© В.И. Киреев, 2006

УДК 622.1

В.И. Киреев

СГЛАЖИВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Семинар № 2

1. Вводные замечания

В практике научных теоретических и экспериментальных исследований, в том числе при обработке данных, полученных при разведке и эксплуатации месторождений полезных ископаемых, используются математические методы сглаживания этих данных. Так, в учебном пособии П.С. Шпакова и В.Н. Попова [5] указано, что при проведении ответственных экстраполяций и в случае, когда имеется ограниченное количество исходных данных, или для более точного прогнозирования результатов используется аналитическое сглаживание на основе метода наименьших квадратов. В указанном пособии приведен пример сглаживания зависимости удельного расхода электроэнергии от глубины скважины, полученной при бурении, используется метод наименьших квадратов с помощью линейного и квадратичного полиномов, а также двухпараметрических (показательных) функций. Здесь также отмечен интегральный показатель (критерий) точности аппроксимации (сглаживания). Этим критерием является равенство сумм площадей трапеций, образованных полигоном распределения до сглаживания и соответствующих сумм после сглаживания. Однако, используемый обычно для сглаживания метод наименьших квадратов, не учитывает вышеуказанного интегрального критерия. Поэтому для решения таких задач целесообразно использовать сплайн-функции [1, 2, 3, 4].

В данном докладе для сглаживания экспериментальных данных, приведенных в пособии [5], использован параболический интегро-дифферен-циальный сплайн, предложенный автором в работе [2] (и других) и подробно изложенным в методическом пособии [3]. В данном методе интегральный критерий соответствия аппроксимирующей и аппроксимируемой функций является непосредственно условием согласования. В связи с этим сплайн-метод представляет несомненное преимущество по сравнению с традиционным методом наименьших квадратов.

2. Одномерные параболические интегро-дифференциальные многочлены и локальные интегро-диффе-ренциальные сплайны

Интегро-дифференциальные сплайны $S_2(x)$ основаны на использовании одномерных параболических многочленов $S_{2,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}(x - x_i) + a_{2,i}(x - x_i)^2$, получаемых на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Для их получения используется интегральное условие согласования (интегральная невязка) много-члена и аппроксимируемой функции $f(x_i)$ в совокупности с функциональными условиями согласования (условиями интерполяции):

$$\delta S_{2,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{2,i}(x) - f(x)]dx = 0 \qquad (2.1)$$

$$\delta S_{2,i}^{(0)}(x_k) = S_{2,i}(x_k) - f(x_k) = 0 \qquad (2.2)$$
$$(k = i, i+1),$$

где x_i – узлы сетки $\Delta_1 : a = x_0$ р x_1 р ..... р $x_n = b$, введенной на отрезке $[a,b]$.

После разрешения условий (2.1), (2.2) относительно коэффициентов $a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}$, получается формула интерполяционного многочлена на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_{2,i}(x) = f_i + \left(\frac{6\delta \quad I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2\Delta \quad f_i}{h_{i+1}}\right)(x - x_i) +$$
$$+\left(-\frac{6\delta \quad I_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} + \frac{3\Delta \quad f_i}{h_{i+1}^2}\right)(x - x_i)^2, \qquad (2.3)$$

где

$$\delta I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - f_i h_{i+1}, \quad \Delta f_i = x_{i+1} - x_i,$$
$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i.$$

Если объединить $S_{2,i}(x)$ на всех частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, ..., n-1)$, рассматривая их в качестве звеньев сплайна, то получится *локальный* интерполяционный параболический интегро-дифференциальный сплайн (ИД - сплайн) дефекта $q = 2$ на отрезке $[a,b]$, на котором задана аппроксимируемая функция:

$$S_{2,l}(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{2,i}(x) \qquad (2.4)$$

3. Одномерные глобальные параболические интегро-дифференциаль-ные интерполяционные и сглаживающие сплайны.

Пусть аппроксимируемая функция $f(x)$ задана в узлах Δ_1 с некоторой погрешностью $\langle f_i = f(x_i) \pm \varepsilon_i \rangle_{i=0}^n$, где $\varepsilon_i (i = 0....n)$ – погрешности ее измерений или вычисления.

Построим глобальный параболический ИД - сплайн $S_2(x)$ с узлами на сетке Δ_1, имеющий для $f(x) \in C_{[a,b]}^m$ $(m \geq 3)$ погрешность аппроксимации $\|S_2(x) - f(x)\| = \max_{x \in [a,b]} |S_2(x) - f(x)|$, не превышающую $O(H^3)$ и удовлетворяющий условиям:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_2(x) \quad dx = I_i^{i+1}, \quad i = 0,1,....n-1 \qquad (3.1)$$

- интегральному условию согласования, где интегралы I_i^{i+1}, входящие в правую часть (3.1), заданы или предварительно вычислены на всех частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, образуемых сеткой Δ_1, и

$$S_2^{(p)}(x)\Big|_{x=x_i}^{[x_{i-1}, x_{i_j}]} = S_2^{(p)}(x) \Big|_{x=x_i}^{[x_i, x_{i+1}]}, \qquad (3.2)$$
$$(p = 0,1; \quad i = 1,2,....n-1)$$

- условиям непрерывности сплайна и его первой производной в узлах сетки Δ_1.

Параболический сплайн, удовлетворяющий условиям (3.1), (3.2) , имеет дефект $q = 1$. Данный сплайн может использоваться для различных условий (3-х случаев) задания исходной функции.

1) В случае, когда исходная (аппроксимируемая) функция на всем отрезке $[a,b]$ задана не своими значениями $f(x_i)$, а значениями ее интегралов на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ (x_i , $i = 0,1,....n$ - узлы сетки Δ_1): $I_0^1, I_1^2, I_2^3, ...I_{n-1}^n$.

2) В случае, когда исходная функция задана своими значениями в узлах x_i и на всем отрезке $[a,b]$ она имеет погрешности ε_i, не превышающие $O(H^3)$ (это возможно, например, тогда, когда

эта функция рассчитана в численном эксперименте).

3) В случае, если исходная функция получена в физическом эксперименте и имеет большой разброс, т.е. ε_i f f $O(H^3)$.Тогда данная методика представляет альтернативу методу наименьших квадратов (м.н.к.), а получающийся сплайн или метод называются *сильно сглаживающими.*

Вернемся теперь непосредственно к рассмотрению методики получения сплайн - функций применительно ко второму и третьему случаю сглаживания исходной функции.

Одномерные параболические интегро-дифференциальные сплайны основаны на многочленах $S_{2,i}(x)$ (2.3). Записывая при $p=1$ условие (3.2) для многочлена (2.3), получаем при фиксированном индексе i соотношение относительно сглаженных значений $\text{ƒ}_{i-1}, \text{ƒ}_i, \text{ƒ}_{i+1}$:

$$\frac{1}{h_i}\text{ƒ}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_{i+1}}\frac{1}{h_{i+1}}\right)\text{ƒ}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\text{ƒ}_{i+1} =$$

$$= 3\left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{I_{i-1}^{i}}{h_i^2}\right) \qquad (3.3)$$

Если это соотношение записать для всех внутренних узлов с индексами $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то получается линейная алгебраическая система уравнений, которая позволяет при задании двух дополнительных (граничных) условий восстанавливать значения функций по известным интегралам $I_i^{i+1}\left(i = 0, \ldots, n-1\right)$. В качестве этих дополнительных условий можно принять значения функций $\text{ƒ}_0 = f_0, \text{ƒ}_n = f_n$ (для случая 2, либо случая 3) или интегральные соотношения, соответствующие квадратурным формулам трапеций или парабол (для случая 1). Тогда методика слабого или сильного сглаживания состоит в следующем.

1). По заданным значениям f_i в узлах x_i рассчитываются интегралы по каждому из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, 1, \ldots. n-1$ и, таким образом, составляется таблица интегралов (интегральная функция)

Полученная интегральная функция используется в дальнейшем для получения новых (сглаженных) значений функций, по которым будут формироваться звенья сплайна. В случае, когда исходная функция задана с большим разбросом, то для получения интегральной функции необходимо предварительно сформировать полосу «разброса» исходной функции $f_i = f\left(x_i\right) \pm \varepsilon_i$, ограниченную двумя фун-кциями – “верхней“ $y_i^в = f^{(в)}\left(x_i\right)$ и «нижней» $y_i^н = f^{(н)}\left(x_i\right)$.

Далее на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, 1, \ldots. n-1$ по одной из квадратурных формул (трапеций или парабол) вычисляются интегралы $I_i^{i+1(в)}$ и $I_i^{i+1(н)}$ для функций $y_i^в = f^{(в)}\left(x_i\right)$ и $y_i^н = f^{(н)}\left(x_i\right)$ соответственно. Недостающие значения функций на линиях, ограничивающих “полосу разброса”, определяются путем дополнительной интерполяции. После этого по всем частичным отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$ находятся средние значения интегралов

$$I_i^{i+1} = \frac{1}{2}\left(I_i^{i+1(в)} + I_i^{i+1(н)}\right), \quad i = 0, 1, \ldots n-1 .$$

Эти значения интегралов в совокупности и составляют интегральную функцию.

2) Из трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений

$$\hat{f}_0 = \bar{f} \qquad (3.4)$$

$$\frac{1}{h_i}\hat{f}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_{i+1}}\frac{1}{h_{i+1}}\right)\hat{f}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\hat{f}_{i+1} =$$

$$= 3\left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{I_{i-1}^{i}}{h_i^2}\right), \ (\ i = 1,2,.....n-1) \qquad (3.5)$$

$$\hat{f}_0 = \bar{f}_n \qquad (3.6)$$

находятся новые (сглаженные) значения функции $\hat{f}_i$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, которые в дальнейшем формируют параболический интегро-дифференциальный сплайн дефекта $q = 1$. В системе (3.4–3.6), все внутренние уравнения соответствуют уравнению (3.3), которое получено из условия непрерывности первой производной, а $\bar{f}_0$ и $\bar{f}_n$ для первого и последнего соотношений выбираются, исходя из характера аппроксимируемой функции. В частности, в некоторых случаях они могут быть равными f_0 и f_n - исходным значениям функции $y_i = f(x_i)$ в концевых точках.

Алгебраическая система (3.4)- (3.6) является трехдиагональной и, в силу диагонального преобладания, процесс ее решения является устойчивым.

3). Подставляя значения $\hat{f}_i$ и $\delta I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - \hat{f}_i h_{i+1}$ в формулу (2.3), получим

$$S_{2,i}(x) = \hat{f}_i + \left(\frac{6\delta \ \ I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2\Delta\hat{f}_{i+1}}{h_{i+1}^2}(x - x_i) + \right.$$

$$\left. + (-\frac{6\delta I_i^{i+}}{h_{i+1}^3} + \frac{3\Delta\hat{f}_{i+1}}{h_{i+1}^2}\right)(x - x_i)^2 \qquad (3.7)$$

По этой формуле на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,.....n-1$, находим звенья сплайна $S_{2,i}(x)$.

4). На последнем этапе из полученных звеньев $S_{2,i}(x)$ формируется параболический интегро-дифференциальный сплайн $S_2(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{2,i}(x)$

4. Пример сглаживания зависимости удельного расхода электроэнергии от глубины скважины параболическим интегро-дифференциальным сплайном

В работе [5] приведен пример выбора оптимальной сглаживающей кривой для экспериментальной зависимости удельного расхода электроэнергии от глубины скважины. Аналитическое сглаживание в этой работе осуществляется методом наименьших квадратов с использованием степенных базисных функций $1, x, x^2, \ldots, x^m$ многочленами первой и второй степеней $(S_1(x) = a_1 + a_1 x\ ),\ S_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2)$, а также в виде двухпараметрических зависимостей $S = a_1 a_2^x$ и $S = a_1 x^{a_2}$. Для исследования качества сглаживания взята функция, характеризующаяся данными, приведенными в таблице 3.1 пособия [5] (2-я и 3-я строки табл. 1).

Ниже для этой экспериментальной зависимости вычисляется сглаживающий параболический интегро-дифференциальный сплайн. Все вычисления производятся в соответствии с вышеописанным алгоритмом построения сплайна .

1). Формируется табл. 1 с заданной сеточной функцией и интегралами, рассчитанными по квадратурной формуле трапеций $I_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}}{2}(f_i + f_{i+1})$.

2) Формируется и решается система линейных алгебраических уравнений относительно сглаженных значений. В

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	5,6	6,4	7,3	8,4	9,3	9,7	10,4	11,0	12,3	13,4
f_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,7	2,4	3,7	4,4
h_{i+1}	0,8	0,9	1,1	0,9	0,4	0,7	0,6	1,3	1,1	
I_i^{i+1}	0,32	0,54	0,88	0,9	0,48	1,05	1,23	3,965	4,455	

качестве линейной системы здесь используются уравнения (3.4)-(3.6), только вместо первого и последнего уравнений взяты более точные (см. работу [3]). ***Тогда первое и второе уравнения имеют вид:***

$$\hat{f}_0 + \frac{h_1 + h_2}{h_2}\hat{f}_1 = \frac{h_1^2}{h_1 + h_2}\left(\frac{2(h_1 + h_2) + h_1}{h_1^3} I_0^1 + \frac{1}{h_2^2} I_1^2\right) \quad (i = 0),$$

$$\frac{1}{h_1}\hat{f}_0 + 2\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\hat{f}_1 + \frac{1}{h_2}\hat{f}_2 = 3\left(\frac{I_0^1}{h_1^2} + \frac{I_1^2}{h_2^2}\right) \quad (i = 1).$$

Аналогично могут быть записаны и остальные уравнения. Выполняя подстановку соответствующих шагов h_i и интегралов I_i^{i+1}, приведенных в табл. 1, получим систему алгебраических уравнений:

$$\hat{f}_1 + 1,(8)\hat{f}_2 = 1,2392$$

$$1,25\hat{f}_1 + 4,7(2)\hat{f}_2 + 1,(1)\hat{f}_3 = 3,5,$$

$$1,(1)\hat{f}_2 + 4,(04)\hat{f}_3 + 0,9(09)\hat{f}_4 = 4,(18),$$

$$0,9(09)\hat{f}_3 + 4,(04)\hat{f}_4 + 1,(1)\hat{f}_5 = 5,5(15),$$

$$1,(1)\hat{f}_4 + 7,(2)\hat{f}_5 + 2,5\hat{f}_6 = 12,(3), \qquad (4.1)$$

$$2,5\hat{f}_5 + 7,8571\hat{f}_6 + 1,4286\hat{f}_7 = 15,4286,$$

$$1,4286\hat{f}_6 + 6,1905\hat{f}_7 + 1,(6)\hat{f}_8 = 16,6786,$$

$$1,(6)\hat{f}_7 + 4,8718\hat{f}_8 + 0,7692\hat{f}_9 = 17,2885,$$

$$0,76923\hat{f}_8 + 3,3566\hat{f}_9 + 0,9(09)\hat{f}_{10} = 18,0839,$$

$$1,8460\hat{f}_9 + \hat{f}_{10} = 11,1398.$$

В системе (4.1) все индексы функций $\hat{f}_i$, составляющих каждое из уравнений, увеличены на единицу. Это сделано для того, чтобы систему (4.1) привести к виду

$$\alpha_i \hat{f}_{i-1} - \beta_i \hat{f}_i + \gamma_i \hat{f}_{i+1} = \delta_i, \quad \alpha_1 = \gamma_{10} = 0,$$

удобному для ее решения методом прогонки [3]. Из системы видно, что для всех внутренних уравнений выполняется условие преобладания диагональных элементов. В соответствии с методом прогонки в его прямом ходе вычисляются прогоночные коэффициеты P_i, Q_i по формулам

$$P_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}},$$

$$Q_i = \frac{\alpha_i Q_{i-1} - \delta_i}{\beta_i - \alpha P_{i-1i}}, \quad i = 1, 2, \ldots 9$$

В процессе обратного хода искомые функции (сглаженные значения) вычисляются по формулам:

$$\hat{f}_{10} = Q_{10},$$

$$\hat{f}_{i-1} = P_{i=1}\hat{f}_i + Q_{i-1}, \quad i = 10, 9 \ldots, 2.$$

Результаты расчетов прогоночных коэффициентов и сглаженных значений $\hat{f}_i$ занесены в табл. 2.

Таблица 2

i	α_i	β_i	γ_i	δ_i	P_i	Q_i	$\hat{f}_i$
1	0	-1	1(8)	1,2392	-1,(8)	1,2392	0,2965
2	1,25	-4,7(2)	1,(1)	3,5000	-0,4706	0,8263	0,4991
3	1,(1)	-4,(04)	0,9(09)	4,(18)	-0,2585	0,9278	0,6954
4	0,9(09)	-4,(04)	1,(1)	5,5(15)	-0,2920	1,2276	0,8994
5	1,(1)	-7,(2)	2,5	12,(3)	-0,3624	1,5903	1,1240
6	2,5	-,8571	1,4286	15,4286	-0,2055	1,6477	1,2865
7	1,4286	-6,1905	1,(6)	16,6786	-0,2826	2,4292	1,7573
8	1(6)	-4,8718	0,7692	17,2885	-0,1748	3,0085	2,3774
9	0,7692	-3,3566	0,9(09)	18,0839	-0,2821	4,8941	3,6106
10	1,8460	-1	0	11,1389	------	4,3939	4,3936

3) Подставляя полученные значения $\hat{f}_i$, $\nabla I_i^{i+1} - \hat{f}_i\, h_{i+1}$ *и* h_i в формулу (3.7), на каждом отрезке $\left[x_i, x_{i+1}\right]$, $i = 0,1,\ldots,9$ находим звенья сплайна. При этом осуществляется возврат к исходному индексированию при формировании табл. 3.

В качестве примера ниже получается первое звено сплайна $S_2^{(0)}(x)$, для которого

$$a_0 = \hat{f}_0 = 0,2965, \quad a_1 = \frac{6}{h_1^2}\nabla I_0^1 - \frac{2}{h_1}\Delta \hat{f}_0 .$$

$$a_2 = -\frac{6}{h_1^3}\nabla I_0^1 + \frac{3}{h_1^2}\Delta \hat{f}_0 .$$

Выполняя соответствующие операции, для коэффициентов a_1, a_2 получим:

$$a_1 = \frac{6}{0,8^2}(0,32 - 0,8 \times 0,2965) - \frac{2}{0,8}(0,4991 - 0,2965) = 0,2697 ,$$

$$a_2 = -\frac{6}{0,8^3} \times 0,0828 + \frac{3}{0,8^2} \times 0,0828 = -0,02063 .$$

Подставляя эти значения в (3.7), получим:

$$S_2^{(0)}(x) = 0,2965 + 0,2697(x - 5,6) - 0,02063(x - 5,6)^2$$

Аналогично рассчитываются остальные звенья $S_2^{(i)}(x)$, $i = 1,\ldots 9$.

4) Из полученных в результате всех звеньев $S_2^{(i)}(x)$ формируется составная функция, представляющая параболический интегро-дифферен-

$$S_2(x) = \begin{bmatrix} 0,2965 + 0,2698(x-5,6) - 0,02062(x-5,6)^2, \textit{при} \quad 5,6 \le x \text{ р } 6,40 \\ 0,4991 + 0,236(4)(x-6,4) - 0,02038(x-6,4)^2, \quad \textit{при} \quad 6,4 \le x \text{ р } 7,3 \\ 0,6954 + 0,1997(x-7,3) - 0,01294(x-7,3)^2 \ , \textit{при} \quad 7,3 \le x \text{ р } 8,4 \\ 0,8994 + 0,1715(x-8,4) + 0,06673(x-8,4)^2 \ , \textit{при} \quad 8,4 \le x \text{ р } 9,3 \\ 1,124 + 0,3275(x-9,3) + 0,1969(x-9,3)^2 \ , \textit{при} \quad 9,3 \le x \text{ р } 9,7 \\ 1,2865 + 0,4848(x-9,7) + 0,2682(x-9,7)^2 \ , \textit{при} \quad 9,7 \le x \text{ р } 10,4 \\ 1,7573 + 0,8600(x-10,4) + 0,2892(x-10,4)^2 \quad \textit{при} \quad 10,4 \le x \text{ р } 11 \\ 2,3774 + 1,2071(x-11) - 0,19882(x-11)^2 \quad \textit{при} \quad 11 \le x \text{ р } 12,3 \\ 3,6106 + 0,9731(x-12,3) - 0,2375(x-12,3)^2 \quad \textit{при} \quad 12,3 \le x \text{ р } 13,4 \end{bmatrix}$$

Таблица 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	5,6	6,4	7,3	8,4	9,3	9,7	10,4	11,0	12,3	13,4
f_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,7	2,4	3,7	4,4
$\hat{f}_{пар}$	0,4155	0,4151	0,5304	0,8378	1,2256	1,4373	1,8061	2,2927	3,4040	4,5441
$\delta_{пар}$	0,1155	-0,085	0,1696	0,0622	0,1256	0,1373	0,1661	-0,1073	-0,296	0,1441
$\hat{f}_{идс}$	0,2965	0,4991	0,6954	0,8994	1,1240	1,2865	1,7573	2,3774	3,6106	4,3936
$\delta_{идс}$	0,0035	0,0009	0,0046	0,0006	-0,024	0,0135	-0,057	0,0226	0,0894	0,0064

циальный сплайн:

Не трудно проверить, что полученный сплайн удовлетворяет условиям согласования со значениями функции $\hat{f}_i$, приведенными в последнем столбце табл. 2, и он удовлетворяет условию непрерывности во всех внутренних узлах x_i.

3. Анализ численных результатов аппроксимации зависимости для удельного расхода электроэнергии от глубины скважины

В учебном пособии [5] проведена аппроксимация зависимости удельного расхода электроэнергии от глубины скважины. Установлено, что из четырех аппроксимационных формул

$$\hat{f}(x) = a_1 + a_2 x, \quad \hat{f}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2,$$

$$\hat{f}(x) = a_1 a_2^x \ , \quad \hat{f}(x) = a_1 x^{a_2}$$

наилучшей оказалась парабола

$$\hat{f}_{пар}(x) = ,132 - 0,905x + 0,076x^2 .$$

Отбор функции производился по минимуму суммы $\sum_{i=0}^{9} \delta_i^2$, где $\delta_i = f_i - \hat{f}_i$ - отклонению рассчитанных $\hat{f}_i$ значений от исходных значений f_i. В табл. 3 приведены результаты сравнения результатов аппроксимации рассматриваемой функции параболическим интегро-дифференциальным сплайном и вышеуказанной параболой, оптимальной в смысле $\min \sum_{i=0}^{9} \delta_i^2$.

Здесь использованы обозначения: $\hat{f}_{пар}$ - результаты аппроксимации параболой, полученной методом наименьших квадратов, $\hat{f}_{идс}$ - результаты сплайн-аппроксимации. Из сопоставления результатов видно, что интегро-дифференциальный сплайн точнее учитывает локальные свойства аппроксимируемой функции. Действительно, среднеквадратичные погрешности получаются равными

$$\sum_{i=0}^{9} (\delta_{пар}^2)_i = 0,2353, \quad a \quad \sum_{i=0}^{9} (\delta_{идс}^2)_i = 0,0097 .$$

Приведенные суммы непосредственно входят в формулу для критерия согласия (значимости) χ^2 - Пирсона, который для подобного типа наблюдений вычисляется по формуле:

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{n} (f_i - \hat{f}_i)^2 ,$$

где $\sigma^2 = D^2$ (D - дисперсия).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. Новосибирск: Наука, 1980.
2. *Киреев В.И.* Интегро-дифференциальный метод приближения функций алгебраическими многочленами // Вычислительные технологии. Новосибирск, ИВТ СО РАН т.2, №6, 1993.
3. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа. 2004.
4. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике : Наука, 1976.
5. *Шпаков П.С., Попов В.Н.* Статистическая обработка экспериментальных данных. М.: Издательство МГГУ, 2003.

Коротко об авторах

Киреев В.И. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительные машины», Московский государственный горный университет.

© А.М. Валуев, 2006

УДК 622.271

А.М. Валуев

КОМБИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ БОРТА КАРЬЕРА В ЗАДАЧАХ ГОДОВОГО И СРЕДНЕСРОЧНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Семинар № 2

Для моделирования горных работ используют три основных типа моделей: блочные, секторные и контурные [1]. В работах автора [1,2] показано, что блочные модели в их современном виде, имея достоинство приближенной передачи произвольной формы карьера, в то же самое время достаточно грубы для описания карьера с той степенью детализации, которая требуется для годового и среднесрочного планирования, причем погрешность передачи формы не может быть существенно снижена при каком угодно уменьшении размеров блоков. Секторная модель предложена И.Б. Табакманом [3] специально для задач годового планирования, при ее применении расчет объемов горных работ, массы полезного ископаемого и его компонентов выполняется достаточно удобно. Линейная форма большинства соотношений модели выгодна для решения оптимизационных задач. Однако при значительном изменении направле-

ния фронта горных работ (более чем на $\pi/6$) погрешность передачи формы карьера, и без того достаточно значительная, неограниченно возрастает.

Контурная модель обычно используется при интерактивном моделировании развития горных работ [4], однако автором она приведена к форме [1], позволяющей проводить и оптимизационные вычисления. Единая модель охватывает практически всевозможные положения горных работ, исключая разве случай, когда карьер распадается на несколько котлованов. Рациональный выбор параметров модели позволяет достигнуть требуемой точности в передаче конфигурации борта [2]. В то же самое время проверка системы ограничений модели и расчет показателей открытой разработки оказываются значительно сложнее и требуют значительно бо́льших вычислительных ресурсов, чем для секторной модели.

В связи с отмеченными обстоятельствами в настоящей работе предлагается комбинированная модель, сочетающая черты контурных моделей (в форме записи отдельных условий) и секторных (набор величин, совокупность условий). Соединение некоторых достоинств обеих моделей при минимизации их недостатков достигается путем отказа от линейности соотношений секторной модели. В настоящей работе мы ограничиваемся наиболее распространенным случаем, когда разработка ведется несколькими горизонтальными уступами.

В контурной модели борта карьера бровки (или средние линии откосов) уступов карьера приближенно представляются многоугольными контурами — полилиниями, описываемые координатами их вершин — x_{il}, y_{il} для l-го уступа. В модели имеется четыре типа ограничений — на расстояние между контурами смежных уступов (складывающееся из ширины рабочей площадки и горизонтальной проекции откоса уступа), на расстояние между противоположными бортами, на кривизну кривой, аппроксимируемой полилинией, и на погрешность аппроксимации (последнее сводится к ограничению сверху на длину каждого звена полилинии). Первое ограничение связывает всевозможные пары отрезков смежных контуров, и для каждой такой пары выражается четырьмя неравенствами:

$$\begin{aligned}
&\rho_1(x_{il},\ y_{il},\ x_{jl+1},\ y_{jl+1},\ x_{j+1l+1},\ y_{j+1l+1})\le d_{\min},\\
&\rho_1(x_{i+1l},\ y_{i+1l},\ x_{jl+1},\ y_{j+1l},\ x_{j+1l+1},\ y_{j+1l+1})\le d_{\min},\\
&\rho_1(x_{jl+1},\ y_{jl+1},\ x_{il},\ y_{il},\ x_{i+1l},\ y_{i+1l})\le d_{\min},\\
&\rho_1(x_{j+1l+1}, y_{j+1l+1}, x_{il}, y_{il}, x_{i+1l}, y_{i+1l})\le d_{\min},
\end{aligned} \tag{1}$$

где ρ_1 обозначает расстояние от точки до отрезка. Таким образом, проверка ограничений для двух n-звенных полилиний требует $4n^2$ вычислений функций ρ_1, которые, в свою очередь, требуют вычисления координат проекции точки на прямую линию, соединяющую отрезки и вычисления расстояний от точки до проекции и до концов отрезка. Ограничение на ширину дна связывает пары отрезков одного контура и требует почти такого же количества операций. Ограничение на аппроксимацию есть просто ограничение на длину $s_{il} = \rho(x_{il}, y_{il}, x_{i+1l}, y_{i+1l})$ каждого звена каждого контура, а ограничение на кривизну выражается ограничением на радиус окружности, касающейся отрезков x_{i-1l}, y_{i-1l}, x_{il}, y_{il} и x_{il}, y_{il}, x_{i+1l}, y_{i+1l} в точках, отстоящих от x_{il}, y_{il} на расстояние $\min(s_{i-1l}, s_{il})/2$; здесь объем вычислений пропорционален n.

Рассмотрим преобразование перечисленных ограничений при секторном описании контуров уступов. Согласно [3], система секторов, используемых для представления борта карьера в целом (или только в рабочей зоне) представляет собой либо систему параллельных полос, либо систему смежных углов с

общей вершиной, либо сочетание того и другого. Можно считать, что фактически рабочая зона карьерного поля в плане помещается в большой угол (объединяющий все угловые сектора) или полосу (точнее, полуполосу) или разбивается на совокупность элементов в виде угла или полуполосы, а затем эти крупные элементы разбиваются на собственно сектора. Такое представление удобно тем, что при нем количество секторов можно считать переменным, зависящим от требуемой точности представления борта карьера. Правда, реальная система секторов служит также цели представления пространственного распределения характеристик полезного ископаемого, которое описывается посекторно зависимостями значений от положений горных работ в секторе. Ясно, однако, что при использовании кусочно-линейной аппроксимации при переходе от более крупных секторов к более мелким никакой ошибки в расчете запасов и качества не произойдет.

Пусть некоторая система секторов такова, что для возможных вариантов горных работ контуры уступов пересекают оси (средние линии, биссектрисы) секторов ровно по одному разу и притом под углом, отличающимся от прямого не более чем на $\gamma<\pi/2$ (независимо от количества секторов). Тогда любой контур может быть описан точками пересечения с осями секторов, т.е. для l-го сектора — расстоянием r_{il} от начала его оси. Координаты точек пересечения тогда выражаются формулами

$$x_{il} = a_l r_{il} + x_{l0},\ y_{il} = b_l r_{il} + y_{l0}. \qquad (2)$$

Система ограничений комбинированной модели при единой системе секторов состоит из соотношений (1) для $j = i$ и ограничений на кривизну контурной модели с подстановкой в эти неравенства соотношений (2). Количество этих соотношений пропорционально n, а не n^2, где n по-прежнему означает количество вершин аппроксимирующей полилинии, но разница здесь в том, что количество вершин для всех контуров комбинированной модели одинаково, а для контурной может и различаться. Вопрос в том, может ли быть достигнута одинаковая погрешность аппроксимации для обеих моделей при одинаковых или близких значениях n.

Расстояние между двумя смежными вершинами, заданных на параллельных осях секторов, расстояние между которыми $d_П$, в силу оговоренного условия, составляет не более $d_П/\cos\gamma$. Если смежные сектора суть углы, причем для всех секторов $r_{il} \le L_{max}$, тогда расстояние между равноудаленными точками смежных осей, угол между которыми составляет β, не превысит $d_У = 2L_{max}\sin(\beta/2)$, а между смежными вершинами контура, находящимися в этой области, составит не более $d_У/\cos(\gamma-\beta/2)$. Наконец, для случая, когда одна вершина лежит на оси полосы, а вторая — на биссектрисе смежного угла, расстояние составит не больше $(d_П+d_У)/2\cos\gamma$.

Контуры уступов карьера со степенью детализации, которая требуется для годового и среднесрочного планирования, представляют собой гладкие кривые с радиусом кривизны не менее R_{min}. Модель борта должна служить как для того, чтобы с требуемой точностью передавать контуры проектного или реального положения горных работ и позволять выполнять расчеты и выбор направления развития горных работ с соблюдением того условия, что по аппроксимирующим модельным контурам можно построить гладкие контуры с допустимой ошибкой восстановления гладкого контура по модельному. Для погрешности приближения (существующего контура модельным) и восстановления (гладкого контура по модельному) наиболее подходящей мерой приближе-

ния, как и во многих других задачах геометрической аппроксимации, нам представляется расстояние по Хаусдорфу — наибольшее расстояние между одноименным модельным и гладким контуром [1]. Для комбинированной модели, заимствующей из контурной ограничение на кривизну, как и для контурной, справедлива одна и та же оценка погрешности как для задачи аппроксимации, так и для задачи восстановления: $\Delta = \max(s_{il})^2/(8R_{\min})$, где максимум берется по всем вершинам. Отсюда видно, что, во-первых, для достижения приемлемой погрешности необходимо иметь $s_{il} << R_{\min}$, а во-вторых, все s_{il} должны быть одного порядка. Таким образом, $s_{\max} = (8R_{\min}\Delta)^{1/2}$. Для контурной модели, оценивая максимальный периметр l-го контура величиной $P_{l\max}$, при заданном можно выбрать в качестве величину $n_l \geq P_{l\max}/s_{\max}$. Если все секторы представляют собой полосы совокупной ширины D, достаточно для их количества выбрать величину $n \geq D/\ /(s_{\max}\cos\gamma)$, при использовании только угловых секторов, составляющих в совокупности угол α, оценка будет $\alpha D_{\max}/(s_{\max}\cos\gamma)$, что всегда будет больше. Наконец, при соединении угловых секторов с совокупным углом α с прямолинейными совокупной ширины D, количество тех и других секторов для минимизации погрешности должно быть пропорционально соответственно $\alpha D_{\max}$ и D, общее количество секторов — $n \geq (\alpha D_{\max}+D)/\ (s_{\max}\cos\gamma)$. Из перечисленных оценок вытекает, что по порядку величины n_l для контурной модели и n для комбинированной одинаковы. Действительно, допустив, что контур пересекает хотя бы половину секторов-полос, получим для рассматриваемого случая, что справедлива оценка

$$D\cos\gamma \geq P_{l\max} \geq D/2. \qquad (3)$$

Предположив, что $\gamma \leq \pi/3$, что в большинстве случаев дает достаточную гибкость в представлении вариантов горных работ, получим из (3), что для этого случая будет иметь место соотношение, $1 \leq n/n_l \leq 4$, показывающее явное преимущество в объеме вычислений комбинированной модели по сравнению с контурной. Комбинированная модель будет иметь преимущество и по отношению к традиционной секторной модели, т.к. для последней приемлемая погрешность аппроксимации и восстановления достигается только при малых значениях γ[2], что не позволяет рассматривать сколько-нибудь широкий набор вариантов горных работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валуев А.М.* Горно-геометрическое моделирование в задачах проектирования открытых горных работ: Учебное пособие. — М.: МГИ, 1989. — 107 с.
2. *Валуев А.М.* Об аппроксимации геометрической формы карьера // Обозрение прикл. и промышл. математ. — 2004. — Т. 11. —вып. 2. — С. 308–309.
3. *Табакман И.Б.* Принципы построения АСУ на карьерах. — Ташкент: Фан, 1977. — 140 с.
4. *Аленичев В.М., Суханов В.И., Хохряков В.С.* Моделирование природно-сырьевых технологических комплексов (горное производство) / Под ред. В.Л.Яковлева. — Екатеринбург: УРО РАН, 1998.

Коротко об авторах

Валуев Андрей Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Организация и управления в горной промышленности», Московский государственный горный университет.