© М.В. Секретов, 2007

УДК 622.022

М.В. Секретов

ОЦЕНКА ВЫНОСЛИВОСТИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ТРАНСМИССИИ ГОРНЫХ МАШИН ВЕРОЯТНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

Семинар № 21

Очень часто происходит так, что рассчитанные значения числа циклов до разрушения N классическим методом не соответствуют действительным. Это происходит из-за значительного отклонения расчётного действующего напряжения σ_F и допускаемого σ_{FP}. Наиболее часто отклонения таких случайных величин, как σ_F и σ_{FP} подчиняются нормальным законам распределения [2]. Плотность распределения этих величин

$$\zeta(\sigma_F) = \frac{1}{\sigma_{\sigma_F}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\sigma_F - m_{\sigma_F})^2}{2\sigma_{\sigma_F}^2}}, \qquad (1)$$

$$\varsigma(\sigma_{FP}) = \frac{1}{\sigma_{\sigma_{FP}}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\sigma_{FP} - m_{\sigma_{FP}})^2}{2\sigma_{\sigma_{FP}}^2}}. \qquad (2)$$

Композиция нормальных законов также будет нормальным законом с плотностью вероятности:

$$\xi(g) = \frac{1}{\sigma_g\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(g - m_g)^2}{2\sigma_g^2}}. \qquad (3)$$

Поскольку закон распределения действующего изгибного напряжения σ_F не зависит от закона распределения допускаемого изгибного напряжения σ_{FP}, то

$$m_g = m_{\sigma_{FP}} - m_{\sigma_F} \text{ и } \sigma^2 = \sigma_{\sigma_{FP}}^2 + \sigma_{\sigma_F}^2, \qquad (4)$$

где $m_{\sigma_{FP}}$, m_{σ_F} – математическое ожидание случайных величин (СВ), соответственно, действующее напряжение σ_F и допускаемое напряжение σ_{FP}; σ_{σ_F} и $\sigma_{\sigma_{FP}}$ – среднее квадратическое отклонение действующего напряжения σ_F и допускаемого напряжения σ_{FP}.

Если подставить выражения (4) в выражение (3), то получим

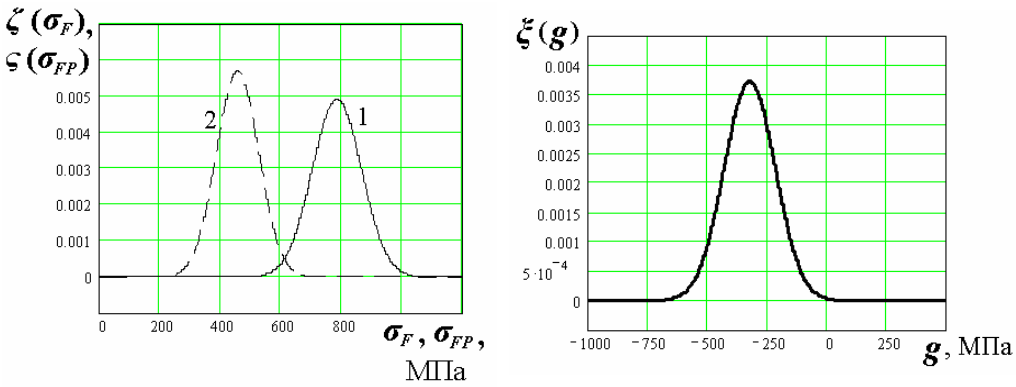
$$\xi(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\sigma_{\sigma_{FP}}^2 + \sigma_{\sigma_F}^2}} \cdot e^{-\frac{\left[g - (m_{\sigma_{FP}} - m_{\sigma_F})\right]^2}{2(\sigma_{\sigma_{FP}}^2 + \sigma_{\sigma_F}^2)}}. \qquad (5)$$

Вероятность безотказной работы элемента при условии $\sigma_{FP} > \sigma_F$ будет

$$P(\sigma_{FP} > \sigma_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\sigma_{\sigma_{FP}}^2 + \sigma_{\sigma_F}^2}} \times \int_0^\infty e^{-\frac{\left[g - (m_{\sigma_{FP}} - m_{\sigma_F})\right]^2}{2(\sigma_{\sigma_{FP}}^2 + \sigma_{\sigma_F}^2)}} dg. \qquad (6)$$

Графики плотности распределения действующего σ_F (кривая 1) и допускаемого σ_{FP} (кривая 2) изгибных напряжений на примере круговых зубьев конической зубчатой передачи редуктора горной машины, а также композиции этих распределений представлены, соответственно, на рис. 1, *а*, *б*.

Вероятность работы круговых зубьев на изгиб в зоне упругости с неограниченным числом циклов до разрушения N, рассчитанная по формуле (6), $P(\sigma_{FP} > \sigma_F) = 0{,}0011$. То есть из партии 10000 штук зубчатых колёс только 11 будут работать в основном в зоне упругости



а) *б)*

Рис. 1. Графики плотности распределения действительного σ_F (1) и допускаемого σ_{FP} (2) изгибающих напряжений в круговых зубьях конической зубчатой передачи редуктора (а) и композиция (б) этих распределений (величина g)

с неограниченным числом циклов до разрушения *N*.

Если отметить предельные отклонения действующих напряжений $\sigma_{F\min}$ и $\sigma_{F\max}$ на кривой усталости (на рис. 2 точки 1 и 3, а также 1' и 3') при фиксированном значении допускаемого напряжения, то легко определить предельные числа циклов до разрушения *N*. Здесь $\sigma_{F\max}$ соответствует $N_{\min}$, а $\sigma_{F\min}$ – $N_{\max}$. Если рассмотреть отклонение значений $N_{\min}$ и $N_{\max}$ от среднего значения N_m, которое соответствует среднему напряжению σ_F, то можно предположить, что они имеют логнормальное распределение. Плотность логнормального распределения случайной величины *N* выглядит следующим образом

$$f(N) = \frac{M}{N \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg N - \lg m_N)^2}{2 \cdot \sigma^2}}, \qquad (7)$$

где $M = 0,4343$ – коэффициент перехода от натуральных логарифмов к десятичным; σ – среднее квадратическое отклонение логарифма случайной величины; m_N – математическое ожидание случайной величины. Так как зависимость $\sigma_{FP}(\lg N_{ЭКВ})$ не является прямой линией, то надо произвести коррекцию зависимости (7). При этом среднее квадратическое отклонение от минимального значения *N*, то есть $N_{\min}$ будет равно $\sigma_{\min} = \frac{\lg m_N - \lg N_{\min}}{3}$ (по правилу 3σ), соответствен-

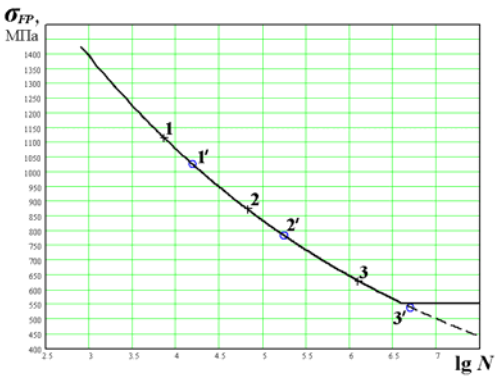
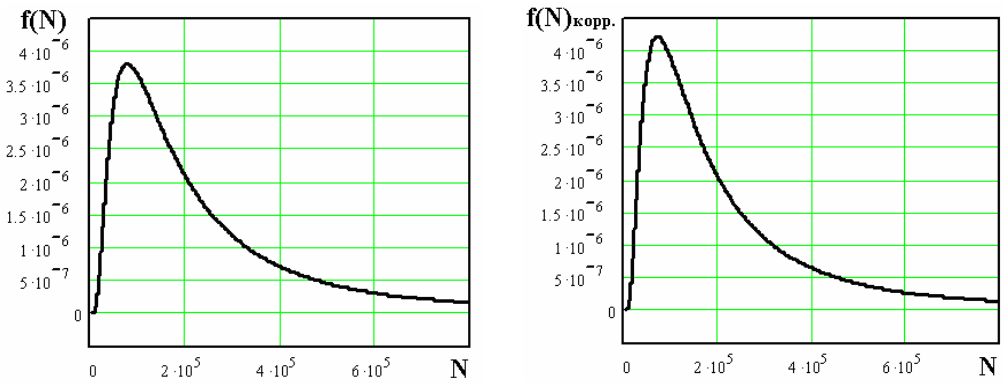


Рис. 2. Кривая изгибной усталости зубьев конической зубчатой передачи редуктора (точки 1, 2, 3 – для прямозубой конич. передачи; точки 1', 2', 3' – для конич. передачи с круговыми зубьями)



а) *б)*

Рис. 3. Графики плотности распределения случайной величины N при логнормальном (а) и скорректированном логнормальном (б) законе с учётом фиксированного допускаемого изгибного напряжения σ_{FP} материала зубьев колёс с круговым профилем

но $\sigma_{\max} = \dfrac{\lg N_{\max} - \lg m_N}{3}$. Здесь обязательно должна величина σ изменяться плавно. Примем, что σ изменяется линейно по закону

$$\sigma(N) = k \cdot \lg N + b. \qquad (8)$$

Эта зависимость строится по двум точкам при $N_{\min}$ и $N_{\max}$, исходя из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\min} &= k \cdot \lg N_{\min} + b \\ \sigma_{\max} &= k \cdot \lg N_{\max} + b \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Отсюда находятся значения k и b. При введении вместо значения σ в формуле (7) значения $\sigma(N)$, которое зависит от времени, изменяются следующие параметры распределения: математическое ожидание m_N и интеграл в бесконечных пределах плотности вероятности $\int_{-\infty}^{\infty} f(N)dN$, который должен быть равен 1. Для коррекции математического ожидания вводим величину

$$korr = \int_{-\infty}^{\infty} \lg N \cdot f(N)dN - \lg m_N,$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} \lg N \cdot f(N)dN$ – интеграл, определяющий математическое ожидание любого распределения (в нашем случае при введении распределения с $\sigma(N)$). Для того чтобы значение $\int_{-\infty}^{\infty} f(N)dN = 1$, необходимо при распределении с введённым значением $\sigma(N)$ значение M в формуле (7) разделить на значение $d = \int_{-\infty}^{\infty} f(N)dN$, то есть $\dfrac{M}{d}$. Таким образом, получится окончательное скорректированное значение плотности вероятности

$$f(N)_{корр} = \frac{M}{N\sigma(N)\sqrt{2\pi} \cdot d} e^{-\frac{[\lg N - (\lg m_N - korr)]^2}{2\sigma^2(N)}}. \qquad (10)$$

Графики плотности распределения случайной величины N при логнормальном и скорректированном логнормальном законе для круговых

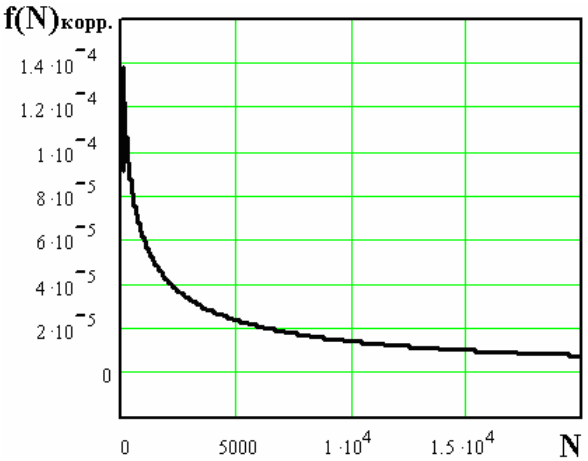


Рис. 4. Зависимость вероятности отказа P от значения N при нулевом отклонении допускаемого напряжения σ_{FP}

Рис. 6. Графики плотности распределения случайной величины N при скорректированном логнормальном законе с учётом значительного отклонения допускаемого изгибного напряжения σ_{FP} материала зубьев колёс с круговым профилем

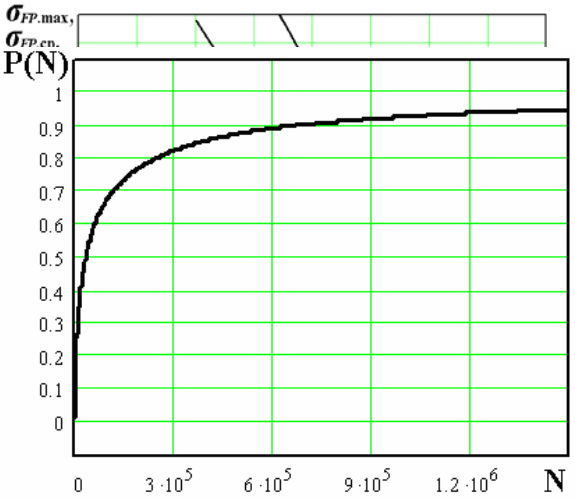


Рис. 5. Кривые изгибной усталости зубьев конической передачи редуктора ходового винта интрипсового станка при значительном отклонении допускаемого напряжения σ_{FP} (точки 1, 2, 3 – для прямозубой конич. передачи; точки 1', 2', 3' – для конич. передачи с круговыми зубьями)

Рис. 7. Зависимость вероятности отказа P от значения N для круговых зубьев при значительном отклонении допускаемого напряжения σ_{FP}

зубьев конической зубчатой передачи представлены соответственно на рис 3 *а* и *б*. Видно, что зависимости $f(N)$ и $f(N)_{корр}$ незначительно отличаются друг от друга. Зная зависимость $f(N)_{корр}$ можно определить вероятность отказа зубчатой передачи P от значения N [2] по формуле

$$P(N) = \int_0^N f(N)_{корр}\, dN\,, \qquad (11)$$

и вероятность нахождения случайной величины N в любом интервале по формуле

$$P(\alpha \le N \le \beta) = \int_\alpha^\beta f(N)_{корр}\, dN\,, \qquad (12)$$

где α и β – границы интервала. График $P(N)$ представлен на рис. 4. Например, можно определить вероятность нахождения случайной величины N в зоне повторных нагружений и малоцикловой усталости $P\left(0 \le N \le 10^5\right)$. В нашем случае эта величина для прямозубой передачи $P(0 \le N \le 10^5) =$ 0,702. Вероятность нахождения случайной величины N в зоне усталости с ограниченным числом циклов нагружений $P(10^5 \le N \le 4 \cdot 10^6) =$ 0,298. Вероятность нахождения случайной величины N в зоне усталости с неограниченным числом нагружений $P(4 \cdot 10^6 \le N \le \infty) = 0$. Для передачи с круговыми зубьями $P(0 \le N \le 10^5) =$ =0,290, $P(10^5 \le N \le 4 \cdot 10^6) =$ 0,708, $P(4 \cdot 10^6 \le N \le \infty) = 0{,}002$.

Здесь велись расчёты при фиксированном допускаемом напряжении материала зубьев колёс, то есть когда все свойства этого материала хорошо известны и имеют незначительные отклонения. Часто значения допускаемого напряжения имеют большой разброс, то есть зубчатые колёса поставляются из различных производств, либо свойства материала и конструкция зубчатой передачи имеют значительные отклонения. При этом рассчитываются максимальное и минимальное отклонение допускаемых напряжений. Их обозначения, соответственно, $\sigma_{FP\max}$ и $\sigma_{FP\min}$. Среднее значение этих напряжений будет вычисляться по формуле $\sigma_{FP.cp} = \frac{\sigma_{FP\max} + \sigma_{FP\min}}{2}$. Графики допускаемых изгибных напряжений в зубьях $\sigma_{FP\max}(N)$ (кривая I), $\sigma_{FP\min}(N)$ (кривая III) и $\sigma_{FP.cp}(N)$ (кривая II) представлены на рис. 5. На кривой $\sigma_{FP\max}(N)$ отметим значение $\sigma_{F\min}$ (точка 3 и 3') – ему будет соответствовать значение $N_{\max}$; на кривой $\sigma_{FP\min}(N)$ отметим значение $\sigma_{F\max}$ (точка 1 и 1') – ему будет соответствовать значение $N_{\min}$, на кривой $\sigma_{FP.cp}(N)$ отметим значение m_{σ_F} (точка 2 и 2') (математическое ожидание) – ему будет соответствовать значение N_m. Разброс величин $N_{\max}$ и $N_{\min}$ от N_m подчиняется логнормальному закону распределения с учётом коррекции, которая описана в формулах (8) – (10). Зная зависимость $f(N)_{корр}$ (рис. 6) можно определить вероятность отказа $P(N)$ по формуле (11) (рис. 7) и вероятность нахождения случайной величины N в любом интервале по формуле (12). Вероятность нахождения случайной величины N в зоне повторных нагружений и малоцикловой усталости для прямозубой передачи $P(0 \le N \le 10^5) = 0{,}821$. Вероятность нахождения случайной величины N в зоне усталости с ограниченным числом циклов нагружений $P(10^5 \le N \le 4 \cdot 10^6) =$ 0,176. Вероятность нахождения случайной величины N в зоне усталости с неограниченным числом нагружений $P(4 \cdot 10^6 \le N \le \infty) = 0{,}003$.

Для передач с круговыми зубьями вероятность нахождения случайной величины N $P(0 \le N \le 10^5) =$ 0,678, $P(10^5 \le N \le 4 \cdot 10^6) = 0{,}303$, $P(4 \cdot 10^6 \le N \le \infty) = 0{,}019$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубчатые* передачи: Справочник/ Под ред. Е.Г. Гинзбурга. – Л.: Машиностроение, 1980, 416 с.

2. *Солод В.И., Гетопанов В.Н., Шпильберг И.Л.* Надёжность горных машин и комплексов. – М.: МГИ, 1972, 198 с. ГИАБ

Коротко об авторах

Секретов Михаил Валентинович – кандидат технических наук, ст. преподаватель кафедры «Горные машины и оборудование», Московский государственный горный университет.

Р У К О П И С И ,

ДЕПОНИРОВАННЫЕ В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

1. *Стадник Д.А.* Повышение результативности технологического картографирования отработки запасов выемочных участков в условиях неопределенности информации (591/08-07 — 24.05.07) 15 с.
2. *Фащиленко В.Н., Пейль Н.Г.* Результаты испытаний электропривода вращателя бурового станка в энергосберегающих режимах (592/08-07 — 05.06.07) 9 с.