© В.А. Подольский, 2007

УДК 622.272

В.А. Подольский

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОФИЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ДЕПРЕССИОННОЙ КРИВОЙ

Анализ гидродинамического давления воды является одной из составных и существенных задач при планирование инженерных мероприятий ведении горных работ в водонасыщенном массиве. Сложным вопросом при решении таких задач является вопрос о положении депрессионной кривой для безнапорного режима фильтрации.

В данной работе для описания процесса движения подземных вод использовано уравнение фильтрации, которое для широкого круга задач можно представить в виде (плоская задача) [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k_y\left(\frac{\partial h}{\partial y}-1\right)\right]=\eta\frac{\partial h}{\partial t},$$

где η - коэффициент упругоемкости породы; h – пьезометрическая высота, равная $h = p/\gamma_в$, $\gamma_в$ – удельный вес воды, p – давление воды; k_x и k_y коэффициенты фильтрации.

Применение метода конечных элементов [3] (треугольных элементов с линейной функцией формы) и замена производной конечной разностью по схеме разность назад дает следующую систему уравнений

$$[K]\{h^{n+1}\} = \{f(h^n)\}, \qquad (1)$$

где $K_{lm} = (b_l b_m k_{xx} + b_l c_m k_{xy} + c_l b_m k_{xy} + c_l c_m k_{yy} + \lambda_{lm}\eta/\Delta t)S$; $f_l = (b_l k_{xy} + c_l k_{yy})\times S + (\lambda_{lm}\eta S\sum h_m^n)/\Delta t - V_n L/2 - K_{lm}\, h_{m,0}$.

В этих уравнениях: h^n и h^{n+1} пьезометрическая высота соответственно предыдущего и последующего шага итерации; $b = \partial N/\partial x$, $c = \partial N/\partial y$, N – функция формы; $\lambda_{lm} = 1/12$ при $l \neq m$, $\lambda_{ll} = 1/6$; S – площадь треугольного элемента. В свободных членах f_l третье слагаемое рассчитывается, если узлы «l» и «m» лежат на границе расчетной области (L – длина стороны треугольного элемента) и известна нормальная составляющая скорости фильтрации Vn, последнее – если для узла «m» известно давление на границе.

Составляя уравнение баланса на свободной поверхности [1] (депрессионной кривой) с учетом интенсивности инфильтрации ε и гравитационная емкость (коэффициента гравитационной водоотдачи) μ, можно получить следующее кинематическое уравнение для граничного условия на ней

$$Vn = \varepsilon\, n_y + \mu\left(\vec{V}_г \vec{n}\right), \qquad (2)$$

где вектор n – вектор нормали к свободной поверхности, n_y – направляющей косинус этого вектора, $V_г$ – скорость смещения границы в направлении нормали. Это значение V_n входит в систему уравнений (1) если граница является депрессионной поверхностью; на водоупоре - $V_n = 0$.

Метод определения положения депрессионной кривой заключается в том,

что при решении системы уравнений (1) для узлов, лежащих выше депрессионной кривой, решение дает отрицательные значения давления воды. Последовательность вычислений заключается в следующем. Пусть на момент времени t известно положение депрессионной поверхности и все узловые значения h^n, при этом расчетная область включает только узлы, лежащие на депрессионной поверхности и ниже. Считая, что для шага итерации $t+\Delta t$ неизвестны узловые значения давления и для узлов на депрессионной кривой, определяются давления h^{n+1} . Если участки депрессионной кривой должны подняться, то расчет даст давления на них $h^{n+1}>0$, если опуститься - $h^{n+1}<0$. Изменив соответствующим образом положение узлов, перестроив треугольные элементы согласно новому положению узлов и оставляя в расчетной области узлы, лежащие на депрессионной кривой и ниже ее, расчет повторяется с теми же значениями h^n. Такая последовательность вычислений (пространственная итерация) выполняется до достижения наилучшего приближения для давлений на свободной поверхности, которое в идеальном случае должно равняться нулю. На следующем шаге временной итерации, используя полученные значения h^{n+1} и изменившиеся к моменту времени $t+\Delta t$ граничные условия (давления на границе питания, давления воды в отработанном пространстве и т.п.) процесс пространственной итерации повторяется. Такая методика расчета для стационарного режима фильтрации через прямоугольную перемычку на непроницаемом горизонтальном основании [3] показала хорошее совпадение с аналитическими зависимостями, приведенными в работе [5] , как по положение депрессионной кривой, так и по величине промежутка высачивания.

Скорость смещения депрессионной кривой в уравнении (2) рассчитывалась следующим образом. После итерации «n-1» находятся смещения узлов лежащих на депрессионной кривой по отношению к предыдущей итерации. По этим значения находится нормальная скорость смещения этих узлов. Эти значения $V_г$ используются в итерации «n».

В данной работе приведены результаты расчета нестационарной фильтрации для фильтрации в перемычке, расположенной на горизонтальном водоупоре, из водоема в канал (рис. 1, 2; сплошные линии), Канал в расчетах располагался симметрично между двумя перемычками. В расчетах: длина каждой перемычки L = 500М, высота H_0 = 240М, длина канала $L_к$ = 30 м, перемычки изотропные с коэффициентом фильтрации $k_ф$ = 0,003М/сут, коэффициент упругоемкости $\eta = 10^{-2}\ldots10^{-4}$, канал заполнен породой с пустотностью p = 0.2.

Для начального стационарного состояния рассчитывается положение депрессионной кривой для уровня воды канале 50М. Далее канал заполняется водой вследствие фильтрации через перемычки и инфильтрации с поверхности (что аналогично, в частности, отключению систем осушения в отработанном пространстве).

Результаты расчета метода конечных элементов сравнивались с аналитически уравнением гидравлической теории. При сравнении результатов расчета следует учесть что, в отличие от метода конечных элементов, гидравлическая теория не дает промежуток высачивания. Именно поэтому расчеты выполнялись для начального уровня воды в канале 50М, при этом максимальное значение промежутка высачивания не превышало 15 % от высоты уровня в канале.

В гидравлической теории положение депрессионной кривой для однородного

потока на горизонтальном непроницаемом основании определяется выражением [1, 4]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_ф H \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \varepsilon = \mu \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (3)$$

где H – напор, который одновременно является вертикальной координатой депрессионной кривой, отсчитываемой от основания. При учете упругоемкости в уравнение баланса для столба площадью сечения $1M^2$ и длинной dx надо добавить слагаемое, отражающее изменение пористости породы: $\eta H(\partial H/\partial t)dx$. Хотя в гидравлической теории вертикальной скоростью фильтрации Vy пренебрегают, однако можно приближенно ее учесть для стационарного режима фильтрации [4]. Уравнение баланса в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dydx = 0 .$$

Интегрируя это уравнение по «y» в пределах от 0 до H, и учитывая, что первое слагаемое, в рамках гидравлической теории, не зависит от «y», а на границе y = H поступает в единицу времени объем воды, равный -εdx , получим:

$$Vy = \varepsilon - H \frac{\partial V_x}{\partial x} \qquad (4)$$

Зная H(x,t) для стационарного режима (μ=0) можно найти Vy. Решение уравнения (3) для стационарного режима находится просто двойным интегрирование по «x»:

$H^2 = -2(\varepsilon/k_ф)x^2 + Cx + H_0^2$,

$C = [H_L^2 - H_0^2 + (\varepsilon/k_ф)L^2]/L$, (5)

где $H_0 = H(0,t)$, $H_L = H(L,0)$ (при t=0 состояние стационарное). Из уравнений (4,5) можно найти Vy. Таким образом, уравнение гидравлической теории для депрессионной кривой с учетом упругоемкости породы и вертикальной скорости фильтрации стационарного режима, в безразмерных величинах $Y = H/H_0$, $\xi = x/L$, $\lambda = L/H_0$, можно записать в следующем виде:

$$\frac{k_ф T_c}{\eta l^2}\frac{\partial^2 Y^2}{\partial \zeta^2} = \left(1 + \frac{M}{2Y}\right)\frac{\partial Y^2}{\partial \tau} - $$
$$-2\frac{k_ф T_c}{\eta H_0^2}\left(\beta + \frac{(2\beta l^2 \zeta + Y_0^2 - 1 + \beta l^2)^2}{4Y^2 l^2}\right),$$

где $T_c = L^2\eta/\pi^2 k_ф$, $\tau = t/T_c$, $M = =2\mu/\eta H_0$, $\beta = \varepsilon/k_ф$., Y_0 – начальное положение уровня воды в канале $Y_0 = =H_L/H_0$. Учитывая, что последнее слагаемое в правой части в скобках малая добавка вертикальной скорости фильтрации, числитель и знаменатель в этом выражении находился как среднее интегральной значение в пределах $0 \le \xi \ge 1$. В первой скобке правой части Y заменялся средним значением <Y> (как это обычно делают в гидравлической теории [1]). Окончательно получим:

$$\frac{k_ф T_c}{\eta l^2}\frac{\partial^2 Y^2}{\partial \zeta^2} = \left(1 + \frac{M}{2 < Y >}\right)\frac{\partial Y^2}{\partial \tau} - $$
$$-2\frac{k_ф T_c}{\eta H_0^2}\left(\beta + \frac{\beta^2 l^4 + 3(Y_0^2 - 1)^2}{2[\beta l^2 + 3(Y_0 + 1)]}\right),$$
$$< Y > = \sqrt{\frac{\beta l^2 + 3\left(Y_0 + 1\right)}{6}} \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) стандартным методом разложения в ряд Фурье дает следующий результат:

$Y^2 = \Sigma C_k(\tau)\ \mathrm{Sin}(k\pi\zeta) + 1 + [Y^2(1,\tau) - 1]\zeta$,
$k = 1,2\ldots\infty$; (7)

где $Y(1,\tau)$ – высота уровня воды в канале в момент времени τ; коэф-фициенты $C_k(\tau)$ равны

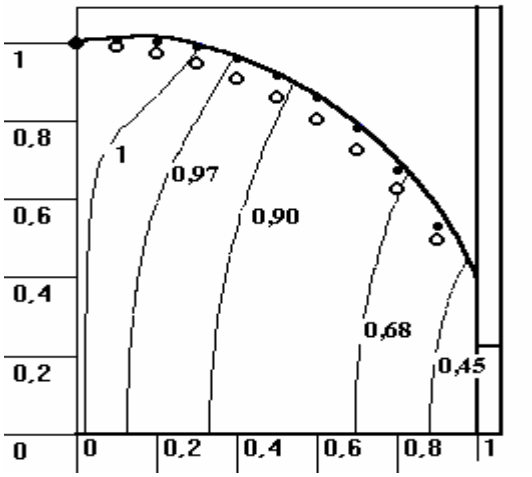

Рис. 1. Стационарный режим фильтрации при уровне воды в канале 50М, интенсивность инфильтрации 0,0005М/сут.
Сплошная линия – расчет методом конечных элементов; светлые кружки – гидравлическая теория без учета вертикальной скорости, точки – с учетом вертикальной скорости.
Вертикальные линии – изолинии напора в относительных единицах H/H_0.

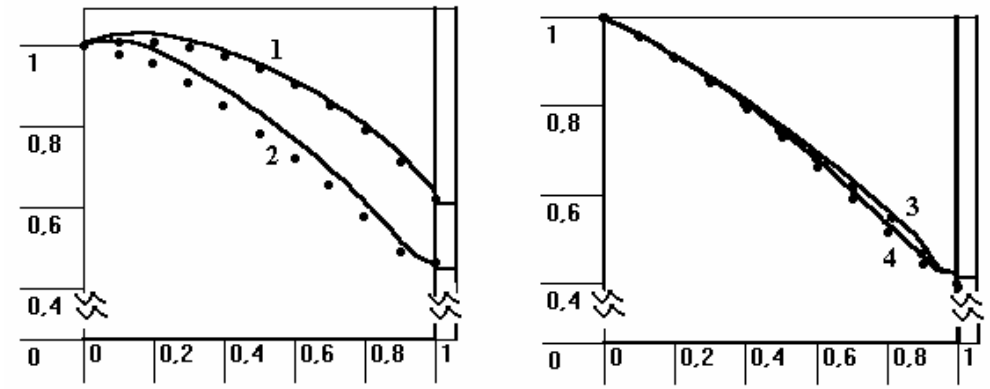

Рис. 2. Неустановившееся течение: сплошные линии – расчет методом конечных элементов, точки – гидравлическая теория. Кривые 1,2- ε=0,0005М/сут, μ=0; кривая 1 - η=0,0001М$^{-1}$, кривая 2 - η=0,01М$^{-1}$. Кривые 3,4 - ε=0 , μ=0,1; кривая 3 - η=0,0001М$^{-1}$, кривая 2 - η=0,001М$^{-1}$

$$C_k(\tau) = 2\frac{(-1)^k}{k\pi}\int_0^{\tau}\exp\left[-ak^2\left(\tau-\nu\right)\right]d[Y^2(1,\nu)] - \\ -\frac{2B}{k^3\pi}\left[\left(-1\right)^k-1\right]\left[\exp(-ak^2\tau)\right], \qquad (8)$$

где a = 1/(1+M/2<Y>), «B» – второе слагаемое правой части уравнения (6)

Интеграл в уравнении (8) рассчитывался следующим образом. Если на момент времени t известно H(x,t), то объем воды dQ, поступающий в канал за время dt, и изменение уровня воды в канале dH(1,t) соответственно равны:

$$dQ = (-2k_{ф}H\frac{\partial H}{\partial x}_{\zeta=1} + \varepsilon L_{к})dt, \\ dH(L,t) = \frac{dQ}{pL_{к}} \qquad (9)$$

(В уравнении (9) величина расхода за счет фильтрации удваивается т.к. в методе конечных элементов вода в канал поступает с двух его бортов). Заменяя производ-

Коэффициент упругоемкости ($М^{-1}$)	Интенсивность инфильтрации (М/сут)	Гравитационная емкость	Поднятие уровня в канале (М; начальная высота 50М)	Метод конечных элементов		Гидравлическая теория	
				Расход ($М^3$/сут)	Время заполнения (сутки)	Расход ($М^3$/сут)	Время заполнения (сутки)
0,01	0,0005	0	50	0,030	4870	0,025	4460
0,001	0,0005	0	50	0,088	2500	0,083	2670
0,0001	0,0005	0	50	0, 28	1170	0,24	1290
0.0001	0,0005	0	85	0.22	2090	0.21	2110
0.001	0	0.1	50	0,058	3170	0,059	3330
0.0001	0	0.1	50	0,11	2000	0,094	2030

ные конечной разностью, получим в безразмерных величинах:

$$\Delta[Y^2(1,\nu)] = -2Y(1,\nu)(2Y(1,\nu)\frac{T_c}{T_h}\frac{\Delta Y}{\Delta\zeta}_{\zeta\to 1} + E_т)\Delta\nu, \qquad (10)$$

где $T_h = pLL_к/k_ф H_0$, $E_г = \varepsilon T_c/pH_0$. Численное интегрирование коэффициентов C_k с постоянным шагом $\Delta\nu$ позволяет найти их для любого момента времени $\tau = n\Delta\nu$ по рекуррентной формуле:

$$C_k(n) = J_k(n) - \frac{2B}{k^3\pi}\left[(-1)^k - 1\right]\left[\exp(-ak^2 n\Delta\nu)\right]$$

$$J_k(n+1) = \exp(-ak^2\Delta\nu)J_k(n) + 2\frac{(-1)^k}{k\pi}\Delta\left[Y^2(1,n)\right]$$

Расчеты суммы в уравнении (7) и численное интегрирование коэффициентов C_k выполнялись с точностью не хуже 2 %.

При учете вертикальной скорости фильтрации в гидравлической теории совпадение результатов расчета по этой теории и методом конечных элементов значительно лучше (рис. 1). Видно, что при интенсивности инфильтрации ε = 0,0005М/сут наблюдается существенное отклонение от основного положения гидравлической теории: напор функция только H(x). При больших величинах ε это отклонение становится столь значительным, что сравнение результатов расчета гидравлической теории и метода конечных элементов становится не корректным. Расчеты с гравитационной емкостью выполнялись для условий, когда множитель при производной по времени в уравнении (6) существенно отличается от единицы – лежит в пределах 1,6 …7.

На рис. 2 представлены некоторые результаты расчета методом конечных элементов (сплошные линии) и по уравнению (7) гидравлической теории (точки на рисунках). В таблице представлены результаты расчета времени заполнения канала и расход на конец времени заполнения.

Из приведенных результатов видно, что расчеты методом конечных элементов удовлетворительно совпадают с аналитическим выражением гидравлической теории – ошибка не превышает 17%. Можно считать, что предлагаемая методика может быть с удовлетворительной степенью точности использована для определения положения депрессионной кривой и порового давления воды при неустановившемся течении подземных вод с учетом инфильтрации и гравитационной емкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироненко В.А, Шестаков В.М.* Основы гидрогеомеханики. – М.: Недра, 1974.

2. *Гальперин А.М., Зайцев В.С., Норватов Ю.А.* Гидрогеология и инженерная геология. – М.: Недра, 1989.

3. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986.

4. *Подольский В.А.* Применение метода конечных элементов для расчета положения депрессионной кривой. XVI Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях». Сборник трудов. Т 5, секция 5. - РГАСХМ, Ростов-на-Дону, 2003.

5. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.

Коротко об авторах

Подольский В.А. – Новомосковский институт РХТУ им. Д.И. Менделеева.

Статья представлена кафедрой физики Новомосковского института Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева.
Рецензент – *Захаров Валерий Николаевич*, доктор технических наук, заведующий лабораторией «Геоинформационные системы геотехнологий» Института проблем комплексного освоения недр.

© **В.А. Подольский, 2007**

УДК 622.272

В.А. Подольский

РАСЧЕТ ПОЛОЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При ведении горных работ в водонасыщенном массиве возникают задачи связанные с анализом влияния движения подземных вод. Одним из сложных вопросов при решении таких задач является вопрос о положении свободной (депрессионной) поверхности.

Для описания процессов профильной фильтрации (плоская задача) в данной работе использовано уравнение фильтрации, которое для широкого круга задач можно представить в виде [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}+k_{xy}\left(\frac{\partial h}{\partial y}-1\right)\right]+ \quad ,$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[k_{yx}\frac{\partial h}{\partial x}+k_{yy}\left(\frac{\partial h}{\partial y}-1\right)\right]=\eta\frac{\partial h}{\partial t}$$

где η - коэффициент упругоемкости породы; h – пьезометрическая высота, равная $h = p/\gamma_в$, $\gamma_в$ – удельный вес воды, p – давление воды; коэффициенты фильтрации матрицы $[k_ф]$ определяются соотношениями

$k_{xx} = k_x(\cos\alpha)^2 + k_y(\sin\alpha)^2$;

$k_{yy} = k_x(\sin\alpha)^2 + k_y(\cos\alpha)^2$;

$k_{xy} = (k_y - k_x)\sin\alpha\cdot\cos\alpha$,

k_x и k_y – коэффициенты фильтрации в направлении главных осей фильтрации, α - угол между направлением главной оси k_y и осью «У».

Применение метода конечных элементов [2] (треугольных элементов с линейной функцией формы) и замена производной конечной разностью по схеме разность назад приводит к системе уравнений

$$[K]\{h^{n+1}\} = \{f(h^n)\}, \qquad (1)$$

где $K_{lm} = (b_l b_m k_{xx} + b_l c_m k_{xy} + c_l b_m k_{xy} + c_l c_m k_{yy} + \lambda_{lm}\eta/\Delta t)S$; $f_l = (b_l k_{xy} + c_l k_{yy})S + (\lambda_{lm}\eta S\sum h_m^n)/\Delta t - V_{n,0}L/2 - K_{lm}\, h_{m,0}$.

В этих уравнениях: h^n и h^{n+1} пьезометрическая высота соответственно предыдущего и последующего шага итерации; $b = \partial N/\partial x$, $c = \partial N/\partial y$, N – функция формы; $\lambda_{lm} = 1/12$ при $l \neq m$, $\lambda_{ll} = 1/6$; S – площадь треугольного элемента. В свободных членах f_l третье слагаемое рассчитывается, если узлы «l» и «m» лежат на границе расчетной области (L – длина стороны треугольного элемента) и известна нормальная составляющая скорости фильтрации (для водонепроницаемой границы $V_{n,0} = 0$), последнее – если для узла «m» известно давление на границе.

Метод определения положения депрессионной кривой заключается в том, что при решении системы уравнений (1) для узлов, лежащих выше депрессионной кривой, решение дает отрицательные значения давления воды. По этим данным определяется граница между областью положительных и отрицательных давлений, после чего область отрицательных давлений исключается из расчета - треугольные элементы перестраиваются так, чтобы они включали только область положительных давлений. Далее выполняется расчет в новой расчетной области, при этом давление на новой границе этой области (на линии «депрессионной кривой») считается неизвестными. Такие расчеты выполняются до достижения наилучшего приближения для давлений на границе, которое в идеальном случае должно равняться нулю [3].

Ниже более подробно рассмотрена методика расчета для случая, когда отработанное пространство заполняется подземными водами после отключения системы осушения. При работе систем осушения процесс фильтрации считается стационарным. По системе уравнений (1), в которых коэффициент упругоемкости $\eta = 0$ и описанному выше алгоритму находится стационарное положение депрессионной кривой. По найденным значениям давления воды определяется расход в отработанное пространство. Далее, считая, что за достаточно малый интервал времени Δt расход не меняется, находится новое положение уровня воды в отработанной области, которое определяет новые значения давления воды на его контуре: ниже уровня воды давление гидростатическое, выше – равно нулю. По этим новым граничным значениям на контуре отработанного пространства и остальным узловым величинам h^n рассчитываются значения

пьезометрической высоты следующего шага итерации h^{n+1} , при этом давление на депрессионной кривой, (это давление на границе расчетной области, через которую проходит депрессионная кривая), также как и в остальной области пространства, считается неизвестным. Далее, как описано выше, строится новое положение депрессионной кривой, и расчет со значениями h^n повторяется. Этот процесс выполняется до тех пор, пока не будет получено наилучшее приближение. Затем выполняется следующий шаг итерации по времени. Весь процесс расчета может занимать достаточно много времени, особенно если расчетная область включает несколько областей, у которых фильтрационных параметры резко отличаются. Это связано во первых с тем, что требуется много итераций для перестройки депрессионной кривой при подборе ее положения. Во вторых, может оказаться, что интервал временной итерации Δt необходимо выбирать очень малым. В таком случае процесс счета можно ускорить: можно положение депрессионной кривой менять через несколько интервалов времени. Тогда диагонализировать матрицу надо только один раз и в процессе итераций с данным временем Δt соответствующим образом менять только столбец свободных членов, что в резко сокращается время счета. Однако, численный анализ показал, что во многих случаях такая методика дает более высокую ошибку расчета. Ее можно рекомендовать для предварительного анализа.

Для проверки предлагаемой методики были выполнены расчеты фильтрации в перемычке, расположена на горизонтальном водоупоре, из водоема в канал (рисунок, сплошные линии), Канал в расчетах располагался симметрично между двумя перемычками. В расчетах: длина каждой перемычки L = 500М, высота H_0 = 240М, длина канала $L_к$ = 30 м, перемычки изотропные с коэффициентом фильтрации $k_ф$ = 0,003 М/сут, коэффициент упругоемкости $\eta = 10^{-2}\ldots10^{-4}$, канал заполнен породой с пустотностью p = =0.2 Результаты расчета сравнивались с аналитически уравнением гидравлической теории. При выводе уравнения фильтрации гидравлической теории [1, 4] следует учесть, что, с учетом использования в качестве параметра породы упругоемкости, уравнение баланса для столба площадью сечения $1М^2$ и длинной dx имеет вид $dq_x/dx = -\eta H(dH/dt)dx$, где q_x – горизонтальный расход, H – напор (он же вертикальная координата депрессионной кривой). Хотя в гидравлической теории вертикальной скоростью фильтрации пренебрегают, однако можно приближенно ее учесть для стационарного режима фильтрации [4]. С учетом сказанного, в безразмерных величинах, получим:

$$\frac{k_ф T_c}{\eta l^2}\frac{\partial^2 Y^2}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial Y^2}{\partial \tau} + 2u ,$$

$$u = -\frac{k_ф T_c}{4\eta L^2}\frac{\left(Y_0^2 - 1\right)^2}{Y^2} \qquad (2)$$

где $Y = H/H_0$, H – напор, $\xi = x/L$, $\lambda = L/H_0$, $T_c = L^2\eta/\pi^2 k_ф$, $\tau = t/T_c$, u – оценочное значение вертикальной скорости фильтрации (безразмерной) для стационарного режима, Y_0 – начальное положение уровня воды в канале. Учитывая, что u малая добавка, в знаменателе для u в расчетах принято среднее значение $\langle Y^2\rangle$, равное $\langle Y^2\rangle=(Y_0+1)/2$. Отметим, что уравнение (2) является линейным по отношению к Y^2 (если не учитывать

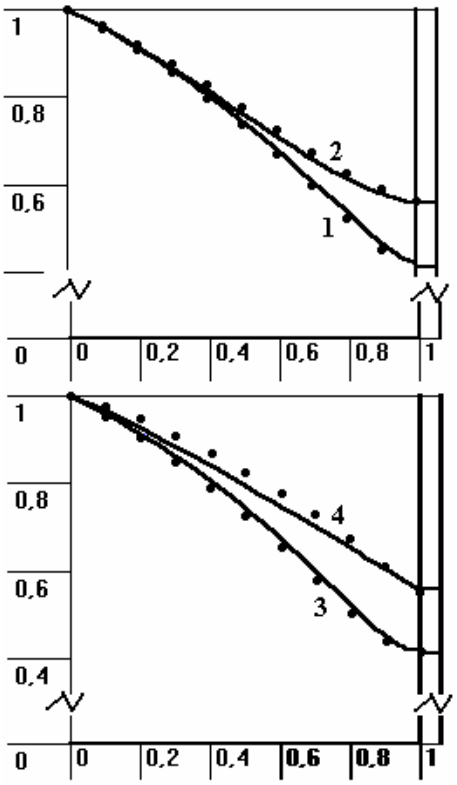

Рис. 1. Сплошные линии – расчет методом конечных элементов, точки – гидравлическая теория, w=0, μ=0. Кривые: *1* - η=0,001М$^{-1}$, поднятие уровня 50 м, *2* - η=0,001М$^{-1}$, поднятие уровня 85 м, *3* -η=0,01М$^{-1}$, поднятие уровня 50 м, *4* -η=0,0001М$^{-1}$, поднятие уровня 85 м

малую добавку u), а не линеаризованным, как в большинство уравнений гидравлической теории [4]. При сравнении результатов расчета метода конечных элементов и уравнения (2) следует учесть, что уравнение (2), в отличие от метода конечных элементов, не дает промежуток высачивания. Поэтому расчеты выполнялись для начального уровня воды в канале 50М, при этом максимальное значение промежутка высачивания не превышало 15 % от высоты уровня в канале.

Решение уравнения (2) стандартным методом разложения в ряд Фурье дает следующий результат:

$$Y^2 = \Sigma C_k(\tau)\ \mathrm{Sin}(k\pi\zeta)+1+[Y^2(1,\tau)-1]\zeta,$$

$$K = 1,2\ldots\infty; \qquad (3)$$

где $Y(1,\tau)$ – высота уровня воды в канале в момент времени τ; коэффициенты $C_k(\tau)$ равны

$$C_k(\tau) = 2\frac{(-1)^k}{k\pi}\int_0^{\tau}\exp\left[-k^2\left(\tau-\nu\right)\right]d[Y^2(1,\nu)] + \frac{4u}{k^3\pi}\left[\left(-1\right)^k-1\right]\left[\exp(-k^2\tau)\right]. \qquad (4)$$

Интеграл в уравнении (4) рассчитывался следующим образом. Если на момент времени t известно H(x,t), то объем воды Q, поступающий в канал, и изменение уровня воды в канале dH(1,t) соответственно равны:

$$dQ = -k_ф H\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\zeta=1} dt, \quad dH(L,t) = \frac{dQ}{pL_к}.$$

Заменяя производные конечной разностью, получим в безразмерных величинах:

$$\Delta[Y^2(1,\nu)] = -2Y^2(1,\nu)\frac{T_c}{T_h}\left.\frac{\Delta Y}{\Delta\zeta}\right|_{\zeta\to 1}\Delta\nu, \qquad (5)$$

где $T_h = pLL_к/k_ф H_0$. Численное интегрирование коэффициентов C_k с постоянным шагом Δν позволяет найти их для любого момента времени τ=nΔν по рекуррентной формуле:

$$C_k(n) = J_k(n) + \frac{4u}{k^3\pi}\left[\left(-1\right)^k-1\right]\left[\exp(-k^2 n\Delta\nu)\right]$$

$$J_k(n+1) = \exp(-k^2\Delta\nu)J_k(n) + 2\frac{(-1)^k}{k\pi}\Delta\left[Y^2(1,n)\right]$$

Для сравнения с методом конечных элементов, расход в уравнении гидравлической теории удваивался т.к. в методе конечных элементов вода в канал поступает с двух его бортов. Расчеты сум-

Коэффи- циент упруго-емкости ($М^{-1}$)	Поднятие уровня в канале (М); начальная высота 50М	Метод конечных элементов		Гидравлическая теория	
		Расход ($М^3$/сут)	Время заполнения (сутки)	Расход ($М^3$/сут)	Время заполнения (сутки)
0,01	50	0,0103	11280	0,011	13100
0,001	50	0,067	2750	0,076	2830
0,001	85	0, 032	7720	0,041	7620
0.0001	50	0.179	1580	0.176	1620
0.0001	85	0,127	3170	0,144	3162

мы в уравнении (3) и численное интегрирование коэффициентов C_k выполнялись с точностью не хуже 2 %.

На рис. 1 представлены некоторые результаты расчета методом конечных элементов (сплошные линии) и по уравнению (3) гидравлической теории (точки на рисунках). В таблице представлены результаты расчета времени заполнения канала и расход на конец времени заполнения.

Из приведенных результатов видно, что расчеты методом конечных элементов удовлетворительно совпадают с аналитическим выражением гидравлической теории – ошибка не превышает 15 %. Таким образом можно считать, что предлагаемая методика может быть с удовлетворительной степенью точности использована для определения положения депрессионной кривой и порового давления воды при неустановившемся течении подземных вод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироненко В.А, Шестаков В.М.* Основы гидрогеомеханики. – М.: Недра, 1974.
2. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986.
3. *Подольский В.А.* Применение метода конечных элементов для расчета положения депрессионной кривой. XVI Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях». Сборник трудов. Т 5, секция 5. - РГАСХМ, Ростов-на-Дону, 2003.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.

Коротко об авторах

Подольский В.А. – Новомосковский институт РХТУ им. Д.И. Менделеева.

Статья представлена кафедрой физики Новомосковского института Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева.
Рецензент – *Захаров Валерий Николаевич*, доктор технических наук, заведующий лабораторией «Геоинформационные системы геотехнологий» Института проблем комплексного освоения недр.