 1}\right)^2 + \xi_{вых}\ , \tag{10}$$

где $\xi_{вх} = const = 1;\ \xi_{вых} = const = 0,5;$

$$\varepsilon = 0,57+0,043/(1,1-S') \tag{11}$$

$$S' = \delta' + \begin{cases} (1+\dot{\varphi})t', & 0 \le t' \le t_1',\ \ S'(t_1') = 1 \\ S'(t_1') - (1+\dot{\varphi})t', & t_1 \le t' \le t_2',\ \ S'(t_2') = \delta'. \end{cases} \tag{12}$$

где $t' = t / t_0;\ \delta'=\delta/a_c$; δ – величина радиального зазора между ротором и статором; $S'= S_{дф}(t')/S_{0c};\ v'=v/v_0$; t_1 и t_2 определим ниже. Очевидно, что $(S_{дф}(t))_{max} = a_c h$, тогда $(S'(t'))_{max} = 1$.

Выражение для определения $S'(t')$ представляет собой кинематическое уравнение движения внешней рабочей боковой поверхности ротора относительно статора и его неподвижных патрубков. При рассмотрении движения патрубков ротора относительно патрубков статора возможны три варианта: $a_p>a_c\ (A>1);\ a_p = a_c\ (A = 1);\ a_p<a_c\ (A<1)$. Практический интерес представляют только два первых варианта: $A\geq 1$.

При движении ротора от начального момента времени $t_0 = 0$ до t_1 площадь проходного сечения диафрагмы модулятора $S(t) = a_p(t)h$, где $a_p(t)$ – переменная ширина прямоугольной диафрагмы высотой h; $S'(t') = ha_p(t)/a_ch = a_p(t)/a_c$, а величину $a_p(t)$ можно найти из следующего дифференциального уравнения

$$\frac{da_p}{dt} = (w_0 + \dot{\varphi})R_p, \tag{13}$$

с начальными условиями в общем виде:

$$t = t_0;\ \varphi = \varphi(t_0) \tag{14}$$

откуда

$$a_p(t) = R_p[w_0(t-t_0) + \varphi(t) - \varphi(t_0)]. \tag{15}$$

В частности, при $t_0 = nT,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, получим:

$$a_p(t) = R_p[w_0(t-nT) + \varphi(t) - \varphi(nT)], \tag{16}$$

а при $n = 0$

$$a_p(t) = R_p[w_0 t + \varphi(t)]. \tag{17}$$

Тогда с учетом решения дифференциальных уравнений (13) и (14), описывающих изменение ширины диафрагмы $a_p(t)$, выражение для величины $S'(t')$ примет вид:

$$S'(t') = \begin{cases} R_p[w_0(t-t_0)+\varphi(t)-\varphi(t_0)]/a_c, & nT' \le t' \le nT'+t'_1; \\ 1, & nT'+t'_1 \le t' \le nT'+t'_2; \\ 1-R_p[w_0(t'-t'_2)+\varphi(t')-\varphi(t'_2)]/a_c, & nT'+t'_2 \le t' \le nT'+t'_3; \\ \delta', & nT'+t'_3 \le t' \le (n+1)T'. \end{cases} \qquad (18)$$

Для уточнения формул (12) и (18) для площади проходного сечения диафрагмы рассмотрим относительное движение боковых стенок ротора и статора (рис. 1). За начало отсчета периода модуляции примем момент времени, когда совпадают точки $А_р$ и $В_с$ (они находятся на одном радиусе вращения) и начинается процесс открывания патрубка статора, тогда t_1 в формулах (12) и (18) соответствует моменту времени совпадения точек $А_р$ и $А_с$, когда заканчивается процесс открывания патрубка статора, t_2 – моменту времени совпадения точек $В_р$ и $В_с$, когда заканчивается промежуток времени истечения жидкости через открытый патрубок статора, t_3 – соответственно точек $В_р$ и $А_с$, когда заканчивается процесс закрывания патрубка статора, t_4 – момент времени, когда процесс модуляции заканчивается и точка $А_р$ совпадает с точкой $В_{с1}$ и процесс модуляции приходит в исходное динамическое состояние, эквивалентное совпадению точек $В_р$ и $В_с$.

В заключение заметим, что для дифференциального уравнения, описывающего колебательный процесс, наличие нелинейности для члена, содержащего первую производную, ведет к возникновению устойчивых автоколебаний, которые описываются уравнениями (6), (7), (10), (11), (18), и условием периодичности функций $\xi_{кв}(t) = \xi_{кв}(t+T)$, отсюда следует, что $v(t) = v(t+T)$, $\varphi(t) = \varphi(t+T)$, замыкающие задачу по определению колебаний ротора и скорости течения через модулятор динамического роторного гидромеханического диспергатора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балабышко А.М., Карепанов С.К., Юдаев В.Ф.* Механизм автоколебаний подвижных элементов роторного аппарата. Сборник трудов Х1У Международной конференции «Математические методы в технике и технологии». Т. 6, Смоленск, 2001 г.

2. *Юдаев В.Ф.* Переходный режим течения жидкости через модулятор роторного аппарата. Строительные материалы, оборудование, технологии ХХ1 века. № 12, 2002 г., с. 27.

Коротко об авторах

Кулецкий Л.В.,
Балабышко А.М – профессор, доктор технических наук,

кафедра «Горные машины и оборудование», Московский государственный горный университет.