УДК 622.73

В.Н. Кононенко

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ, ИЗОТРОПНОЙ ДРОБИМОЙ ЧАСТИЦЫ В ВИДЕ КУБА СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Исследован резонансный механизм разрушения твердых тел в дробильном оборудовании.

Задача по определению собственных колебаний однородной, изотропной дробимой частицы в виде куба со свободными краями может быть приближённо решена методом Ритца.

Обозначим плотность ρ, модуль Юнга E, коэффициент Пуассона ν.

Рассмотрим упругий куб со стороной a. Граничные условия: края свободны, т.е. напряжения на внешних гранях куба равны нулю. Основную собственную частоту в данном случае определяют как продольные, так и поперечные колебания.

Из разложения в ряд Фурье амплитуды: $\vec{\varphi}(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cdot \vec{f}_k(\vec{x})$ возьмём первое приближение для амплитуды низших собственных колебаний:

$$u := \phi_{0,0,0,1} + \phi_{0,1,0,1}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{1,0,0,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \phi_{1,1,0,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{0,0,1,1}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$
$$+ \phi_{0,1,1,1}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,0,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,1,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

$$v := \phi_{0,0,0,2} + \phi_{0,1,0,2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{1,0,0,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \phi_{1,1,0,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{0,0,1,2}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$
$$+ \phi_{0,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,0,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

$$w := \phi_{0,0,0,3} + \phi_{0,1,0,3}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{1,0,0,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \phi_{1,1,0,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{0,0,1,3}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$
$$+ \phi_{0,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,0,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right),$$

удовлетворяющее граничным условиям (центр куба неподвижен, т.е. перемещения как твёрдого тела исключены). Потенциальная энергия:

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a V_0(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

, где удельная энергия деформации (в единице объёма):

$$V0 := \frac{1}{2}\nu E\left(-\frac{\phi_{1,0,0,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi}{a} - \frac{\phi_{1,1,0,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{a} - \frac{\phi_{1,0,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\right.$$
$$- \frac{\phi_{1,1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a} - \frac{\phi_{0,1,0,2}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a} - \frac{\phi_{1,1,0,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{0,1,1,2}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{0,0,1,3}\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{0,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,0,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}\Bigg)^2/((1+\nu)$$

$$(1-2\nu))+E\Bigg(\Bigg(-\frac{\phi_{1,0,0,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,0,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{1,0,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}$$

$$-\frac{\phi_{1,1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\Bigg)^2+\Bigg(-\frac{\phi_{0,1,0,2}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,0,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{0,1,1,2}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\Bigg)^2+\Bigg(-\frac{\phi_{0,0,1,3}\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{0,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,0,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}\Bigg)^2\Bigg)/($$

$$2+2\nu)+\frac{1}{2}E\Bigg(\Bigg(-\frac{\phi_{0,1,0,1}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,0,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{0,1,1,1}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}$$

$$-\frac{\phi_{1,1,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{1,0,0,2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,0,2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{a}$$

$$-\frac{\phi_{1,0,1,2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\Bigg)^2+\Bigg(-\frac{\phi_{0,0,1,1}\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{0,1,1,1}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,0,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{1,0,0,3}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,0,3}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{1,0,1,3}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}$$

$$-\frac{\phi_{1,1,1,3}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\Bigg)^2+\Bigg(-\frac{\phi_{0,0,1,2}\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{0,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{1,0,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{0,1,0,3}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a}$$

$$-\frac{\phi_{1,1,0,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi}{a}-\frac{\phi_{0,1,1,3}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}-\frac{\phi_{1,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\Bigg)^2\Bigg)/($$

$$2+2\nu)\ .$$

Кинетическая энергия:

$$T:=\frac{1}{2}\rho\int_0^a\int_0^a\int_0^a \mathrm{u2}(x,y,z)+\mathrm{v2}(x,y,z)+\mathrm{w2}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\ ,$$

где удельная кинетическая энергия равна сумме:

$$u2 := \left(\phi_{0,0,0,1} + \phi_{0,1,0,1}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{1,0,0,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \phi_{1,1,0,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{0,0,1,1}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right.$$
$$\left. + \phi_{0,1,1,1}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,0,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,1,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right)^2$$

$$v2 := \left(\phi_{0,0,0,2} + \phi_{0,1,0,2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{1,0,0,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \phi_{1,1,0,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{0,0,1,2}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right.$$
$$\left. + \phi_{0,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,0,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,1,1,2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right)^2$$

$$w2 := \left(\phi_{0,0,0,3} + \phi_{0,1,0,3}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{1,0,0,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \phi_{1,1,0,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \phi_{0,0,1,3}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right.$$
$$\left. + \phi_{0,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,0,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \phi_{1,1,1,3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right)^2$$

Тогда квадратичная форма $J(\varphi_0,...\varphi_N) = V(\varphi_0,...\varphi_N) - p^2 \cdot T(\varphi_0,...\varphi_N) \to \min$ для потенциальной и кинетической энергии примет вид:

$$J := \frac{1}{16} E\,a\,(-64\,\nu\,\phi_{1,0,0,1}\,\phi_{0,1,0,2} + 32\,\phi_{0,1,1,1}\,\phi_{1,0,1,2}\,\nu - 32\,\nu\,\phi_{1,0,1,1}\,\phi_{0,1,1,2} - 64\,\nu\,\phi_{0,1,0,2}\,\phi_{0,0,1,3} - 32\,\nu\,\phi_{1,1,0,1}\,\phi_{0,1,1,3}$$
$$+ 64\,\phi_{0,1,0,1}\,\phi_{1,0,0,2}\,\nu + 64\,\phi_{0,0,1,2}\,\phi_{0,1,0,3}\,\nu - 32\,\nu\,\phi_{1,1,0,2}\,\phi_{1,0,1,3} - 16\,\phi_{0,1,1,1}\,\phi_{0,1,1,2} - 16\,\phi_{0,1,1,1}\,\phi_{1,1,0,3}$$
$$- 32\,\phi_{0,1,0,1}\,\phi_{1,0,0,2} + 64\,\phi_{0,0,1,1}\,\phi_{1,0,0,3}\,\nu + 32\,\phi_{1,0,1,2}\,\phi_{1,1,0,3}\,\nu + 32\,\phi_{0,1,1,1}\,\phi_{1,1,0,3}\,\nu + 4\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,1}^{\;2}\,\nu$$
$$+ 4\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,1}^{\;2}\,\nu + 4\,\pi^2\,\nu\,\phi_{0,1,0,2}^{\;2} + 4\,\phi_{0,1,1,1}^{\;2}\,\nu\,\pi^2 + 4\,\nu\,\phi_{0,1,1,3}^{\;2}\,\pi^2 + 3\,\phi_{1,1,1,2}^{\;2}\,\nu\,\pi^2 + 4\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,2}^{\;2}\,\nu$$
$$+ 4\,\pi^2\,\nu\,\phi_{1,1,0,2}^{\;2} + 4\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,3}^{\;2}\,\nu + 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,3}^{\;2}\,\nu + 4\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,1}^{\;2}\,\nu + 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,2}^{\;2}\,\nu + 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,2}^{\;2}\,\nu$$
$$+ 4\,\pi^2\,\nu\,\phi_{1,0,1,3}^{\;2} + 4\,\phi_{0,1,1,2}^{\;2}\,\nu\,\pi^2 + 3\,\nu\,\phi_{1,1,1,3}^{\;2}\,\pi^2 + 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,1}^{\;2}\,\nu + 4\,\pi^2\,\nu\,\phi_{1,0,0,1}^{\;2} + 3\,\phi_{1,1,1,1}^{\;2}\,\nu\,\pi^2$$
$$+ 4\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,3}^{\;2}\,\nu + 4\,\pi^2\,\nu\,\phi_{0,0,1,3}^{\;2} - 2\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,3}^{\;2} - 3\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,2}^{\;2} - 2\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,2}^{\;2} - 2\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,2}^{\;2} - 4\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,3}^{\;2}$$
$$- 3\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,1}^{\;2} - 4\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,2}^{\;2} - 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,1}^{\;2} - 2\,\phi_{1,1,1,2}^{\;2}\,\pi^2 - 3\,\phi_{0,1,1,3}^{\;2}\,\pi^2 - 2\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,3}^{\;2} - 2\,\phi_{1,1,1,1}^{\;2}\,\pi^2$$
$$- 3\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,1}^{\;2} - 2\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,1}^{\;2} - 2\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,1}^{\;2} - 2\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,3}^{\;2} - 32\,\phi_{0,0,1,2}\,\phi_{0,1,0,3} - 2\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,2}^{\;2} - 3\,\phi_{0,1,1,2}^{\;2}\,\pi^2$$
$$- 32\,\phi_{0,0,1,1}\,\phi_{1,0,0,3} - 16\,\phi_{1,0,1,2}\,\phi_{1,1,0,3} - 64\,\nu\,\phi_{1,0,0,1}\,\phi_{0,0,1,3} - 2\,\phi_{0,1,1,1}^{\;2}\,\pi^2 - 3\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,3}^{\;2} - 2\,\phi_{1,1,1,3}^{\;2}\,\pi^2) / (-1 + \nu + 2\,\nu^2) - \frac{1}{2} p2\,\rho\left(a^3\,\phi_{0,0,0,1}^{\;2} + a^3\,\phi_{0,0,0,2}^{\;2} + a^3\,\phi_{0,0,0,3}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{0,1,0,2}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{0,0,1,2}^{\;2} + \frac{1}{4} a^3\,\phi_{1,1,0,3}^{\;2}\right.$$
$$+ \frac{1}{4} a^3\,\phi_{1,1,0,2}^{\;2} + \frac{1}{8} a^3\,\phi_{1,1,1,2}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{0,0,1,1}^{\;2} + \frac{1}{4} a^3\,\phi_{1,1,0,1}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{1,0,0,1}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{1,0,0,3}^{\;2} + \frac{1}{8} a^3\,\phi_{1,1,1,1}^{\;2}$$
$$+ \frac{1}{4} a^3\,\phi_{0,1,1,1}^{\;2} + \frac{1}{4} a^3\,\phi_{1,0,1,3}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{1,0,0,2}^{\;2} + \frac{1}{4} a^3\,\phi_{1,0,1,1}^{\;2} + \frac{1}{8} a^3\,\phi_{1,1,1,3}^{\;2} + \frac{1}{4} a^3\,\phi_{0,1,1,2}^{\;2} + \frac{1}{4} a^3\,\phi_{0,1,1,3}^{\;2}$$
$$\left. + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{1,0,0,3}^{\;2} + \frac{1}{4} a^3\,\phi_{1,0,1,2}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{0,0,1,3}^{\;2} + \frac{1}{2} a^3\,\phi_{0,1,0,1}^{\;2}\right).$$

Для нахождения минимума J необходимо приравнять координаты градиента J нулю:

$$u1 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(6\,\phi_{1,1,1,1}\,\nu\,\pi^2 - 4\,\phi_{1,1,1,1}\,\pi^2)}{-1 + \nu + 2\,\nu^2} - \frac{1}{8} p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,1,1,1}$$

$$u2 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(6\,\phi_{1,1,1,2}\,\nu\,\pi^2 - 4\,\phi_{1,1,1,2}\,\pi^2)}{-1 + \nu + 2\,\nu^2} - \frac{1}{8} p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,1,1,2}$$

$$u3 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(6\,\nu\,\phi_{1,1,1,3}\,\pi^2 - 4\,\phi_{1,1,1,3}\,\pi^2)}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{8}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,1,1,3}$$

$$u4 := -p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,0,0,1}$$

$$u5 := -p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,0,0,2}$$

$$u6 := -p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,0,0,3}$$

$$u7 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-64\,\nu\,\phi_{0,1,0,2} + 8\,\pi^2\,\nu\,\phi_{1,0,0,1} - 8\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,1} - 64\,\nu\,\phi_{0,0,1,3})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,0,0,1}$$

$$u8 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(64\,\phi_{0,1,0,1}\,\nu - 32\,\phi_{0,1,0,1} + 8\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,2}\,\nu - 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,2})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,0,0,2}$$

$$u9 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(64\,\phi_{0,0,1,1}\,\nu + 8\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,3}\,\nu - 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,0,3} - 32\,\phi_{0,0,1,1})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,0,0,3}$$

$$u10 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(64\,\phi_{1,0,0,2}\,\nu - 32\,\phi_{1,0,0,2} + 8\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,1}\,\nu - 4\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,1})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,1,0,1}$$

$$u11 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-64\,\nu\,\phi_{1,0,0,1} - 64\,\nu\,\phi_{0,0,1,3} + 8\,\pi^2\,\nu\,\phi_{0,1,0,2} - 8\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,2})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,1,0,2}$$

$$u12 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(64\,\phi_{0,0,1,2}\,\nu + 8\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,3}\,\nu - 4\,\pi^2\,\phi_{0,1,0,3} - 32\,\phi_{0,0,1,2})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,1,0,3}$$

$$u13 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(64\,\phi_{1,0,0,3}\,\nu + 8\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,1}\,\nu - 4\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,1} - 32\,\phi_{1,0,0,3})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,0,1,1}$$

$$u14 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(64\,\phi_{0,1,0,3}\,\nu + 8\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,2}\,\nu - 32\,\phi_{0,1,0,3} - 4\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,2})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,0,1,2}$$

$$u15 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-64\,\nu\,\phi_{0,1,0,2} + 8\,\pi^2\,\nu\,\phi_{0,0,1,3} - 8\,\pi^2\,\phi_{0,0,1,3} - 64\,\nu\,\phi_{1,0,0,1})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,0,1,3}$$

$$u16 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-32\,\nu\,\phi_{0,1,1,3} + 8\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,1}\,\nu - 6\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,1})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,1,0,1}$$

$$u17 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-32\,\nu\,\phi_{1,0,1,3} + 8\,\pi^2\,\nu\,\phi_{1,1,0,2} - 6\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,2})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,1,0,2}$$

$$u18 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-16\,\phi_{0,1,1,1} + 32\,\phi_{1,0,1,2}\,\nu + 32\,\phi_{0,1,1,1}\,\nu + 8\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,3}\,\nu - 4\,\pi^2\,\phi_{1,1,0,3} - 16\,\phi_{1,0,1,2})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,1,0,3}$$

$$u19 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-32\,\nu\,\phi_{0,1,1,2} + 8\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,1}\,\nu - 6\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,1})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,0,1,1}$$

$$u20 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(32\,\phi_{0,1,1,1}\,\nu - 16\,\phi_{0,1,1,1} + 32\,\phi_{1,1,0,3}\,\nu + 8\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,2}\,\nu - 4\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,2} - 16\,\phi_{1,1,0,3})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,0,1,2}$$

$$u21 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-32\,\nu\,\phi_{1,1,0,2} + 8\,\pi^2\,\nu\,\phi_{1,0,1,3} - 6\,\pi^2\,\phi_{1,0,1,3})}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{1,0,1,3}$$

$$u22 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(32\,\phi_{1,0,1,2}\,\nu - 16\,\phi_{1,0,1,2} - 16\,\phi_{1,1,0,3} + 32\,\phi_{1,1,0,3}\,\nu + 8\,\phi_{0,1,1,1}\,\nu\,\pi^2 - 4\,\phi_{0,1,1,1}\,\pi^2)}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,1,1,1}$$

$$u23 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-32\,\nu\,\phi_{1,0,1,1} + 8\,\phi_{0,1,1,2}\,\nu\,\pi^2 - 6\,\phi_{0,1,1,2}\,\pi^2)}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,1,1,2}$$

$$u24 := \frac{1}{16}\frac{E\,a\,(-32\,\nu\,\phi_{1,1,0,1} + 8\,\nu\,\phi_{0,1,1,3}\,\pi^2 - 6\,\phi_{0,1,1,3}\,\pi^2)}{-1+\nu+2\,\nu^2} - \frac{1}{4}\,p2\,\rho\,a^3\,\phi_{0,1,1,3}$$

что даёт однородную линейную алгебраическую систему уравнений с 24 неизвестными. Нетривиальное (ненулевое) решение этой системы существует при

некоторых значениях p, минимальное из которых равно основной частоте собственных колебаний:

$$p := \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{E(\pi^2 - 8)}{\rho a^2 (1+\nu)}}}{2}. \qquad (1)$$

Для дробимой частицы железистого кварцита в виде куба со свободными краями при ν = 0,225 (среднее значение коэффициент Пуассона для железистых кварцитов) соотношение (1) существенно упрощается:

$$p := 0.8735581477\sqrt{\frac{E}{\rho a^2}}. \qquad (2)$$

Ранее было получено выражение для собственных колебаний однородной, изотропной дробимой частицы железистого кварцита в виде куба с жёстко опертыми краями:

$$p := \frac{4.405634079\sqrt{E}}{a\sqrt{\rho}}. \qquad (3)$$

Сравнение с (3) показывает, что при свободных краях происходит снижение основного тона собственных колебаний в 5 раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вибрации* в технике. Т.1: Колебания линейных систем. /Ред. В.В.Болотин. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
2. *Вибрации* в технике. Т.3: Прочность, устойчивость, колебания. /Ред. И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1981. – 548 с.
3. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Изд.ФМЛ, 1959. – 439 с.
4. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания в упругих телах. – М.: Наука, 1981. – 286 с.
6. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979
7. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – М.: Наука, 1968. – 503с.
8. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 933с.
9. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
10. *Прохоров Г.В.* Пакет символьных вычислений Maple V. - М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. ГИАБ

Коротко об авторе

Кононенко В.Н. – кандидат технических наук, доцент кафедры кадастра и геоинженерии КубГТУ.

Рецензент д-р техн.наук, проф. *С.А. Редкозубов*.
Статья представлена Кубанским государственным технологическим университетом.