УДК 532.542

Н.Н. Арефьев, С.М. Штин

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ С ГИДРОСМАЗКОЙ В КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Семинар № 14

При добыче сапропеля шнековыми грунтонасосными установками транспортирование его часто осуществляется по лоткам, на дне которых формируется слой смазывающей жидкости с текучестью большей, чем текучесть сапропеля. Известно [1], что сапропель является вязкопластичной жидкостью, реологические свойства которой описываются уравнением Шведова – Бингама. Для проектирования таких установок необходимо решить задачу по определению основных характеристик течения вязкопластичной жидкости с гидросмазкой в канале при наличии свободной поверхности.

Рассмотрим течение вязкопластичной жидкости (ВПЖ) с гидросмазкой под действием силы тяжести на плоской поверхности бесконечной ширины при наличии одной плоской стенки и одной свободной границы. На рис. 1 и 2 показаны схемы течения ВПЖ под действием силы тяжести, где h_1 - толщина слоя смазывающей жидкости (СЖ) с реологическими характеристиками: p_{02} - предельное напряжение сдвига, $\eta_{пл2}$ - структурная вязкость; $(h-h_1)$ - толщина слоя транспортируемой жидкости (ТЖ) с реологическими характеристиками p_{01} и $\eta_{пл1}$, α - угол наклона стенки к горизонту. Предполагаем, что жидкости друг с другом не перемешиваются, а их плотности равны или близки. Известно [2], что давление на свободной поверхности постоянно, поэтому вдоль этой границы оно не будет зависеть от *x*, то есть

$$\partial p / \partial x = 0 . \tag{1}$$

Проекция силы веса единицы массы на ось *Ox* равна

$$F_x = gSin\alpha , \tag{2}$$

где g – ускорение свободного падения.

Компоненты скорости V_y и V_z принимаем равными нулю, т.е. траектории всех частиц прямолинейны и параллельны, режим движения ламинарный. Тогда из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости [3] получим $\partial V_x / \partial x = 0$. Откуда следует, что скорость течения вдоль оси *ox* не изменяется. Тогда из системы дифференциальных уравнений движения в напряжениях в декартовой системе координат первое уравнение [3]

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = F_x + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z})$$

с учетом стационарности течения ($\partial V_x / \partial t = 0$) можно записать

$$F_x + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}) = 0. \qquad (3)$$

Составляющие тензора скоростей деформации в декартовой системе координат [3] имеют следующие значения:

$$\left\{ \begin{aligned} & D_{xx} = 2\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0; D_{xy} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial y}; D_{xz} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} = 0; \\ & D_{yy} = 2\frac{\partial V_y}{\partial y} = 0; D_{yz} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0; D_{zz} = 2\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \qquad (4)$$

С учетом (4) интенсивность скоростей деформаций (инвариант тензора скоростей деформаций) в соответствии с [3, 4] имеет вид:

$$J = \left[\frac{1}{2}(D_{xx}^2 + D_{yy}^2 + D_{zz}^2) + D_{xy}^2 + D_{yz}^2 + D_{zx}^2\right]^{1/2} = \left|\frac{\partial V_x}{\partial y}\right|. \qquad (5)$$

С учетом (4) и (5) составляющие определяющего уравнения (реологические уравнения) ВПЖ [3, 4] в декартовой системе координат можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & P_{xx} = -p + (\frac{p_0}{J} + \eta_{пл})D_{xx} = -p; \\ & P_{xy} = (\frac{p_0}{J} + \eta_{пл})D_{xy} = p_0\frac{\partial V_x / \partial y}{\left|\partial V_x / \partial y\right|} + \eta_{пл}\frac{\partial V_x}{\partial y} = p_0 Sign\frac{\partial V_x}{\partial y} + \eta_{пл}\frac{\partial V_x}{\partial y}; \\ & P_{xz} = (\frac{p_0}{J} + \eta_{пл})D_{xz} = 0. \end{aligned} \right\} \qquad (6)$$

С учетом (1) и (6) уравнение (3) перепишем в виде:

$$gSin\alpha + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0 . \qquad (7)$$

После интегрирования (7) получим

$$P_{xy} = -\rho g y Sin\alpha + C_1 , \qquad (8)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

На поверхности жидкости напряжение равно нулю: при $y=h$ $P_{xy}=0$. Откуда из (8) найдем

$$C_1 = \rho g h Sin\alpha . \qquad (9)$$

Тогда из (8) с учетом (9) получим

$$P_{xyi} = \rho g(h - y)Sin\alpha , \qquad (10)$$

где *i=1* - для ТЖ, *i=2* – для СЖ.

С учетом второго уравнения системы (6) и знака производной $\partial V_x / \partial y \succ 0$ из (10) имеем

$$\frac{dV_{xi}}{dy} = \frac{\rho g}{\eta_{плi}}(h-y)Sin\alpha - \frac{p_{0i}}{\eta_{плi}}. \tag{11}$$

Выражения (10) и (11) справедливы для ТЖ и СЖ.

При условии, что слой СЖ мал по сравнению со слоем ТЖ ($h_1 \prec\prec h - h_1$), а ее текучесть выше, можно принять, что стержневой режим течения возможен только для ТЖ.

После интегрирования (11) получим

$$V_{xi} = \frac{\rho g}{\eta_{плi}}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{0i}}{\eta_{плi}}y + C_{2i}, \tag{12}$$

где C_{2i} – константа интегрирования.

Учитывая условие прилипания СЖ к стенке ($V_{x2}=0$ при $y=0$), из (12) получим $C_{22}=0$. Тогда

$$V_{x2} = \frac{\rho g}{\eta_{пл2}}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}}y. \tag{13}$$

Рассмотрим два режима течения:

а) Если $\left(P_{xy2}\right)_{y=h_1} \le p_{01}$, то ТЖ движется как квазитвердое тело по всему сечению без сдвига слоев (рис. 1). Условие такого режима течения можно записать с учетом (10) в виде

$$\rho g(h-h_1)Sin\alpha \le p_{01}. \tag{14}$$

Скорость течения V_1 СЖ на границе раздела двух сред определим по выражению (13) при $y=h_1$:

$$V_1 = \frac{\rho g}{\eta_{пл2}}\left(hh_1 - \frac{h_1^2}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}}h_1. \tag{15}$$

Скорость V_1 является скоростью движения квазитвердого тела ТЖ.

Объемный расход ТЖ через единицу ширины наклонной поверхности найдем по выражению:

$Q_1 = V_1(h-h_1)$. (16)

С учетом (15) из (16) получим

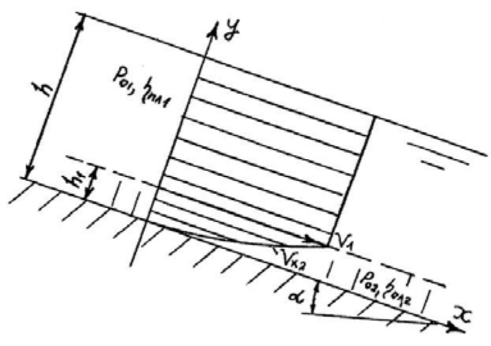

Рис. 1

$$Q_1 = h_1(h-h_1)\left[\frac{\rho g}{\eta_{пл2}}\left(h - \frac{h_1}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}}\right]. \tag{17}$$

Объемный расход СЖ через единицу ширины наклонной поверхности найдем по выражению:

$$Q_2 = \int_0^{h_1} V_{x2}\,dy. \tag{18}$$

После подстановки (13) в (18) и интегрирования получим

$$Q_2 = \frac{h_1^2}{2\eta_{пл2}}\left[\rho g(\sin\alpha)\left(h - \frac{h_1}{3}\right) - p_{02}\right]. \tag{19}$$

б) Если $\left(P_{xy2}\right)_{y=h_1} \succ p_{01}$, то ТЖ течет со сдвигом слоев (рис. 2). При этом стержневой режим течения возможен на расстоянии $y \geq h_0$ от стенки, где ТЖ течет со скоростью V_0 как квазитвердое тело. Из уравнения (10) найдем h_0 из условия, что $P_{xy}=p_{01}$ при $y=h_0$:

$$h_0 = h - \frac{p_{01}}{\rho g \sin\alpha}. \tag{20}$$

Для рассматриваемого режима течения напишем следующие граничные условия:

при $y=h_1$ $V_{x2}=V_1$;
при $y=h_1$ $V_{x1}=V_1$;
при $y=h_0$ $V_{x1}=V_0$.

Подставляя граничные условия в (12) и преобразуя, получим:

$$V_{x1} = \frac{\rho g}{\eta_{пл1}}\left(h_y - \frac{y^2}{2} - hh_1 + \frac{h_1^2}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{01}}{\eta_{пл1}}(y - h_1) + \frac{\rho g}{\eta_{пл2}}\left(hh_1 - \frac{h_1^2}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}}h_1. \tag{21}$$

$$V_0 = \frac{\rho g}{\eta_{пл1}}\left(hh_0 - \frac{h_0^2}{2} - hh_1 + \frac{h_1^2}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{01}}{\eta_{пл1}}(h_0 - h_1) + \frac{\rho g}{\eta_{пл2}}\left(hh_1 - \frac{h_1^2}{2}\right)Sin\alpha - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}}h_1. \tag{22}$$

Объемный расход ТЖ через единицу ширины наклонной поверхности найдем по выражению:

$$Q_1 = V_0(h - h_0) + \int_{h_1}^{h_0} V_{x1}dy. \tag{23}$$

После подстановки в (23) выражения (21) и интегрирования получим

$$\begin{aligned} Q_1 = {} & V_0(h - h_0) + \frac{\rho g}{\eta_{пл1}} Sin\alpha\left(\frac{hh_0^2}{2} + \frac{hh_1^2}{2} - \frac{h_0^3}{6} - \frac{h_1^3}{3} - hh_1h_0 + \frac{h_1^2h_0}{2}\right) - \\ & - \frac{p_{01}}{2\eta_{пл1}}(h_0 - h_1)^2 + \frac{\rho g}{\eta_{пл2}} Sin\alpha\left(h - \frac{h_1}{2}\right)(h_0 - h_1)h_1 - \frac{p_{02}}{\eta_{пл2}}(h_0 - h_1)h_1 \end{aligned} \tag{24}$$

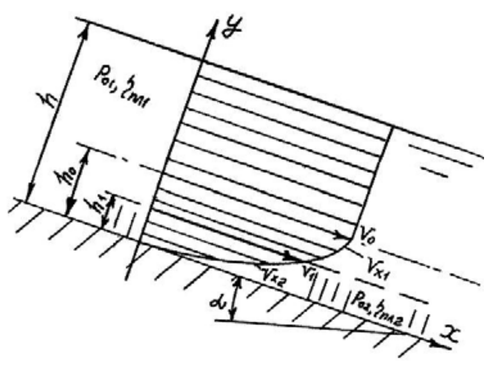

Рис. 2

Объемный расход СЖ и скорость определяются по (19) и (13).

Если течет ТЖ без смазки *($h_1=0$)*, то из (21), (22) и (24) получим:

$$V_{x1} = \frac{\rho g}{2\eta_{пл1}} y(2h - y)Sin\alpha - \frac{p_{01}}{\eta_{пл1}}y; \tag{25}$$

$$V_0 = \frac{\rho g}{2\eta_{пл1}} h_0(2h - h_0)Sin\alpha - \frac{p_{01}}{\eta_{пл1}}h_0; \tag{26}$$

$$Q_1 = V_0(h - h_0) + \frac{\rho g}{\eta_{пл1}}\left(\frac{hh_0^2}{2} - \frac{h_0^3}{6}\right)Sin\alpha - \frac{p_{01}}{2\eta_{пл1}}h_0^2 . \qquad (27)$$

Если течет ньютоновская ТЖ ($p_{01}=0$) с коэффициентом динамической вязкости μ_1 (вместо $\eta_{пл1}$) без гидросмазки, то из (25), (24) и (27) с учетом (20) имеем:

$$V_{x1} = \frac{\rho g}{2\mu_1} y(2h - y)Sin\alpha ; \qquad (28)$$

$$Q_1 = \frac{\rho g}{3\mu_1} h^3 Sin\alpha ; \qquad (29)$$

$$V_{max} = \frac{\rho g}{2\mu_1} h^2 Sin\alpha . \qquad (30)$$

Выражения (28) – (30) согласуются с результатами исследований [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лопотко М.З., Лецко А.П., Дубинин С.К.* Рекомендации по технологии промышленной добычи сапропелей из открытых водоемов.- Минск: Наука и техника, 1981. – 77 с.

2. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Госиздат, 1955. – 519 с.

3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Издание 5-е. – М.: Наука, 1978.- 736 с.

4. *Прагер В.* Конечные пластические деформации. // В кн. Реология: Теория и приложения. Под редакцией Ф. Эйриха. - М.: Изд-во ИЛ, 1962, с. 86 – 126. ГИАБ

Коротко об авторах

Арефьев Н.Н. – кандидат технических наук, ООО «Октябрьский ССРЗ»,
Штин С.М. – кандидат технических наук, Московский государственный горный университет.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 14 симпозиума «Неделя горняка-2008». Рецензент д-р техн. наук, проф. *В.С. Коваленко*