

УДК 622:53

**А.Р. Мартынюк****МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ  
РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ  
ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД**

Семинар № 2

**П**ри исследовании горного массива с помощью сейсмоакустических волн точность и надежность получаемых результатов определяется выбором соответствующей реологической модели. Существует целый ряд моделей, базовыми из которых являются упругая модель Гука и вязкоупругие модели Максвелла и Кельвина-Фойхта, в которых помимо упругих сил учитываются еще и вязкие силы различной природы, обуславливающие диссипацию сейсмоакустической энергии. Но как показывает практика, эти модели дают большое расхождение с экспериментальными данными о параметрах реальных сред.

Увеличение в моделях числа упругих и вязких элементов приводит к созданию многопараметрических моделей, таких как стандартного линейного тела и оптимального тела (тела Бюргерса). Последние более близко описывают реальную среду, но в ограниченном интервале рабочих частот, величина которых диктуется такими параметрами, как времена релаксации. Например, при исследовании среды, отвечающей оптимальному телу, рабочая частота в эксперименте должна удовлетворять неравенству:  $\frac{1}{\theta} < \omega_p < \frac{1}{\tau}$ , где  $\theta$  и  $\tau$  - параметры, характеризующие процессы релаксации. Однако, в литературе все же отмеча-

ется недостаточная сходимостъ экспериментальных и теоретических результатов при использовании этих моделей [1].

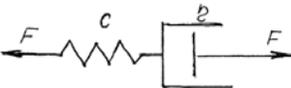
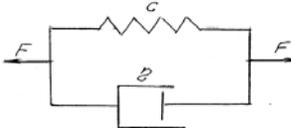
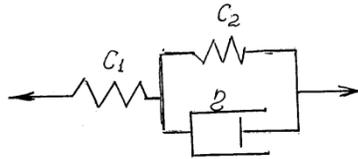
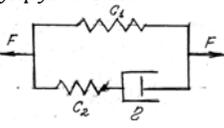
В данной работе предлагается выбор соответствующей вязкоупругой модели осуществлять по сопоставлению таких характеристик среды как функции ползучести и релаксации. В работе были рассмотрены возможные реологические, многопараметрические модели вязкоупругой среды, составлены соответствующие им математические уравнения состояния, при решении которых и были получены функции ползучести  $u(t)$  и релаксации  $F(t)$ . Результаты этих исследований представлены в таблице.

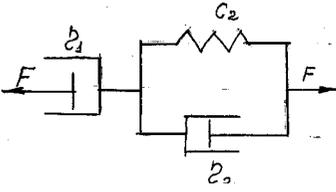
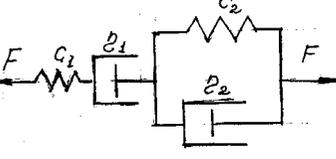
Если теперь предварительно на образцах породы исследовать процесс ползучести (или релаксации), то получим зависимости  $u(t)$  и  $F(t)$ , сопоставляя которые с приведенными в таблице, можно выбрать наиболее подходящую модель. Затем по соответствующим ей математическим зависимостям, находим реологические параметры наиболее приближенные к реальным средам.

Например, пусть экспериментальная кривая  $u(t)$  имеет вид (см. рисунок), т.е. она похожа на функцию ползучести для модели №3 таблицы.

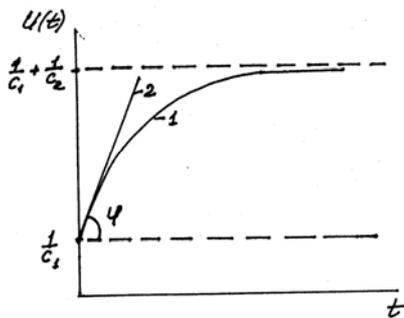
Построив на графике касательную в точке  $t = 0$ , определим  $tg\varphi$  угла

Результаты сравнительного анализа реологических моделей вязкоупругих сред

№	Реологическая модель	Уравнение состояния	Функция ползучести	Функция релаксации
1.	Тело Максвелла 	$\dot{F} + \frac{F}{\eta} = \dot{u}$	$u(t) = \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{c}{\eta} \right) H(t)$	$F(t) = c \exp\left(-\frac{ct}{\eta}\right) H(t)$
2.	Тело Кельвина-Фойхта 	$F = cu + \eta \dot{u}$	$u(t) = \frac{1}{c} \left( 1 - \exp\left(-\frac{ct}{\eta}\right) \right) H(t)$	$F(t) = cH(t) + \eta \delta(t)$
3.	3-х параметрическое стандартное линейное тело 	$\dot{F} + p_0 F = q_1 \dot{u} + q_0 u$ $p_0 = \frac{c_1 + c_2}{\eta}$ $q_1 = c_1$ $q_0 = \frac{c_1 c_2}{\eta}$	$u(t) = \left[ \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{v}\right) \right) \right] H(t)$ $v = \frac{\eta}{c_2}$	$F(t) = c_2 H(t) + \eta \delta(t)$
4.	3-х параметрическое вязкоупругое тело 	$\dot{F} + p_0 F = q_1 \dot{u} + q_0 u$ $p_0 = \frac{c_2}{\eta}$ $q_1 = c_1 + c_2$ $q_0 = \frac{c_1 c_2}{\eta}$	$u(t) = \frac{H(t)}{c_1} - \frac{c_2 H(t)}{c_1(c_1 + c_2)} \times \exp\left(-\frac{t}{\eta \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)}\right)$	$F(t) = \left( c_1 + c_2 \exp\left(-\frac{t}{v}\right) \right) H(t)$

№	Реологическая модель	Уравнение состояния	Функция ползучести	Функция релаксации
5.	3-х параметрическое тело Ледерзиха (L) 	$\dot{F} + p_0 F = q_2 \ddot{u} + q_1 \dot{u}$ $p_0 = \frac{c_2}{\eta_1 + \eta_2}$ $q_1 = \frac{c_2 \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$ $q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$	$u(t) = \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{c_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{v}\right) \right) H(t)$	$F(t) = c_2 H(t) + \eta_2 \delta(t)$
6.	4-х параметрическое оптимальное тело Бюргерса (Bu) 	$\ddot{F} + p_1 \dot{F} + p_0 F = q_2 \ddot{u} + q_1 \dot{u}$ $p_1 = \frac{c_1}{\eta_2} + \frac{c_2}{\eta_2} + \frac{c_1}{\eta_1}$ $p_0 = \frac{c_1 c_2}{\eta_1 \eta_2}$ $q_2 = c_1$ $q_1 = \frac{c_1 c_2}{\eta_2}$	$u(t) = \frac{H(t)}{c_1} + \left[ \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{c_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{v}\right) \right) \right] H(t)$	$F(t) = c_2 H(t) + \eta_2 \delta(t) + c_1 H(t) \exp\left(-\frac{c_1 t}{\eta_1}\right)$

$H(t)$  - функция Хевисайда;  $\delta(t)$  - дельта-функция Дирака



наклона касательной, и следовательно, можем получить параметр  $v = \frac{1}{c_2 a}$ , где  $a = \operatorname{tg} \varphi$ ;  $c_2$  находится

также из графика. Возможны и другие графо-аналитические способы определения параметров по полученным экспериментальным кривым.

Использование эквивалентных реологических моделей является традиционным подходом к описанию вязкоупругих характеристик твердых тел [2]. Такие модели позволяют исследовать без лишней детализации важные особенности дисперсионных свойств упругих и диссипативных параметров вязкоупругих материалов. Эти модели обычно рассматриваются

#### Экспериментальная кривая ползучести

$u(t)$ : 1 – экспериментально полученная кривая; 2 – касательная к данной кривой в точке  $t = 0$

как сосредоточенные, что предполагает однородность материала. Однако горные породы, являются микро-неоднородными телами, представляющими собой совокупность гранул зернистого материала с микроконтактами между ними, которые отличаются по своим свойствам. Представляя реологическую модель в виде цепочки, звеньями которой является одна из известных моделей: Кельвина-Фойхта, стандартного линейного или оптимального тела, можно приблизить результаты моделирования к реальным, и даже использовать его для оценки гистерезисных свойств и памяти горных пород [3]. Исследование последних является весьма актуальной задачей. Следовательно, возможности «классических» вязкоупругих моделей еще не исчерпаны, и с их помощью определение параметров является менее трудоемким, чем это предлагается в моделях Прейсаха-Красносельского-Майергойца [4, 5].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратьев О.К. Сейсмические волны в поглощающих средах, М.: Наука, 1986, 176 с.
2. Циглер Ф. Механика твердых тел и жидкостей, пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2002, 912 с.
3. Зайцев В.Ю., Матвеев Л.А. Амплитудно-зависимая диссипация в микронеоднородных средах с линейным поглощением и упругой нелинейностью // Геология и геофизика, 2006, т.47, №5 с.695-710.
4. Helbig K. and Patrick N.J. Rasolofosaon A theoretical paradigm for describing hysteresis and nonlinear elasticity in arbitrary anisotropic rocks, 2000 by the Society of Exploration Geophysicists, «Anisotropy 2000: Fractures, converted waves and case studies»
5. Ostrovsky L.A., Johnson P.A. Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials // Rivista del Nuovo chimento, 2001, v.24, №7, p.1-46. **ЦИЛБ**

#### Коротко об авторе

Мартынюк А.Р. – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Московский государственный горный университет.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 2 симпозиума «Неделя горняка-2008». Рецензент д-р техн. наук, проф. В.Л. Шкуратник.