© Р.К. Халкечев, 2007

УДК 519.711: 025.4.03

Р.К. Халкечев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРУДНОФОРМАЛИЗУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ. ФИНАНСОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА

Особое значение «метод аналогий» имеет при математическом моделировании трудноформализуемых объектов, для которых фундаментальные законы, вариационные принципы и иные общие и математически строгие утверждения либо неизвестны, либо вообще не существуют. К таким объектам относятся, например, системы с заметным вмешательством людей, в частности экономические системы, такие как коммерческие банки.

Особо важное место среди существующих теоретических и практических проблем банковского дела занимает проблема финансовой устойчивости коммерческого банка.

Финансовая неустойчивость приводит к неплатежеспособности, и как следствие, – к банкротству. В то время как избыточная финансовая устойчивость будет препятствовать развитию, приводя к появлению излишних запасов и резервов, сокращая прибыль. Таким образом, определение условий финансовой устойчивости коммерческих банков относится к числу наиболее важных проблем в рыночной экономике.

Для анализа финансовой устойчивости коммерческого банка используют пять показателей [6]: состояние собственных оборотных средств K_1, маневренность K_2, автономность K_3, привлечение средств, имеющих срочный характер K_4, финансовая напряженность K_5.

Наиболее обобщающим показателем, отражающим устойчивость финансового положения, является показатель K_1, характеризующий излишек или недостаток собственных средств. Увеличение его значений по сравнению с предыдущим ведет к повышении устойчивости. В противоположном случае, показатель свидетельствует о подверженности конъюнктурным изменениям рынка.

Мобильность собственных средств банка характеризуется значениями показателя K_2, данное соотношение обязательно больше нуля. Нулевое значение – свидетельство о немобильности действий банка в случае возникновения банковского риска. Помимо собственных средств на мобильность банка оказывает влияние размещение собственных средств, направленное на возможность маневра в случае непредвиденных ситуаций.

Устойчивость банка к изменениям рыночной конъюнктуры отражает показатель соотношения собственных и заемных средств K_3. Рост показателя свидетельствует о повышении устойчивости, падение значения показателя – о снижении устойчивости.

Качество управления активными и пассивными операциями влияет на устойчивость банка. Сбалансированное

управление характеризуется ростом показателя K_4, снижение показателя говорит о подверженности банка изменениям финансового рынка.

Рост показателя финансовой напряженности K_5 отражает повышение устойчивости финансового положения, но уменьшает эффективность его деятельности за счет снижения отдачи от использования финансового левериджа. Падение K_5 может свидетельствовать об агрессивной кредитной политике и потенциальном кредитном риске.

Данные показатели финансовой устойчивости банка:

1) дают лишь статичную оценку, поскольку не устанавливают связь предшествующего периода с последующим;

2) неудовлетворительно отражают влияние внешних факторов.

Для решения данной проблемы необходимы кардинальные изменения существующих подходов в оценке финансовой устойчивости банка и внедрение методик, основанных на применении методов математического моделирования.

Существующие математические модели деятельности коммерческих банков, на основе которых определяется финансовая устойчивость, в основном являются статическими – все переменные и зависимости в данных моделях отнесены к одному моменту времени.

В виду этого, статические модели приближенно определяют финансовую устойчивость, поскольку на их основе можно судить о способности банка выполнять на заданном уровне свои функции и обязательства в данный момент времени, но не в будущем.

В данной статье изложен один из подходов к оценке финансовой устойчивости коммерческого банка с применением методов теории динамических систем.

Банк – это сложная динамическая система, функционирующая в изменяющихся условиях рыночной среды. В виду данной сложности, деятель-ность банка характеризуется множе-ством параметров, определяющих его состояние. Поэтому описать его деятельность, а следовательно, и определить его финансовую устойчивость в рамках одной модели невозможно.

Линейная математическая модель движения денежной массы

Операции коммерческих банков делятся на две большие группы [5]: активные и пассивные. Пассивные операции направлены на мобилизацию, привлечение банком денежных средств. Активные операции заключаются в размещении имеющихся у банка денежных средств. Совокупность денежных средств, участвующих в этих операциях, будем называть денежной массой банка.

При нормальном функционировании коммерческого банка в каждый момент времени в банк поступают денежные средства (от вкладчиков, дебиторов и т.д.), а также покидают его (выдача кредитов заемщику, выдача процентов вкладчику и т.д.), т.е. в каждый момент времени осуществляется движение денежной массы.

Таким образом, на движение денежной массы банка влияют клиенты этого банка (за счет них и осуществляется это движение), а если быть точнее – спрос клиентов на услуги, оказываемые банком. Но для удовлетворения данного спроса необходима соответствующая денежная масса, т.е. существует спрос на денежную массу банка, который должен быть удовлетворен. Это можно записать следующим образом:

$$D(t) \equiv M_1(t), \qquad (1)$$

где $D(t)$ – спрос на денежную массу банка; $M_1(t)$ – денежная масса банка.

Однако на практике банк не может мгновенно реагировать на изменение спроса. Существует запаздывание τ, которое связано со временем, необходимым для формирования соответствующей денежной массы (оформление счета, проверка кредитоспособности клиента и т.д.). Тогда, чтобы сбалансировать работу банка при наличии запаздывания, необходимо составлять планы на будущее и управлять банком так, чтобы удовлетворять прогнозируемый спрос, полагая

$$D(t) = M_1(t - \tau). \qquad (2)$$

Рассмотрим распределение денежной массы банка в момент времени t. Это распределение может быть представлено в следующем виде:

$$M_1 = M_{1L} + M_{1A} + N, \qquad (3)$$

где M_{1L} – операционно-статическая часть денежной массы банка (денежные средства в кассах, резервах и т.д. – денежные средства не участвующие в активных операциях банка); M_{1A} – операционно-динамическая часть денежной массы банка (кредиты, ценные бумаги и т.д. – денежные средства, участвующие в активных операциях банка); N – налоги банка.

Операционно-статическая часть денежной массы банка M_{1L} возрастает с увеличением денежной массы:

$$M_{1L} = pM_1, \qquad (4)$$

где $p = \lim\limits_{\Delta M_1 \to 0} \dfrac{\Delta M_{1L}}{\Delta M_1}$ – предельная склонность к созданию операционно-статической части денежной массы банка. Величина p отражает долю операционно-статической части денежной массы банка M_{1L} в денежной массе банка M_1.

Введем новую величину $a = \lim\limits_{\Delta M_1 \to 0} \dfrac{\Delta M_{1A}}{\Delta M_1}$, представляющую собой предельную склонность к созданию операционно-динамической части денежной массы банка. Величина a отражает долю операционно-динамической части денежной массы банка M_{1A} в денежной массе банка M_1.

Величина p связана с величиной a следующим соотношением:

$$p = 1 - a. \qquad (5)$$

Тогда выражение (4) преобразуется к следующему виду:

$$M_{1L} = (1 - a)M_1. \qquad (6)$$

С учетом выражений (3) и (6), выражение (2) примет следующий вид:

$$D(t) = (1 - a)M_1(t - \tau) + M_{1A}(t) + N_0, \qquad (7)$$

где N_0 – постоянные налоги.

В уравнении (7) полагается, что за время τ операционно-динамическая часть денежной массы банка существенно не меняется, т.е.

$$M_{1A}(t - \tau) = M_{1A}(t).$$

Воспользовавшись теоремой Лагранжа о среднем [4], величина денежной массы банка с учетом запаздывания $M_1(t - \tau)$, примет следующий вид:

$$M_1(t - \tau) = M_1(t) - \tau \dot{M}_1(t) + O(\tau^2). \qquad (8)$$

где $O(\tau^2)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости чем $\tau \dot{M}_1(t)$. Отсюда, с точностью до величины первого порядка относительно τ, выражение (7) преобразуется к следующему виду:

$$D(t) = M_1(t) - aM_1(t) - (1 - a)\tau \dot{M}_1(t) + M_{1A}(t) + N_0. \qquad (9)$$

Учитывая то, что спрос на денежную массу банка должен быть удовле-

творен, т.е. $D(t) = M_1(t)$, выражение (9) примет следующий вид:

$$(1-a)\tau\,\dot{M}_1(t) = -aM_1(t) + M_{1A}(t) + N_0 . \quad (10)$$

Хотя величина $M_{1A}(t)$ за время порядка τ существенно не меняется, она не является постоянной. Операционно-динамическая часть денежной массы банка $M_{1A}(t)$ зависит от общей тенденции развития банка. Для развития банка может быть выбрана следующая стратегия – увеличение операционно-динамической части денежной массы банка $M_{1A}(t)$ в зависимости от денежной массы банка $M_1(t)$. Для каждого банка данная стратегия будет различна.

Одной из возможных стратегий, которую может выбрать банк, является банковский принцип акселератора. Он заключается в увеличении операционно-динамической части денежной массы банка $M_{1A}(t)$ по следующему закону – прямо пропорциональная зависимость $M_{1A}(t)$ от скорости изменения денежной массы банка $\dot{M}_1(t)$, т.е. выполнение соотношения $M_{1A}(t) \equiv c\,\dot{M}_1(t)$, $c > 0$, где c – числовой множитель, на который каждая денежная единица приращенной денежной массы банка увеличивает операционно-динамическую часть денежной массы банка; этот множитель называется коэффициентом акселерации или просто акселератором. Это равенство не может точно выполняться в силу запаздывания τ, но можно приближаться к нему, если будем брать

$$\dot{M}_{1A}(t) = b\left[c\,\dot{M}_1(t) - M_{1A}(t)\right], b > 0 . \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) описывают работу банка на основе движения денежной массы.

Для того, чтобы перейти к динамике процесса изменения денежной массы, продифференцируем (10) и, учитывая (11), получим:

$$(1-a)\tau\,\ddot{M}_1(t) + a\dot{M}_1(t) = b\left[c\,\dot{M}_1(t) - M_{1A}(t)\right]. \quad (12)$$

Окончательный вид уравнения получим, подставив значение $M_{1A}(t)$ из (10) в (12):

$$(1-a)\tau\,\ddot{y} + (a - bc + (1-a)\tau b)\,\dot{y} + aby = 0 , \quad (13)$$

где $y = M_1 - N_0/a$. Данное уравнение описывает движение денежной массы банка.

В общем виде уравнение (13) записывается следующим образом:

$$m\,\ddot{y} + k\,\dot{y} + \eta y = 0 . \quad (14)$$

Сравнивая (14) с (13), получаем:

$$m = (1-a)\tau , \quad (15)$$

$$k = (a - bc + (1-a)\tau b), \quad (16)$$

$$\eta = ab . \quad (17)$$

Характеристический многочлен $D(p) = mp^2 + kp + \eta$ однородного уравнения (14) имеет следующие корни

$$\lambda_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4m\eta}}{2m},$$

$$\lambda_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4m\eta}}{2m}. \quad (18)$$

На решение уравнения (14) влияют параметры m, k и η. В виду того, что $0 < a < 1$, $b > 0$ и $\tau > 0$ $-m$ и η всегда больше нуля. В связи с этим, рассмотрим три случая[3].

1) $k > 0$

В силу (18), в зависимости от знака $k^2 - 4m\eta$, решение задается следующими формулами.

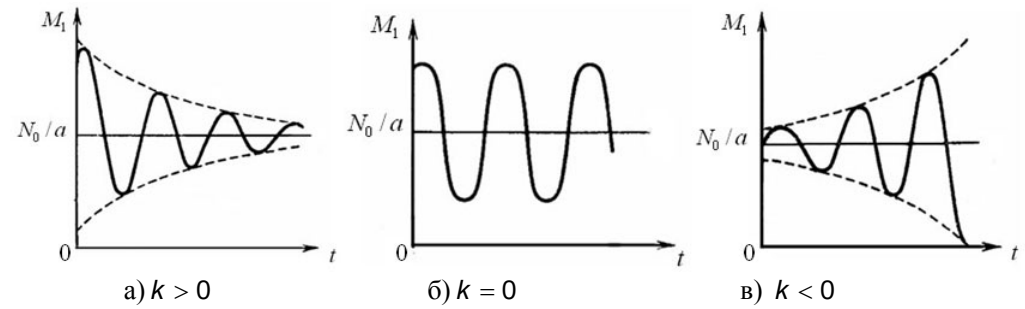


Рис. 1. Характеры интегральных кривых при различном значении k

При $k^2 < 4m\eta$ общее решение уравнения (14) имеет вид

$$y(t) = e^{-\gamma t}(c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t), \qquad (19)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные, $\gamma = k / 2m$, $\omega_1 = \sqrt{4m\eta - k^2} / 2m$.

При $k^2 \geq 4m\eta$ общее решение уравнения (14) имеет вид

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (20)$$

или

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}. \qquad (21)$$

У интегральных кривых наблюдаются затухания колебаний, так как в (19), (20) и (21): $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$ и отклонение $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

2) $k = 0$

Решение уравнения (14) в рассматриваемом случае имеет вид

$$y(t) = c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t. \qquad (22)$$

У интегральных кривых наблюдаются незатухающие колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{\eta / m}$. Амплитуда и фаза колебаний определяются из начальных условий.

3) $k < 0$

В силу (18) действительная часть корня λ_1 положительна и при $c_1 \neq 0$ решение $y = y(t)$ неограниченно при $t \to +\infty$.

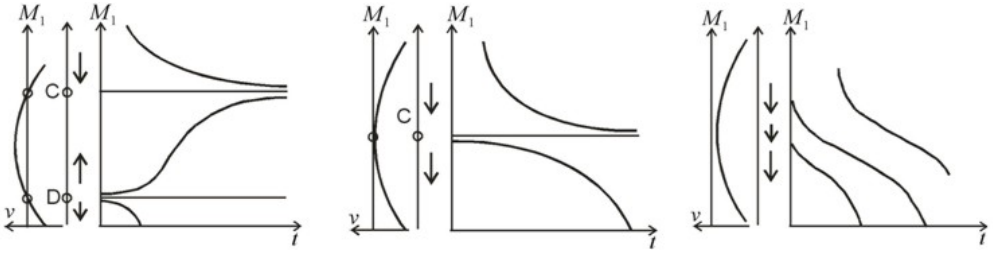
Так как $y = M_1 - N_0/a$, то, предварительно интерпретировав переменные в соответствии с их экономическим смыслом, получим, что колебания величины M_1 около N_0/a соответствуют периодам подъема и спада денежной массы банка. Таким образом: при $k > 0$ наблюдается затухание колебаний денежной массы банка (рис. 1, *а*); при $k = 0$ имеем незатухающие колебания денежной массы банка вокруг положения равновесия $M_1 = N_0 / a$ (рис. 1, *б*); при $k < 0$ колебания денежной массы M_1 при $t > +\infty$ неограниченно возрастают, когда функция $M_1(t)$ пересечет ось t, банк станет банкротом (рис. 1, *в*).

Таким образом, k является управляющим параметром, однозначно характеризующим финансовую устойчивость коммерческого банка по требованию движения денежной массы.

При $k \geq 0$ – банк финансово устойчив.

При $k < 0$ – банк финансово неустойчив.

Нелинейная математическая модель с учетом убыли денежной массы банка



а) $0 < l < 1/4$ б) $l = 1/4$ в) $l > 1/4$

Рис. 2. Поля фазовых скоростей при различных значениях l

Предположим, что скорость изменения денежной массы банка $\dot{M}_1$ пропорциональна величине денежной массы банка M_1, т.е.

$$\dot{M}_1 = rM_1, \qquad (23)$$

где $r > 0$ – коэффициент прироста денежной массы банка.

Не нарушая общности, будем считать коэффициент r переменной величиной, обусловленной изменяющимися внутренними и внешними факторами, действующими на банк. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент прироста r зависит от величины денежной массы банка M_1 как линейная неоднородная функция: $r = s - hM_1$. С учетом этого уравнение роста денежной массы банка примет следующий вид:

$$\dot{M}_1 = (s - hM_1)M_1. \qquad (24)$$

Коэффициенты s и h превратим в единицу выбором масштабов времени t и M_1. В результате уравнение (24) примет следующий вид:

$$\dot{M}_1 = (1 - M_1)M_1. \qquad (25)$$

В каждый момент времени в банке происходит убыль денежной массы банка M_1, обусловленная выдачей прибыли, закрытием счета и т.д. С учетом этого уравнение (25) может быть преобразовано в следующее:

$$\dot{M}_1 = (1 - M_1)M_1 - l, \qquad (26)$$

где l – скорость убыли денежной массы банка.

Полученное автономное дифференциальное уравнение описывает рост денежной массы коммерческого банка с учетом ее убыли. Решения данного уравнения представляются в виде логистических кривых. Логистическая кривая имеет две горизонтальные асимптоты и описывает переход от одного состояния к другому [1]. При малых значениях M_1 логистическая кривая практически неотличима от экспоненциальной. Однако по мере увеличения M_1 экспонента уходит вверх от логистической кривой.

Проанализируем поля фазовых скоростей при различных значениях скорости убыли денежной массы банка l (рис. 2).

В результате приходим к следующим выводам:

1) при $0 < l < 1/4$ существует два положения равновесия (C и D на рис. 2, *а*). Положение равновесия ($x = D$) неустойчиво. Верхнее положение равновесия B устойчиво;

2) при $l > 1/4$ равновесий нет, через конечное время банк станет банкротом (рис. 2, *в*);

3) при $l = 1/4$ имеется одно неустойчивое состояние равновесия (рис. 2, *б*). Убыль денежной массы банка с такой скоростью при достаточно большой начальной величине математически возможна в течение сколь угодно длительного времени, однако сколь угодно малое колебание величины денежной массы банка от ее равновесного значения приведет к банкротству банка.

Таким образом, для того, чтобы коммерческий банк находился в финансово-устойчивом состоянии, необходимо выполнение условия: $l < 1/4$.

Линейная математическая модель роста денежной массы с учетом конкуренции

Конкуренция – необходимое условие эффективного функционирования рынка. В самом общем плане конкуренция представляет собой соперничество рыночных субъектов, заинтересованных в достижении одной и той же цели. Очевидно, что все коммерческие банки в условиях конкуренции стремятся к сохранению стабильности своих рыночных позиций, т.е. к финансовой устойчивости [2]. В таком случае, достижение финансовой устойчивости в условиях конкуренции является важнейшей задачей банковского дела. В связи с этим рассмотрим следующую математическую модель.

Предположим, что денежная масса у каждого банка изменяется со временем в зависимости от трех факторов: количества денежной массы у конкурента, убыли денежной массы своего банка и степени недоверия между конкурентами. Темпы прироста и уменьшения денежных масс банков пропорциональны указанным факторам, т.е.

$$\dot{M}_1 = u_1 M_2(t) - v_1 M_1(t) + w_1, \qquad (27)$$

$$\dot{M}_2 = u_2 M_1(t) - v_2 M_2(t) + w_2.$$

В уравнениях (27) $M_1(t) \geq 0$, $M_2(t) \geq 0$ – денежные массы первого и второго банков, $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ – функции независящие от времени, характеризующие процесс прироста денежной массы, $v_1 > 0$, $v_2 > 0$ – функции независящие от времени, характеризующие процесс убыли денежной массы, $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$ – функции независящие от времени, описывающие уровень взаимной настороженности (недоверия) конкурентов, который считается не зависящим от количества денежной массы, а определяется другими причинами.

Исследуем систему (27) в плоскости M_1, M_2 с целью определить качественное поведение функций $M_1(t)$, $M_2(t)$ во времени. Уравнения (27) имеют положение равновесия $\dot{M}_1 = 0$ и $\dot{M}_2 = 0$. Равновесные значения M_1^0, M_2^0 находятся, очевидно, из условий

$$u_1 M_2(t) - v_1 M_1(t) + w_1 = 0,$$

$$u_2 M_1(t) - v_2 M_2(t) + w_2 = 0 \qquad (28)$$

и равны

$$M_1^0 = \frac{u_1 w_2 + v_2 w_1}{v_1 v_2 - u_1 u_2},$$

$$M_2^0 = \frac{u_2 w_1 + v_1 w_2}{v_1 v_2 - u_1 u_2}. \qquad (29)$$

Из (29) следует важный вывод: для того чтобы равновесие существовало при положительных значениях величин M_1^0, M_2^0 (по своему смыслу функции $M_1(t)$, $M_2(t)$ неотрицательны), должно выполняться неравенство

$$v_1 v_2 > u_1 u_2. \qquad (30)$$

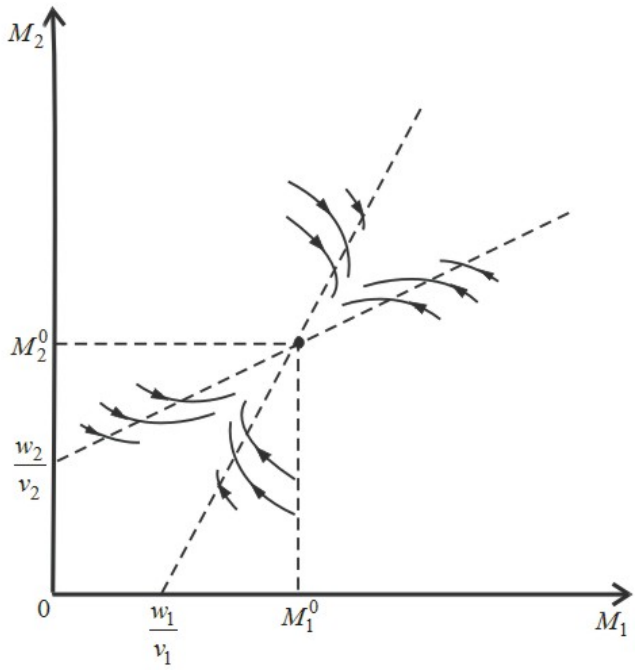


Рис. 3. Интегральные кривые уравнений (27)

Штриховые прямые отвечают изоклинами нуля ($M_2 = \frac{u_2}{v_2} M_1 + \frac{w_2}{v_2}$) и бесконечности ($M_2 = \frac{v_1}{u_1} M_1 + \frac{w_1}{u_1}$). Изоклина нуля имеет наклон, меньший, чем изоклина бесконечности (это следует из неравенства (30)). Сплошным линиям соответствуют интегральные кривые. Стрелками показано направление движения по интегральным кривым с течением времени. Функции $M_1(t)$ и $M_2(t)$ при возрастании t стремятся к равновесным значениям, следовательно, равновесие устойчиво.

Смысл условия (30) проясняется из следующих рассуждений. Пусть, например, параметры u_1, v_1 и v_2 неизменны, а параметр u_2 увеличи-вается. Это означает, что первый банк не меняет свою стратегию в области увеличения денежной массы, а второй увеличивает денежную массу при неизменном темпе ее убыли. Тогда при достаточно большой величине u_2 равновесие станет заведомо невозможным, а неравенство (30) обязательно нарушится. Так же необходимо отметить, если параметры w_1, w_2, характеризующие взаимное недоверие, равны нулю, то положению равновесия отвечает отсутствие денежной массы у обоих банков.

Изучим вопрос об устойчивости равновесия (29) при условии (30). В этом случае интегральные кривые уравнений (27) в плоскости M_1, M_2 имеют вид, изображенный на рис. 3.

Из построенной модели нетрудно определить некоторые характерис-тики возможных поведений конкурентов при переходе от одного положения равновесия к другому. Пусть, например, темп наращивания денежной массы в первом и втором банках изменяется на небольшую величину du ($du = du_1 = du_2$). При этом денежные массы банков также изменятся, причем оба банка желают, чтобы приращения dM_1^0 и dM_2^0 были равными и интересы обеих сторон не ущемлялись. Для величин dM_1^0, dM_2^0 из (28) получаем

$$dM_1^0 = \frac{u_1 u_2 w_2 + u_2 v_2 w_1 + u_1^2 w_2 + u_1 v_2 w_1}{(v_1 v_2 - u_1 u_2)^2} du, \tag{31}$$

$$dM_2^0 = \frac{u_1 u_2 w_1 + u_1 v_1 w_2 + u_2^2 w_1 + u_2 v_1 w_2}{(v_1 v_2 - u_1 u_2)^2} du.$$

Предположим, что настороженности (недоверия) конкурентов равные ($w_1 = w_2$). Тогда из равенства $dM_1^0 = dM_2^0$ получаем условие равенства обеих сторон при небольшом изменении равновесия

$$u_1(u_1 + v_2 - v_1) = u_2(u_2 + v_1 - v_2), \qquad (32)$$

которое может быть положено в основу соответствующих договоренностей между банками, если известны величины u_1, u_2, v_1, v_2. Так, например, пусть $u_2 = \alpha u_1$, $\alpha > 0$. В этом случае из предыдущего равенства получаем

$$u_1(1 - \alpha) = v_1 - v_2. \qquad (33)$$

При $\alpha < 1$ (темп прироста денежной массы у второго банка меньше, чем у первого) для сохранения равенства обеих сторон необходимо $v_2 < v_1$, т.е. у второго банка (в соответствии с формулой (33)) темп потери денежной массы должен быть меньше. При противоположном неравенстве $\alpha > 1$, имеем $v_2 > v_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 272 с.

2. *Денежное* обращение и банки / Под ред. Г.Н. Белоглазовой, Г.В. Толоконцевой – М.: Финансы и статистика, 2000. – 335 с.

3. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.– М: Наука, 1986. 272 с.

4. *Очан В.В.* Математический анализ. – М: Высшая школа, 1968. 720 с.

5. *Райзберг Б.А.* Курс экономики. – М.: ИНФРА-М, 2006. 672 с.

6. *Финансовый* менеджмент: теория и практика / Под ред. Е.С. Стояновой. – М.: Перспектива, 1999. – 656 с. ГИАБ

Коротко об авторах

Халкечев Р.К. – Московский государственный горный университет.