УДК 622.142

Г.М. Редькин

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ КООРДИНИРОВАННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ

Семинар № 2

Значения геологических показателей отражают неоднородность пространственного орудинения, связанную с периодом формирования месторождений и воздействием диагенеза, эпигенеза, метаморфизма, тектонических деформаций.

При вероятностном подходе к математическому моделированию геологических объектов значения геологических показателей представляют как величины, имеющие закономерную и случайную составляющие. Соотношение между этими составляющими зависит от особенностей природного строения полезного ископаемого, размеров проб и расстояний между пробами [1]. Чем равномернее орудинение и меньше расстояние между пробами, тем больше доля закономерной составляющей.

Закономерная составляющая порождает, индуцирует изменчивость и анизотропию изменчивости, выраженную математическими ожиданиями геологических показателей, которые зависят от координат точек пространства. Поэтому ее называют координированной изменчивостью [2].

В качестве показателя анизотропии координированной изменчивости исследуемого параметра в некотором направлении внутри залежи П.К. Соболевский (1932 г.) предложил величину среднего градиента поля параметра в этом направлении [3] или в более точной математической формулировке величину среднего модуля производной поля параметра в этом направлении. Данный показатель использован Четвериковым [4] при геометрическом моделировании (палеточный способ) анизотропии координированной изменчивости топофункций, выраженных системами изолиний. Однако в аналитическом виде этот показатель реализован не был. Отметим свойство модулей нарушать гладкость аналитических выражений, что существенно затрудняет математические операции над последними. Поэтому в исследованиях зачастую переходят к квадратическим выражениям и критериям (например метод наименьших квадратов).

В свете изложенного, примем в качестве показателя анизотропии координированной изменчивости среднее квадратическое значение производной математического ожидания геологического показателя по любому направлению в геометрическом поле залежи. Этот показатель аналогичный по смыслу показателю, предложенному П.К. Соболевским [3], выразим в аналитическом виде.

Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат $0xyz$ и рассмотрим в ней геометрическое поле V залежи, в котором размещен исследуемый геологический показатель $c = f\left(u\right)$, где $u = \left(x;y;z\right)$ - точка (радиус - вектор точки) геометрического поля V, т.е. $u \in V$ и определено в аналитическом виде его математическое ожидание

$M(u) = Mf(u)$.

Направление в пространстве зададим с помощью орта-единичного вектора направляющих косинусов [5]

$$e = (\cos\alpha; \quad \cos\beta; \quad \cos\gamma), \qquad (1)$$

где $\alpha = (e, 0x)$, $\beta = (e, 0y)$, $\gamma = (e, 0z)$ - углы между ортом направления e и соответственно осями координат $0x$, $0y$, $0z$.

Градиентом математического ожидания $M(u)$ в точке и геометрического поля V залежи называется вектор, координатами которого являются частные производные по всем переменным

$$grad\ M(u) = \left(\frac{\partial M(u)}{\partial x}; \quad \frac{\partial M(u)}{\partial y}; \quad \frac{\partial M(u)}{\partial z} \right). \qquad (2)$$

С помощью градиента найдем производную математического ожидания $M(u)$ по направлению e в точке $u \in V$, которая равна скалярному произведению градиента (2) и направления (1)

$$\frac{\partial M(u)}{\partial e} = gradM(u) \cdot e = \frac{\partial M(u)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial M(u)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial M(u)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (3)$$

Возведем в квадрат левую и правую части равенства (3) и получим квадрат производной математического ожидания $M(u)$ по направлению e в точке $u \in V$

$$J_e^2(u) = J_x^2(u)\cos^2\alpha + J_y^2(u)\cos^2\beta + J_z^2(u)\cos^2\gamma + 2J_x(u)J_y(u)\cos\alpha\cos\beta + 2J_x(u)J_z(u)\cos\alpha\cdot\cos\gamma + 2J_y(u)J_z(u)\cos\beta\cos\gamma, \qquad (4)$$

где приняты обозначения:

$$J_e(u) = \frac{\partial M(u)}{\partial e}; \quad J_x(u) = \frac{\partial M(u)}{\partial x};$$

$$J_y(u) = \frac{\partial M(u)}{\partial y}; \quad J_z(u) = \frac{\partial M(u)}{\partial z}.$$

Обозначим через:

$$\left[J^2(e)\right] = \frac{1}{|V|}\int_V J_e^2(u)\,du,$$

$$\left[J_x^2\right] = \frac{1}{|V|}\int_V J_x^2(u)\,du,$$

$$\left[J_y^2\right] = \frac{1}{|V|}\int_V J_y^2(u)\,du, \quad \left[J_z^2\right] = \frac{1}{|V|}\int_V J_z^2(u)\,du,$$

$$\left[J_xJ_y\right] = \left[J_yJ_x\right] = \frac{1}{|V|}\int_V J_x(u)J_y(u)\,du, \qquad (5)$$

$$\left[J_xJ_z\right] = \left[J_zJ_x\right] = \frac{1}{|V|}\int_V J_x(u)J_z(u)\,du,$$

$$\left[J_yJ_z\right] = \left[J_zJ_y\right] = \frac{1}{|V|}\int_V J_y(u)J_z(u)\,du.$$

- средние значения по геометрическому полю V выражений, стоящих в квадратных скобках.

Проинтегрируем равенство (4) по геометрическому полю V с последующим делением на объем $|V|$ поля V и получим среднее значение по геометрическому полю V квадратов производной по направлению e, математического ожидания $M(u)$, которое представляет собой квадратичную форму [6]. С учетом обозначений (5) выразим эту квадратичную форму в матричном виде

$$\left[J^2(e)\right] = e \cdot J \cdot e^T, \qquad (6)$$

где $e^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$ - транспонированный, задающий направление в пространстве, орт e (1);

$$J = \begin{Vmatrix} \left[J_x^2\right] & \left[J_x J_y\right] & \left[J_x J_z\right] \\ \left[J_y J_x\right] & \left[J_y^2\right] & \left[J_y J_z\right] \\ \left[J_z J_x\right] & \left[J_z J_y\right] & \left[J_z^2\right] \end{Vmatrix} \qquad (7)$$

- тензор второго ранга, выраженный в выбранной системе координат квадратной симметричной неособенной матрицей.

Тензор (5) является полной характеристикой анизотропной изменчивости геологического показателя $c = f(u)$, размещенного в геометрическом поле V. Умножая его слева и справа соответственно на направляющие орты e и e^T, получим среднее значение квадратов производной по направлению e закономерной составляющей геологического показателя.

Извлекаем корень квадратный из равенства (6) и определим в аналитическом виде моделируемый показатель анизотропии координированной изменчивости

$$J(e) = \sqrt{\left[J^2(e)\right]} = \sqrt{e \cdot J \cdot e^T} \qquad (8)$$

- среднее квадратическое значение производной математического ожидания геологического показателя по любому направлению e.

Показатель (8) является важной дифференциально-интегральной характеристикой средне-квадратической скорости роста поля значений закономерной составляющей геологического показателя в произвольном направлении. Приводя симметричный тензор (7) к диагональному виду определим его и показателя (8) главные направления и главные значения, которые представляют собой экстремальные значения характеристик анизотропии координированной изменчивости.

На основе разработанных тензора (7) и показателя (8) можно решить различные задачи рационального использования месторождений полезных ископаемых, включая определение: погрешностей оценок содержаний в блоках; геометрии разведочных сетей; направлений добычных работ и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каждан А.Б.* Методологические основы разведки полезных ископаемых. - М.: Недра, 1974. - 270 с.
2. *Павелко В.Л.* Общие требования к показателям и методам оценки изменчивости//Геометризация месторождений полезных ископаемых. - М.: Недра, 1977, с. 71-82.
3. *Соболевский П.К.* Современная горная геометрия// Социалистическая реконструкция и наука. - 1932. -№7. –С.32-65.
4. *Четвериков Л.И.* Наблюдаемая изменчивость параметров залежи// Геометризация месторождений полезных ископаемых. – М.: Недра, 1977, с. 36-46.
5. *Борисенко А.И., Тарапов И.Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Изд.ХГУ, 1972. -255 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 575 с. ГИАБ

Коротко об авторах

Редькин Г.М. – кандидат технических наук, доцент, зам. зав. кафедры прикладной математики Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 2 симпозиума «Неделя горняка-2006».
Рецензент д-р техн. наук, проф. *В.Н. Попов.*