УДК 517.913:538.566

В.К. Балханов, А.Д. Номинов

СВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ К ДВУМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Известно, что численное решение дифференциального уравнения второго порядка требует осторожного обращения с разностными методами [1]. Это связано как с довольно быстрым накоплением ошибок округления, так и громоздкостью самих численных решений. Мы покажем, как некоторые уравнения можно свести к двум уравнениям первого порядка, для которых перечисленные трудности не так актуальны.

В качестве иллюстрации общего метода рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$y'' + A(x)y' + iB(x)y = 0, \qquad (1)$$

где A и B - действительные функции переменной x, а штрих ’ означает дифференцирование по x. Наш метод заключается в поиске его решения в виде экспоненты:

$$y = \exp(\int u\,dx - i\int v\,dx). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и разделения действительной и мнимой частей, получаем систему зацепляющихся уравнений первого порядка:

$$u' + u^2 - v^2 + A\,u = 0,$$
$$v' + 2\,u\,v + A\,v - B = 0.$$

Здесь заметим, что если A и B - постоянные, то постоянными будут и функции u и v. Мы не будем заниматься известным анализом пригодности и устойчивости численного решения. Заметим только, что уже простой метод Эйлера, когда производная заменяется разностным соотношением, дает вполне приемлемый результат. Рассмотрим конкретный пример из радиогеофизики [2], где уравнение (1) имеет следующий вид:

$$H'' + \frac{R'}{R}H' + \frac{2\,i}{R}H = 0. \qquad (3)$$

Здесь $R = \rho(z)/\rho_0$, где ρ – удельное электрическое сопротивление, $Ом \cdot м$, $\rho_0 = \rho(0)$, $z = x\sqrt{2\rho_0/w}$ – глубина, *м*, где x – безразмерная приведенная переменная, w – круговая частота, *Гц*. Решение (3) будем искать в виде следующей экспоненты:

$$H = \exp\left(\int \frac{U}{R}dx - i\int \frac{V}{R}dx\right), \qquad (4)$$

где U и V - действительные функции. Поскольку при $z = 0$ будет $R_0 = 1$, то для импеданса $\delta = -\sqrt{\rho_{eff}}e^{i\varphi} = -(\ln H)'$ получаем

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2}w\,\rho_0}\left(U_0 - iV_0\right),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \rho_{eff} &= \rho_0\frac{U_0^2 + V_0^2}{2} \\ \psi &= -arctg\frac{V_0}{U_0} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Подставляя (4) в (3) и разделяя действительные и мнимые части, приходим к следующей системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} R\,U' &= V^2 - U^2 \\ V' &= 2\left(1 - U\,V/R\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Чтобы их решить, необходимо задать граничные условия на некоторой глубине h. Будем считать, что начиная с этой глубины h среда становится однородной с удельным сопротивлением ρ_N. В этой точке, очевидно, $U' = V' = 0$, и из (6) находим

$$U_N = V_N = \sqrt{R_N}, \qquad (7)$$

- искомое граничное условие.

Если Δx - шаг численного решения, то (6) в конечных разностях примет вид

$$R_n \frac{U_n - U_{n-1}}{(-\Delta x)} = V_n^2 - U_n^2,$$

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{(-\Delta x)} = 2\left(1 - \frac{U_n V_n}{R_n}\right).$$

Знак “–” в знаменателе связан с тем, что счет по z идет от $-h$ до 0. Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} U_{n-1} &= U_n + \left(V_n^2 - U_n^2\right)\Delta x / R_n \\ V_{n-1} &= V_n + 2\Delta x\left(1 - U_n V_n / R_n\right) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Число интервалов $N = \frac{h}{\Delta x}\sqrt{\frac{w}{2\rho_0}}$, или, если задавать N и положить $w = 2\pi F$, то

$$\Delta x = \frac{1}{503.3}\frac{h(“)}{N}\sqrt{\frac{F(\partial љ)}{\rho_0(м“·“)}}. \qquad (9)$$

Заметим, что в выше приведенных формулах электромагнитные постоянные вакуума были положены равными единице. При переходе к формуле (9) эти постоянные необходимо учитывать, что отражено в численном коэффициенте.

Рассмотрим случай линейной зависимости ρ от x. Для параметра R в этом случае получаем

$$R_n = 1 + \left(\frac{\rho_N}{\rho_0} - 1\right)\frac{n}{N}. \qquad (10)$$

Решая систему (8), сначала находим U_0 и V_0, а затем, по (5), ρ_{eff} и ψ. Все результаты сведем в таблицу.

F, Гц	1	10	100	1000
$\rho_{эфф}$, $Ом \cdot м$	955	825	552	300
ψ, *град*	-43.7	-40.3	-34.7	-32.6

Предложенный метод интегрального преобразования обладает высокой эффективностью. Он позволяет свести дифференциальные уравнения второго порядка к дифференциальным уравнениям первого порядка, численное решение которых обладает простой структурой. Результаты рассмотренного выше примера полностью совпадают с известным решением аналогичной задачи [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. - М.: Наука, 1987. с.600.
2. *Башкуев Ю.Б.* Электрические свойства природных слоистых сред. Новосибирск, 1996. с.208.

Коротко об авторах

Балханов Василий Карлович – аспирант, Бурятский научный центр СО РАН, г. Улан-Удэ

Номинов А.Д. – Институт математики и информатики Бурятского государственного университета.

Д И С С Е Р Т А Ц И И

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	*Название работы*	*Специальность*	*Ученая степень*
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ			
КЛИМЕНКОВА Светлана Богдановна	Совершенствование технологии селективного извлечения компонентов из рассолов на основании изучения их физико-химических параметров	25.00.13	к.т.н.