

И.С. Осипов, В.В. Сынбулатов, К.А. Карасев

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ
ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ**

Семинар № 3

В свете современных представлений о физике разрушения определяющим фактором является зарождение и развитие трещин в горной породе. Так, в соответствии с теорией хрупкого разрушения (А. Гриффитс) прочность пород определяется размерами трещин и удельной энергией их поверхности. Эффективным инструментом воздействия на данные характеристики является использование поверхностно-активных веществ (ПАВ). Действие ПАВ основано на известном эффекте Ребиндера [1], который заключается в адсорбционном понижении поверхностной энергии горной породы, облегчении движения дислокаций и пластифицировании породы, что сопровождается направленным изменением всех ее механических свойств.

В результате комплексных исследований, выполненных на кафедре шахтного строительства Уральского государственного горного университета (УГГУ) установлено [2], что применительно к скальным горным породам месторождений Урала насыщение массива растворами ПАВ приводит к снижению прочности (от 20 до 70 %), уменьшению модуля и предела упругости (в среднем в 1,3-1,5 раза), активизации (в 1,5-7,0 раз) процессов ползучести и релаксации напряжений в массиве. Для обоснованного прогнозирования эффективности действия ПАВ необходимо исследование

характеристик трещиноватости горных пород в различных условиях их нагружения.

Применительно к совершенствованию мероприятий по борьбе с горными ударами ранее было выполнено моделирование действия горного давления на развитие трещиноватости горных пород Североуральских бокситовых месторождений (СУБР) [3]. Целью эксперимента являлась оценка поведения приконтурного массива, где объемное напряженное состояние переходит в плоское. Поэтому образцы в виде куба со стороной 10 мм выдерживались при постоянной одноосной сжимающей нагрузке в течение 480 часов. Действующее напряжение 25 МПа составляет около 20 % от прочности пород при сжатии и соответствует горному давлению на глубине 800-1000 м, где ведется строительство капитальных выработок на СУБРе. Образцы нагружались в присутствии раствора ПАВ – додецилсульфата натрия (ДС) в концентрации 0,12 %. Контрольная серия образцов находилась в тех же условиях нагружения, но в естественно-сухом состоянии. По окончании эксперимента под микроскопом определялись количество и размер трещин в плоскостях, параллельных направлению действия сжимающих сил. Определение производилось методом «палетки» в предположении, что трещины имеют линейную траекторию и плоскую поверхность.

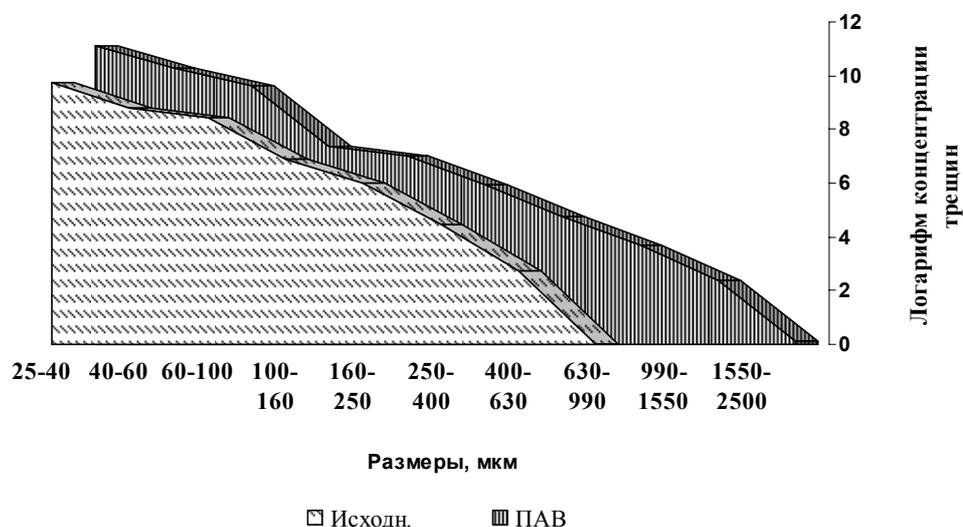


Рис. 1. Концентрация трещин различных размеров в образцах туфов

На рис. 1 приведены усредненные по девяти образцам туфов графики распределения трещин по длине. Анализ полученных данных позволяет заключить следующее. Во всех диапазонах размеров трещин их концентрация в образцах, нагружавшихся в ПАВ, заметно выше, чем в необработанных породах. Более того, максимальный линейный размер трещин, образовавшихся при нагружении исходных пород, не превышает 630 мкм, в то время как под действием ПАВ в тех же условиях нагружения их длина доходит до 2500 мкм.

Сравнение графиков на рис. 1 показывает, что при нагружении образцов в присутствии ПАВ происходит зарождение новых микротрещин, что соответствует на графике увеличению концентрации трещин малых размеров. С другой стороны, действие активного раствора приводит к развитию уже существующих в породе трещин. Количественная разница в деформации исходных образцов и на-

гружавшихся в присутствии растворов ПАВ должна соответствовать приращению концентрации трещин. На рис. 2 приведен график изменения концентрации трещин dN .

Правая ветвь графика (обозначенная жирной линией) отражает концентрацию трещин, испытывавших приращение в ходе нагружения горных пород, т. е. трещин тех размеров, которые отсутствовали в образцах, нагружавшихся без поверхностно-активной среды.

Таким образом, развитие трещиноватости под действием поверхностно-активных веществ заключается как в приращении длины трещин, так и в приращении концентрации трещин малых размеров.

Однако описанные выше эксперименты и существующие методы изучения трещиноватости исходят из того, что трещина является линейным объектом. Однако для кристаллических горных пород это далеко не так. Развитие трещины происходит по наибо-

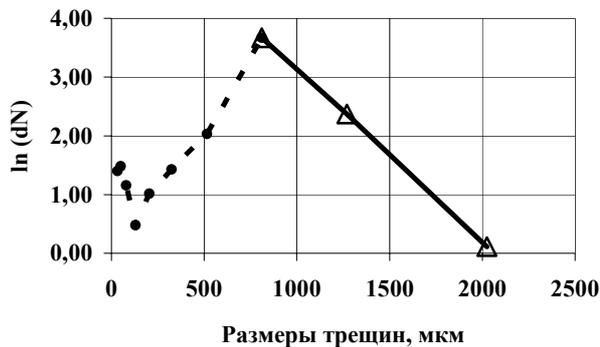


Рис. 2. Приращение концентрации трещин различных размеров под действием ПАВ

лее ослабленным областям (например, по контактам минеральных зерен), что определяет ее извилистость (изломанность). Поэтому измеренная таким способом длина и поверхность трещины заведомо меньше ее реальных значений, что существенно искажает оценку энергетического баланса роста трещин и, следовательно, не дает возможности адекватной оценки физики процессов разрушения горных пород.

Возможность определения истинной конфигурации трещин дает активно развивающийся в настоящее время инструментарий фрактальной геометрии. Трещины, как и любой природный объект, существуют в трехмерном мире. Положение тела описывается тремя независимыми переменными (координатами X , Y , Z) или степенями свободы. Такая размерность называется *параметрической*. Формализованным и более строгим с математической точки зрения является понятие *топологической размерности* d . Здесь размерность точки составляет $d = 0$, линии - $d = 1$, плоскости - $d = 2$ и объема - $d = 3$.

Однако в природе существуют объекты, для точного измерения которых топологической размерности становится явно недостаточно. Впервые с этим фактом столкнулся англичанин *Д. Ричардсон* [4]. Пользуясь

обычным циркулем, он измерял длину береговой линии Великобритании на картах разного масштаба. Он заметил, что чем меньше был раствор циркуля δ , тем все больше подробности побережья входили в измеряемую длину и результаты измерения непрерывно увеличивались. Причем он выявил, что рост длины береговой линии L подчиняется степенному закону (*закон Ричардсона*)

$$L(\delta) = \alpha \cdot \delta^\beta, \quad (1)$$

где α - некоторая константа; β - отрицательный показатель степени.

Впервые понятие дробной размерности d_H ввел Феликс Хаусдорф в 1919 году. В 1975 году *Б. Мандельброт* [4] назвал объекты с дробной размерностью d_f *фракталами*. Появилась новая отрасль математики - *фрактальная геометрия*. Бенуа Мандельброт дал общее определение: «Фракталом в узком смысле называется множество, размерность Хаусдорфа для которого строго больше его топологической размерности». Этому определению в полной мере соответствуют такие объекты, как трещины.

Из уравнения (1) следует:

$$\log L = \beta \cdot \log \delta + \log \alpha, \quad (2)$$

где $\log \alpha = \text{const}$.

Тогда, пренебрегая константой, можно записать $\log L \sim \beta \cdot \log \delta$. С другой стороны

$$\log L = \log[N(\delta) \cdot \delta] = \log N(\delta) + \log \delta, \quad (3)$$

где $N(\delta)$ - число отрезков длиной δ , покрывающих всю линию.



**Рис. 3. Образец гранита Мансуровского месторождения (Башкортостан);
увеличение 28х**

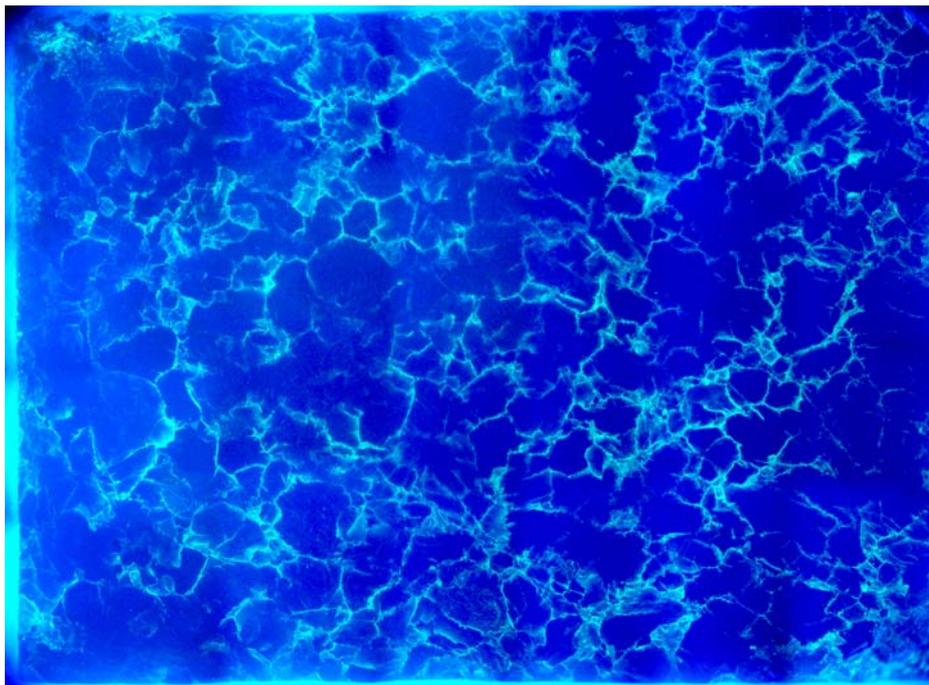


Рис. 4. Образец пироксен-плагиоклазового порфирита Североуральских бокситовых месторождений; увеличение 28х

Из уравнений (2) и (3) следует:

$$\log N(\delta) \cong \beta \cdot \log \delta - \log \delta = (\beta - 1) \cdot \log \delta. \quad (4)$$

В соответствии с размерностью Хаусдорфа

$$N(\delta) \cong 1/\delta^{d_H}, \quad (5)$$

следовательно

$$\log N(\delta) \sim -d_H \log \delta. \quad (6)$$

Тогда из уравнений (4) и (6) получим

$$\beta - 1 = -d_H. \quad (7)$$

Поскольку в уравнении (1) $\beta < 0$, то размерность Хаусдорфа d_H в уравнении (7) строго больше топологической размерности d трещины. Поэтому в соответствии с определением Мандельброта, такие линии являются фракталами.

Нами усовершенствован существующий метод люминесцентной дефектоскопии [5] с фотофиксацией картины трещин в ходе их зарождения и развития. На рис. 3, 4 приведены типичные снимки картины трещин различных горных пород Урала.

Для определения фрактальной размерности трещин разработана методика и компьютерная технология обработки таких снимков, основанная на использовании метода покрытия [6]. При использовании данного метода на плоскость наносится квадратная сетка (в объемной задаче – кубическая сетка) с размером ячейки r_i . При изменении шага сетки r_i подсчитывают минимальное число клеток (кубов) $N(r_i)$, покрывающих фрактал (трещину). Из выше приведенных формул получим зависимость:

$$\ln N(r_i) = \ln C - d_f \ln r_i. \quad (8)$$

Формула (8) представляет собой уравнение прямой в двойном логарифмическом масштабе, параметры которого можно определить известными методами корреляционного анализа (способом «наименьших квад-

ратов»). Следует отметить, что все соотношения фрактальной геометрии оперируют логарифмическими уравнениями, которые равно справедливы при любом основании логарифмов. Для определенности мы принимаем натуральные логарифмы (\ln), хотя удобства решения некоторых задач основание логарифмов можно поменять.

В качестве меры надежности и точности оценки могут использоваться коэффициент корреляции и коэффициент вариации опытных точек от полученной прямой. Причем, величина $\ln C$ практического значения не имеет и может не вычисляться. Процедуру определения фрактальной размерности для единичного объекта, например следа трещины, можно представить следующим образом.

Пусть максимальная величина проекции трещины на одну из сторон сетки равна P , мкм. Выбираем максимальный размер ячейки $r_{\max} \geq P/10$, округляя его до ближайшего целого. С данным размером ячейки строим сетку. Считаем число ячеек, в которых имеется след трещины $N(r_{\max})$. Уменьшаем размер ячейки и повторяем процедуру не менее 5-7 раз. Минимальный размер r_{\min} должен быть не меньше разрешающей способности микроскопа. Учитывая, что график функции (8) строится в логарифмических координатах, для получения на этом графике примерно равноотстоящих точек уменьшение r_i также целесообразно производить с логарифмическим шагом.

Рассмотрим реализацию данной процедуры на конкретном примере. На исследовательском стенде, включающем микроскоп МБС-10 с микрофотоустройством МФУ, цифровой фотоаппарат Sony DSC-P200 и ультрафиолетовый облучатель Line 506 были получены цифровые фотографии поверхности образца гранитов

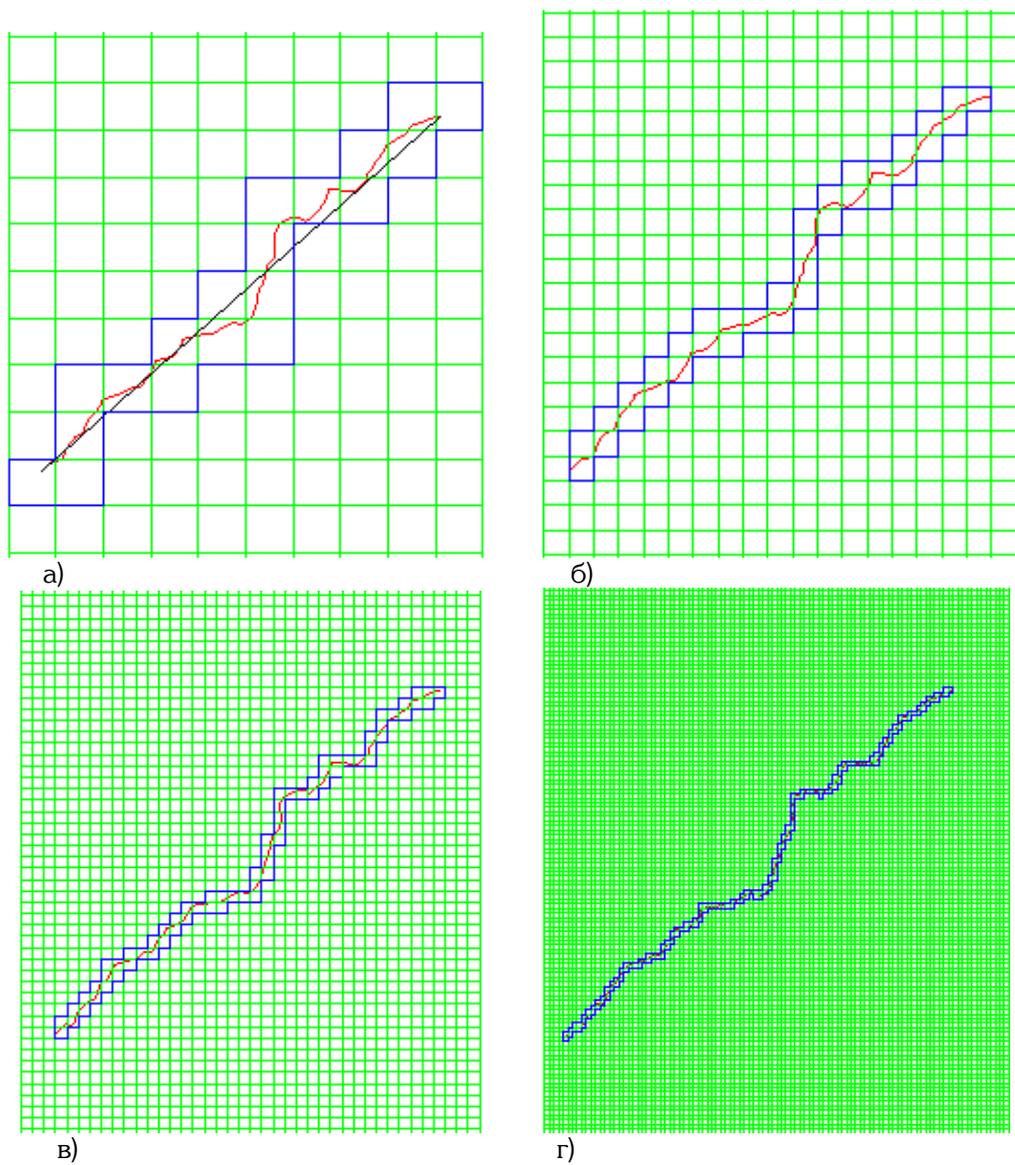


Рис. 5. Модель трещины гранита: а) размер ячейки – 100 мкм, б) размер ячейки – 50 мкм, в) размер ячейки – 25 мкм, г) размер ячейки – 10 мкм

Мансуровского месторождения. В ходе обработки фотографий в системе AutoCad поверх каждой трещины наносится ломаная линия, максимально четко повторяющая ее трек. Полученные координаты характерных точек (изломов) трещины используются в

процедуре вычисления ее фрактальных характеристик.

На рис. 5 приведены основные этапы определения фрактальной размерности выделенной трещины. Размер ячеек рабочей сетки изменяется в пределах 10÷100 мкм.

По результатам измерения длины трещины с различными размерами ячейки по уравнению (8) построен график зависимости в логарифмическом масштабе. Способом «наименьших квадратов» определены параметры данной зависимости и получено значение фрактальной размерности трещины $d_H = 1,278$.

С помощью данной методики изучена фрактальная размерность всей совокупности трещин исследуемых образцов. Анализ величин фрактальной размерности трещин показал, что они имеют нормальное распределение (распределение Гаусса) с параметрами:

- математическое ожидание (среднее арифметическое) – 1,273;
- среднеквадратическое отклонение – 0,085.

Доверительный интервал (при принятом уровне значимости $\alpha = 0,05$) составляет 0,05.

Истинная длина трещины определяется ее фрактальной размерностью d_f в соответствии с уравнением:

$$L_{фр} = L_0 [1 + \delta^{d_f - 2}] \quad (9)$$

где L_0 – линейная длина трещины, принимаемая как расстояние между ее вершинами; δ – принятая точность (шаг) измерений трещины.

В соответствии с описанной выше унифицированной процедурой определения фрактальной размерности принималось $\delta = L_0/100$. Для проверки адекватности данной формулы методом «циркуля» были измерены 10 наиболее характерных трещин размерами от 2 до 7 мм с разной фрактальной размерностью. Сравнение измеренных значений с рассчитанными по формуле (9) показало их практически полную идентичность – коэффициент корреляции $r = 0,992$ и средняя погрешность определения 0,2 %.

Таким образом, полученные результаты позволяют определять истинные размеры и поверхность трещин, что дает возможность адекватно оценивать и прогнозировать энергетические характеристики разрушения горных пород, основываясь на теории трещин Гриффитса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горюнов Ю.В., Перцов Н.В., Сумм Б.Д. Эффект Ребиндера. М.: Наука, 1966. - 128 с.
2. Латышев О.Г. Разрушение горных пород. М.: Теплотехник, 2007. - 672 с.
3. Влияние поверхностно-активных веществ на развитие трещиноватости нагруженных горных пород / О.Г.Латышев, Н.И.Иванова, С.С.Иванова, Н.В.Перцов // Изв. вузов. Горный журнал. -1988. -№12. - С.4-8.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Пер. с нем. -М.: Изд-во: ИКИ, 2002. -656 с.
5. Люминесцентный анализ. Под ред. Константиновой-Шлезингер. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
6. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ. М.: Техносфера, 2006. -488 с. **ГИДБ**

Коротко об авторах

Осипов И.С., Сынбулатов В.В., Карасев К.А. – Уральский государственный горный университет, г. Екатеринбург.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 3 симпозиума «Неделя горняка-2008». Рецензент д-р техн. наук, проф. С.А. Гончаров.