УДК 622.02

А.В. Дугарцыренов, В.А. Белин, Г.М.Крюков, П.А. Вавер

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАМЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ВОПРОСАМ ВЗРЫВНОГО РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

Дано обобщение задачи Ламе, учитывающее снижение давления газов в полости за счет перемещения её стенок, и получено её решение. Данное решение применено для определения напряженного состояния упругой среды при взрыве камуфлетного заряда

Ключевые слова: перемещение, напряжение, деформации, упругая среда.

A.V. Dugartsirenov, V.A. Belin, G.M. Krukov, P.A Vaver

THE GENERALIZATION OF THE LAME'S EQUATION AND ITS APPLICATION IN ROCK BLASTING

The paper presents a generalization of the Lame's equation that accounts for the decrease of gas pressure in a vesicle by the dislocation of its walls and proposes a solution of the equation. This solution has been applied to determine the stress state of an elastic medium near an exploding charge.

Key words: Moving, pressure, deformations, the elastic environment.

При оценке напряженного состояния твердой упругой среды со сферической или цилиндрической полостями, нагруженными по их границе давлением, часто используют статическое решение Ламе, полученное для случая постоянного давления p_0 [1]. Например, это решение используется для оценки напряжений в среде при взрыве в ней сосредоточенного и цилиндрического зарядов [2]. Однако при взрыве заряда ВВ давление продуктов детонации уменьшается вследствие расширения полости за счет перемещения ее границы и в состоянии равновесия достигает некоторого значения $p_0^* < p_0$. Поэтому действительные значения перемещения u_r^*, напряжений $\sigma_r^*, \sigma_\varphi^*, \sigma_\psi^*$ и деформаций $\varepsilon_r^*, \varepsilon_\varphi^*,\ \varepsilon_\psi^*$ (обозначены сверху звездочкой) будут меньше величин, полученных по формулам Ламе [3]. Учет снижения давления в зарядной полости проведем предварительно для сферической полости.

Рассмотрим неограниченную упругую изотропную среду со сферической полостью радиуса r_0. Начало сферической системы координат совместим с центром полости.

Перемещение $\vec{u}_r$ в условиях сферической симметрии направлено вдоль радиуса r и зависит только от радиальной координаты r точки:

$$\vec{u}_r = u_r(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

Здесь $\dfrac{\vec{r}}{r}$ - единичный вектор, направленный вдоль радиуса r.

Тогда $rot\,\vec{u}_r = 0$ и уравнение равновесия $2(1-\nu)grad\,div\vec{u} - (1-2\nu)rot\,rot\,\vec{u} = 0$ приводится к виду:

$$2(1-\nu)grad\ div\,\vec{u}_r = 0 \Leftrightarrow div\,\vec{u}_r = const \equiv 3a\,,$$

где a - некоторая постоянная.

Далее

$$div\,\vec{u}_r = div\left(\frac{u_r(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{u_r}{r}div\,\vec{r} + \vec{r}\cdot grad\,\frac{u_r}{r}\,.$$

С учетом того, что

$$div\,\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \quad \text{и}$$

$$grad\left(u_r\frac{1}{r}\right) = u_r\cdot grad\,\frac{1}{r} + \frac{1}{r}grad\,u_r = -u_r\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{r}\cdot u_r'\cdot\frac{\vec{r}}{r}\,,$$

находим

$$div\,\vec{u}_r = 3\frac{u_r}{r} + \vec{r}\left[u_r\left(-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right) + \frac{1}{r}\cdot u'\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right] = 3\frac{u_r}{r} - \frac{u_r}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{r} + \frac{1}{r^2}\cdot u_r'\cdot\vec{r}\cdot\vec{r} =$$

$$= 3\frac{u_r}{r} - \frac{u_r}{r} + u_r' = u_r' + 2\frac{u_r}{r} = \frac{1}{r^2}(u_r'r^2 + 2ru_r) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d(r^2u_r)}{dr} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d(r^2u_r)}{dr} = 3a \Leftrightarrow d(r^2u_r) = 3ar^2dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2u_r = 3a\int r^2dr \Leftrightarrow r^2u_r = 3a\frac{r^3}{3} + b \Leftrightarrow u_r = ar + \frac{b}{r^2}\,.$$

Из условия ограниченности перемещения на бесконечности (при $r\to\infty$) находим, что $a = 0$. Тогда

$$u_r = \frac{b}{r^2}\,. \qquad (2)$$

Поскольку перемещения точек среды происходят только вдоль радиуса, то полярные и азимутальные перемещения и их производные равны нулю, т.е.

$$u_\varphi = 0, u_\psi = 0, \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} = 0, \frac{\partial u_\psi}{\partial\psi} = 0\,. \qquad (3)$$

Выразим компоненты деформации через компоненты перемещения u_r, u_φ, u_ψ и их производные:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}\,; \qquad (4)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r} = \frac{u_r}{r}\,; \qquad (5)$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial u_\psi}{\partial\psi} + \frac{u_\psi}{r}ctg\,\psi + \frac{u_r}{r} = \frac{u_r}{r}\,. \qquad (6)$$

По закону Гука радиальное напряжение в сферических координатах равно

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2G\varepsilon_r\,, \qquad (7)$$

где $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\psi$ - объемное расширение; $\lambda = \dfrac{2\nu G}{1-2\nu}$ - постоянная Ламе; ν - коэффициент Пуассона; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига; E - модуль упругости среды. Представим радиальное напряжение как функцию перемещения:

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2G\varepsilon_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\psi) + 2G\varepsilon_r = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r}\right) + 2G\frac{\partial u_r}{\partial r} = (\lambda + 2G)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda\frac{u_r}{r} =$$

$$= \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} + 2G\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{2G\nu}{1-2\nu}\frac{u_r}{r} = 2G\left[\left(\frac{\nu}{1-2\nu}+1\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{u_r}{r}\right] =$$

$$= 2G\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{u_r}{r}\right) == \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\nu\frac{u_r}{r}\right] =$$

$$= \frac{2}{1-2\nu}\cdot\frac{E}{2(1+\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\nu\frac{u_r}{r}\right] == \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\nu\frac{u_r}{r}\right]. \qquad (8)$$

Дифференцируя (2) получим

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{2b}{r^3}\,. \qquad (9)$$

Тогда выражение (8) с учетом (2) и (9) преобразуется к виду

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\left(-\frac{2b}{r^3}\right) + 2\nu\frac{b}{r^3}\right] = \Leftrightarrow \sigma_r = -\frac{2E}{(1+\nu)}\cdot\frac{b}{r^3}\,. \qquad (10)$$

На границе полости имеем

$$u_r\Big|_{r=r_0} = \frac{b}{r_0^2} = u_0\,, \quad \sigma_r\Big|_{r=r_0} = \sigma_{r0} = -\frac{2E}{1+\nu}\cdot\frac{b}{r_0^3}\,, \qquad (11)$$

где $b/r_0^3 = u_0^*/r_0$ и u_0^* - соответственно относительное и действительное перемещения границы полости вдоль оси r.

Решим аналогичную задачу для упругой бесконечной среды с цилиндрической полостью. Перемещение $\vec{u}_r$ в условиях цилиндрической полости также направлено вдоль радиуса r и зависит только от радиальной координаты r точки. Соответственно $rot\,\vec{u}_r = 0$ и уравнение равновесия принимает вид

$$2(1-\nu)grad\; div\,\vec{u} = 0 \Leftrightarrow div\,\vec{u} = const \equiv 2a\,. \qquad (12)$$

Проведя выкладки, аналогичные вышеприведенным, получим выражение для радиального напряжения на границе цилиндрической полости в состоянии равновесия

$$\sigma_r\Big|_{r=r_0} = -\frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{d}{r_0^2}\,, \qquad (13)$$

где d - постоянная.

В момент окончания детонации давление взрывных газов равно p_0. В результате адиабатического расширения (теплообменом газа со средой можно пренебречь в силу того, что равновесие устанавливается за десятки мкс) вследствие смещения границы полости давление газов снижается до равновесной величины p_0^*, которое находим из выражения (закона Пуассона, определяющего параметры идеального газа в адиабатических процессах):

- для сферической полости:

$$p_0^* V_0^{*\gamma} = p_0 V_0^{\gamma} \Leftrightarrow p_0^* = p_0 \left(\frac{r_0^3}{r_0^{*3}} \right)^k = p_0 \left(\frac{r_0}{r_0^*} \right)^{3k} = p_0 \left(\frac{r_0}{r_0 + u_0^*} \right)^{3k} =$$

$$= p_0 \left(\frac{r_0}{r_0 + u_0^*} \right)^{3k} = p_0 \left(\frac{1}{1 + u_0^* / r_0} \right)^{3k} \Leftrightarrow p_0^* = p_0 \left(\frac{1}{1 + u_0^* / r_0} \right)^{3k} = p_0 \left(\frac{1}{1 + b / r_0^3} \right)^{3k} \qquad (14)$$

- для цилиндрической полости:

$$p_0^* = p_0 \left(\frac{1}{1 + d / r_0^2} \right)^{2k} \qquad (15)$$

где k - показатель политропы взрывных газов.

Для малых деформаций в разложении в ряд изменения давления от относительного перемещения границы полости можно ограничиться линейным членом. Рассмотрение этого приближения будем вести одновременно для сферической и цилиндрической полостей. Тогда имеем:

- для сферической полости:

$$p_0^* = p_0 \left(1 + \varepsilon_1\right)^{-3k} = p_0 \left[1 - 3k\varepsilon_1 + \left(\frac{3k}{2} + \frac{9k^2}{2} \right) \varepsilon_1^2 + \ldots \right] \text{ или}$$

$$p_0^* = p_0 (1 - 3k\varepsilon_1) = p_0 \left[1 - 3k \cdot b / r_0^3 \right]; \qquad (16)$$

- для цилиндрической полости:

$$p_0^* = p_0 \left(1 + \varepsilon_2\right)^{-2k} = p_0 \left[1 - 2k\varepsilon_2 + \left(k + 2k^2\right) \varepsilon_2^2 + \ldots \right] \text{ или}$$

$$p_0^* = p_0 (1 - 2k\varepsilon_2) = p_0 \left[1 - 2k \cdot d / r_0 \right], \qquad (17)$$

где $\varepsilon_1 = b / r_0^3, \varepsilon_2 = d / r_0^2$ - относительные радиальные перемещения границы полости.

Условие равновесия на границе полости запишется в виде:

- для сферической полости:

$$\sigma_r^* \Big|_{r=r_0} = -p_0^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2E}{1+\nu} \cdot \frac{b}{r_0^3} = p_0 \left(1 - 3k \cdot \frac{b}{r_0} \right) \qquad (18)$$

- для цилиндрической полости:

$$\sigma_r^* \Big|_{r=r_0} = -p_0^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{d}{r_0^2} = p_0 \left(1 - 2k \cdot \frac{d}{r_0^2} \right). \qquad (19)$$

Отсюда находим

$$b = r_0^3 \cdot \frac{p_0 (1+\nu)}{2E + 3k\, p_0 (1+\nu)}, \; d = r_0^2 \cdot \frac{p_0 (1+\nu)}{E + 2k\, p_0 (1+\nu)}. \qquad (20)$$

Соответственно перемещения, деформации, радиальное и полярное напряжения составят:

- для сферической полости:

$$u=\frac{b}{r^2}=\frac{p_0(1+\nu)r_0}{2E+3kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^2};\qquad(21)$$

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{2b}{r^3}=-\frac{2p_0(1+\nu)}{2E+3kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^3};\qquad(22)$$

$$\varepsilon_\varphi=\varepsilon_\psi=\frac{u}{r}=\frac{b}{r^3}=\frac{p_0(1+\nu)}{2E+3kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^3};\qquad(23)$$

$$\overline{\sigma}_r=\frac{\sigma_r}{p_0}=-\frac{2E}{p_0(1+\nu)}\cdot\frac{b}{r^3}\Leftrightarrow\overline{\sigma}_r=-\frac{2E}{2E+3kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^3};\qquad(24)$$

$$\overline{\sigma}_\varphi=\frac{\sigma_\varphi}{p_0}=\frac{E}{p_0(1+\nu)}\cdot\frac{b}{r^3}\Leftrightarrow\overline{\sigma}_\varphi=\frac{E}{2E+3kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^3};\qquad(23)$$

- для цилиндрической полости:

$$u=\frac{d}{r}=\frac{p_0(1+\nu)r_0}{E+2kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}};\qquad(24)$$

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{d}{r^2}=-\frac{p_0(1+\nu)}{E+2kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^2};\qquad(25)$$

$$\varepsilon_\varphi=\varepsilon_\psi=\frac{u}{r}=\frac{d}{r^2}=\frac{p_0(1+\nu)}{E+2kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^2};\qquad(26)$$

$$\overline{\sigma}_r=\frac{\sigma_r}{p_0}=-\frac{E}{p_0(1+\nu)}\cdot\frac{d}{r^2}\Leftrightarrow\overline{\sigma}_r=-\frac{E}{E+2kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^2};\qquad(27)$$

$$\overline{\sigma}_\varphi=\frac{\sigma_\varphi}{p_0}=\frac{E}{p_0(1+\nu)}\cdot\frac{d}{r^2}\Leftrightarrow\overline{\sigma}_\varphi=\frac{E}{E+2kp_0(1+\nu)}\cdot\frac{1}{\overline{r}^2}.\qquad(28)$$

где $\overline{r}=r/r_0$ - относительная координата точки ($r\ge r_0\Leftrightarrow\overline{r}\ge 1$).

Расчеты по полученным формулам проведены для взрыва заряда граммонита 79/21 в граните. Графики зависимостей перемещения (кривые 1 и $1'$), радиального (кривые 2 и $2'$) и тангенциального (кривые 3 и $3'$) напряжений для сферической и цилиндрической полостей даны соответственно на рисунках 1 и 2 сплошными линиями, а графики тех же зависимостей, определенных без учета расширения полостей (по решению Ламе) - пунктирными линиями.

Расчеты показывают, что величины равновесного давления для сферической и цилиндрической полостей равны соответственно $p^*=4,45047\cdot10^9$ Па и $p^*=3,99084\cdot10^9$ Па, что составляет 65,45% и 58,69% от начального давления p_0. При этом, перемещение, компоненты тензоров напряжения и деформации при учете расширения сферической и цилиндрической полостей соответственно примерно на 34,55% и 41,31% меньше аналогичных величин, соответствующих постоянному давлению взрывных газов.

Таким образом, при расчете напряженно-деформированного состояния среды со сферической и цилиндрической полостями, которые внезапно подвержены воздействию давления продуктов детонации взрывчатого вещества, применение соотношений Ламе может привести к значительным погрешностям.

Равновесные величины напряжений и деформаций являются асимптотическими значениями в соответствующих динамических задачах, что позволяет использовать их для оценки погрешности их решений.

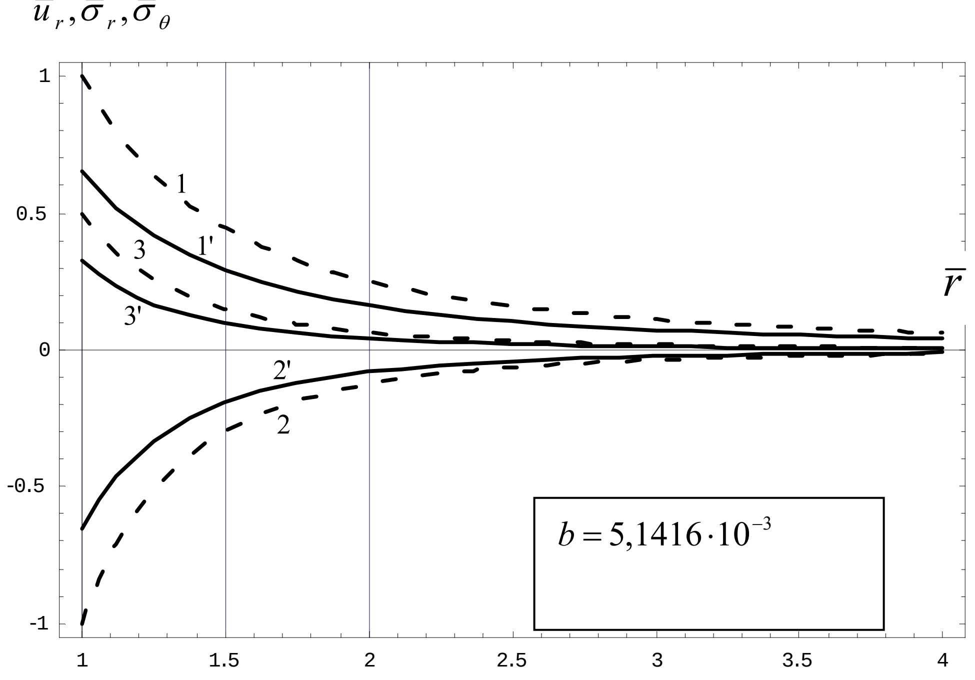
$\overline{u}_r, \overline{\sigma}_r, \overline{\sigma}_\theta$
1
0.5
0
-0.5
-1
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
$\overline{r}$
1
1'
3
3'
2'
2
$b = 5{,}1416 \cdot 10^{-3}$

Рис. 1

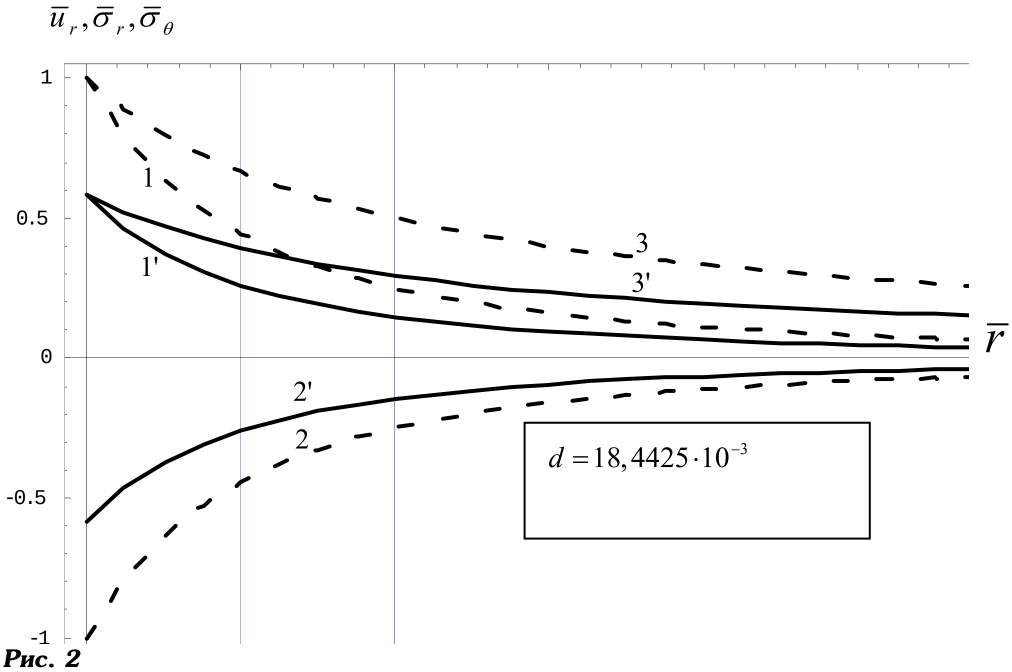
$\overline{u}_r, \overline{\sigma}_r, \overline{\sigma}_\theta$
1
0.5
0
-0.5
-1
$\overline{r}$
1
1'
3
3'
2'
2
$d = 18{,}4425 \cdot 10^{-3}$

Рис. 2

Учет расширения полости, проведенный по условиям равновесия (18) и (19), предполагает неразрушаемость среды при расширении. В действительности хрупкие среды разрушаются при относительно малых напряжениях, соответствующим небольшим деформациям. Радиус зоны регулируемого дробления при взрыве сосредоточенного и удлиненного зарядов определяется средней длиной радиальных трещин, образуемых за счет растягивающих напряжений в упругой среде (горной породе) [4].

Для оценки величины данного радиуса можно использовать статические формулы полярного напряжения. При этом радиус зоны регулируемого дробления считают равным радиусу точки в упругой ненарушенной среде, в которой величина полярного напряжения равна пределу прочности среды на растяжение $\sigma_{рас}$ [2]. Тогда, используя уточненные формулы (23) и (28), получим для радиусов зоны регулируемого дробления соответственно для сосредоточенного и удлиненного зарядов выражения

$$r_{сф} = r_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{p_0}{\xi_1 \cdot \sigma_{рас}}}; \tag{29}$$

$$r_{цил} = r_0 \cdot \sqrt{\frac{p_0}{\xi_2 \cdot \sigma_{рас}}}, \tag{30}$$

где $\xi_1 = 2 + 3\frac{k\,p_0(1+\nu)}{E}$; $\xi_2 = 1 + 2\frac{k\,p_0(1+\nu)}{E}$.

Здесь предполагается, что величина p_0 есть давление продуктов детонации взрывчатого вещества в точке Жуге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *G. Lame.* Lecons sur La Theorie … de l'Elasticite, Paris. 1852.
2. *Крюков Г.М., Глазков Ю.В.* Феноменологическая квазистатическо-волновая теория деформирования и разрушения материалов взрывом промышленных ВВ. Отдельные статьи ГИАБ. – 2003. - №11. – 67 с.
3. *Крюков Г.М., Дугарцыренова Э.А., Дугарцыренов А.В.* Напряженное равновесное состояние среды с полостью с учетом ее расширения в линейном приближении. Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2005. - Т. 14, вып. 1. - С. 1003-1004.
4. *Механический эффект* подземного взрыва / В.Н. Родионов, В.В. Адуш-кин, В.Н. Костюченко и др. – М.: Недра, 1971. ГИАБ

Коротко об авторах

Дугарцыренов А.В. – доцент кафедры "Взрывное дело", fizika@rbcmail.ru,
Белин В.А. – профессор, доктор технических наук, кафедра "Взрывное дело",
Крюков Г.М. – профессор, доктор технических наук, кафедра "Взрывное дело",
Вавер П.А. - аспирантка кафедры "Взрывное дело",

Московский государственный горный университет,
Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru