

УДК 622.02

А.В. Дугарцыренов, Е.Л. Бельченко

**О ДИНАМИКЕ ПРОМЕРЗАНИЯ (ОТТАИВАНИЯ)
МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД**

Аналитическое решение задач промерзания (оттаивания) горных пород сопряжено с большими трудностями, связанными с нелинейностью уравнений из-за наличия подвижных границ мерзлой и талой зон. В связи с этим полученные в настоящее время решения таких задач основаны на значительных упрощениях реальных процессов и привлечении их простейших моделей. Несмотря на это, аналитические приближения широко используются на практике для оценки глубины и времени промерзания.

Рассмотрим двухзонную модель с резкой границей раздела фаз, характерную для грубодисперсных пород, для которых можно пренебречь массопереносом. Тепловая схема для этой модели определяется системой уравнений теплопроводности для мерзлой (индекс 1) и талой (индекс 2) зон с подвижной границей их раздела ξ [1, 2]:

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} \quad (t > 0; 0 < x < \xi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} \quad (t > 0; \xi < x < \infty), \quad (2)$$

при начальном
 $T_2(x,0) = T_0$ (3)

и граничных условиях

$$T_2(0,t) = T_b,$$

$$T_1(\xi,t) = T_2(\xi,t) = T_\phi = const, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_2(\infty,t)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где a – температуропроводность породы, m^2/c ; T_0 , T_b и T_ϕ – соответственно начальная температура талых пород, температуры среды (воздуха) и фазового перехода «вода – лед», °К.

Кроме этого, на границе раздела фаз имеет место особое условие, выражающее неразрывность температуры и равенство тепловых потоков:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=\xi} - \lambda_2 \frac{\partial T_3}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = L_\phi W \rho \frac{\partial z}{\partial \tau} \Big|_{z=\xi}, \quad (6)$$

где W – влажность породы, кг/кг; λ и ρ – соответственно ее теплопроводность и плотность, Вт/(м·К) и , кг/м³; L_ϕ – теплота фазового перехода «вода – лед», Дж/кг.

Известное решение Стефана имеет вид [1, 2]:

$$T_1(x,t) = T_b + (T_\phi - T_b) \cdot \frac{\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}}{\operatorname{erf} \frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}}, \quad (7)$$

$$T_2(x,t) = T_0 - (T_0 - T_\phi) \cdot \frac{\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}}{\operatorname{erfc} \frac{\beta}{2\sqrt{a_2}}}, \quad (8)$$

Коэффициент $\beta = const$ определяется из характеристического уравнения

$$\frac{2 \cdot \lambda_1 (T_\phi - T_b)}{\sqrt{a_1} \cdot \operatorname{erf}[\beta / (2\sqrt{a_1})]} \cdot \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_1}\right) - \frac{2 \cdot \lambda_2 (T_0 - T_\phi)}{\sqrt{a_2} \cdot \operatorname{erfc}[\beta / (2\sqrt{a_2})]} \cdot \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_2}\right) = L_\phi W \rho \sqrt{\pi} \beta. \quad (9)$$

Глубина (мощность) мерзлой зоны находится из выражения

$$\xi = \beta \sqrt{t}. \quad (10)$$

Следовательно, величина β определяет скорость углубления зоны промерзания. Трансцендентное уравнение достаточно сложное и требует для определения β численного решения, что препятствует исследованию влияния различных факторов на изменение параметра β .

Первые приближенные решения данной задачи были получены Ламе и Клайпероном [1], а также Лейбензоном Л.С. [4]. Решение Ламе и Клайперона получено в предположении, что температура талой зоны равна температуре фазового перехода, т.е. при условии $T_0 = T_\phi$. Тогда условие (9) запишется в виде:

$$\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_1}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}\right) = \frac{\lambda_1 (T_\phi - T_b)}{L_\phi W \rho \sqrt{\pi}}. \quad (11)$$

Ограничиваясь первыми членами разложения функций \exp и erf в ряды, можно получить явное выражение для коэффициента β [2]:

$$\beta = \sqrt{\frac{2\lambda_1 (T_\phi - T_b)}{L_\phi W \rho}}. \quad (12)$$

Предположение Лейбензона Л.С. состояло в том, что он принял линейное распределение температуры в мерзлой зоне, что соответствует стационарному состоянию. Характеристическое уравнение (9) в этом случае приводится к виду:

$$\frac{2\sqrt{\pi} \cdot \lambda_1 (T_\phi - T_b)}{\beta} - \frac{2 \cdot \lambda_2 (T_0 - T_\phi)}{\sqrt{a_2}} =. \quad (13)$$

$$= L_\phi W \rho \sqrt{\pi} \beta$$

Достаточно грубое предположение Лейбензона Л.С., как будет видно из дальнейшего, дает значительную погрешность при определении величины β по сравнению с решением Стефана.

Численное решение уравнения (9) при $\lambda_1 = 2$ Вт/(м·К), $a_1 = 0,89 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda_2 = 1,7$ Вт/(м·К), $a_2 = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_b = 255$ К, $T_0 = 277$ К, $T_\phi = 273$ К, $L_\phi = 3,32 \cdot 10^5$ Дж/кг, $W = 0,29$, $\rho = 1,8 \cdot 10^3$ кг/м³ дает $\beta = 0,000693491$. Полученное значение величины β мало и это дает возможность разложения комплекса специальных функций в выражении (9) в ряд вблизи $\beta = 0$:

$$\frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_1}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}\right)} = \frac{\sqrt{\pi a_1}}{\beta} - \frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{a_1}} \beta + \dots \quad (14)$$

$$\frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{4a_1}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{a_1}}\right)} = 1 + \frac{\beta}{\sqrt{\pi a_2}} + \dots \quad (15)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами разложений (14) и (15), перепишем уравнение (9) в виде

$$A \cdot \frac{1}{6\sqrt{a_1}} (6a_1 - \beta^2) - B \cdot \frac{\beta}{\pi\sqrt{a_2}} (\sqrt{\pi a_2} + \beta) - C \cdot \beta^2 = 0$$

$$\text{где } A = \frac{2 \cdot \lambda_1 (T_\phi - T_b)}{\sqrt{a_1}}; \quad B = \frac{2 \cdot \lambda_2 (T_0 - T_\phi)}{\sqrt{a_2}};$$

$$C = L_\phi W \rho.$$

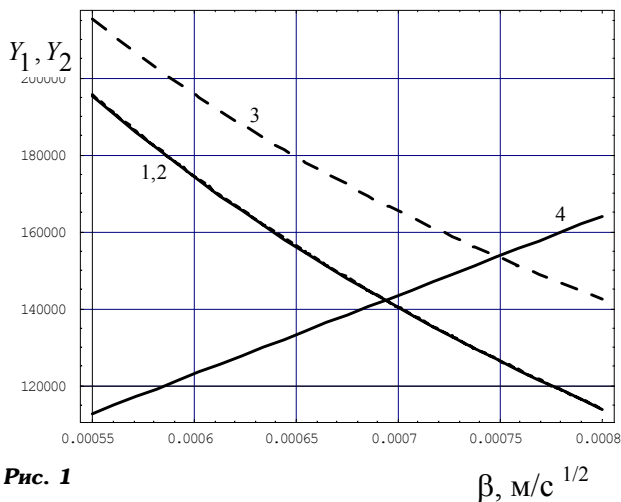


Рис. 1

Преобразуем полученное уравнение к квадратному:

$$M\beta^2 + N\beta - K = 0, \quad (16)$$

где $M = \frac{A}{6\sqrt{a_1}} + \frac{B}{\pi\sqrt{a_2}} + C, \quad N = \frac{B}{\sqrt{\pi}},$

$$K = A \cdot \sqrt{a_1}.$$

Решая уравнение (16), находим

$$\beta = -\frac{N}{2M} + \frac{\sqrt{N^2 + 4MK}}{2M}. \quad (17)$$

Знак «+» перед вторым членом выбран исходя из условия $\beta > 0$. Величина β при приведенных выше значениях параметров равна $\beta = 0,000693834$, т.е. погрешность по отношению к точному решению составляет сотые доли процента.

Графическое решение уравнений (9), (13) и (17) представлено на рисунках 1 и 2. На данных рисунках значения левых и правых частей указанных уравнений обозначены соответственно через Y_1 и Y_2 . Абс-

цисса точек пересечения графиков $Y_1(\beta)$ и $Y_2(\beta)$ представляет собой значение β . Как видно из рис.

1, кривые 1 и 2, соответствующие уравнениям (9) и (17) практически совпадают, в то время как кривая 3, полученная по приближению Лейбензона Л.С. (уравнение (13)), существенно расходится с точным решением (9). Различие кривых 1 и 2 удастся обнаружить только при значительном увеличении вблизи точки их пересечения с кривой 4 (рис. 2), т.е. вблизи точки с абсциссой $\beta = 0,000693491$. Таким образом, здесь имеет место не только совпадение точек пересечения кривых 1 и 2 с кривой 4, но и их ка-

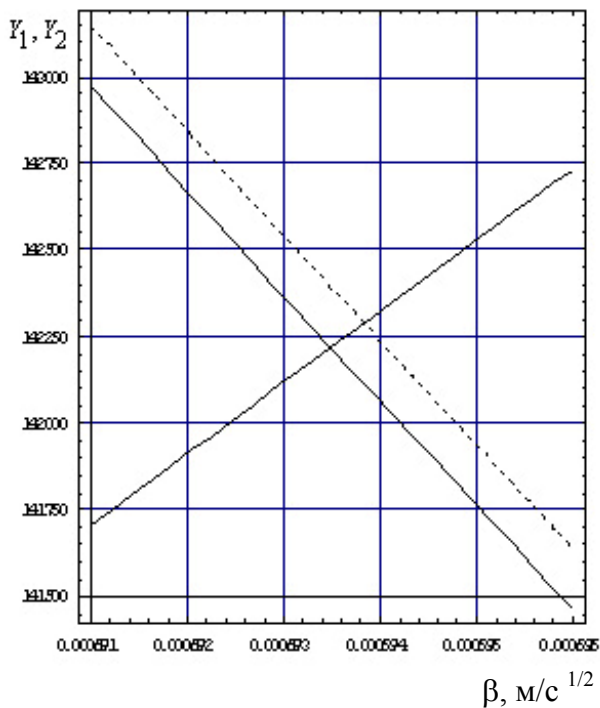


Рис. 2

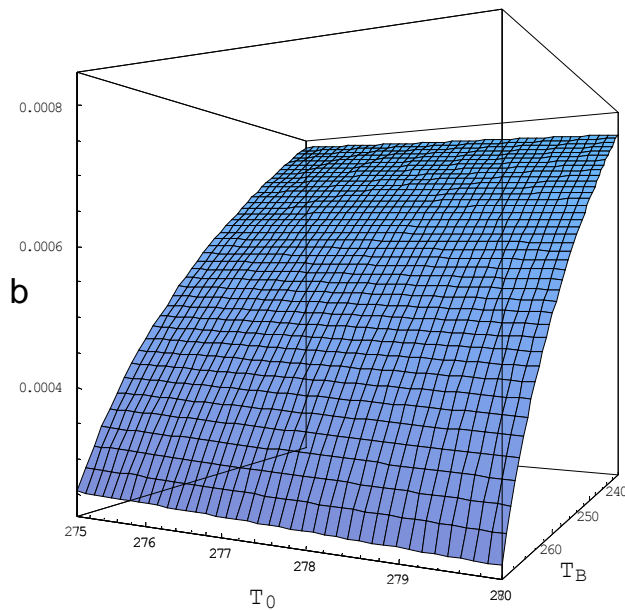


Рис. 3

ественная идентичность. Следовательно, при изменении правой части уравнений и соответственно смещения точки пересечения значения абсцисс этих точек для кривых 1 и 2 также будут близки по величине.

Таким образом, формула (17) по-

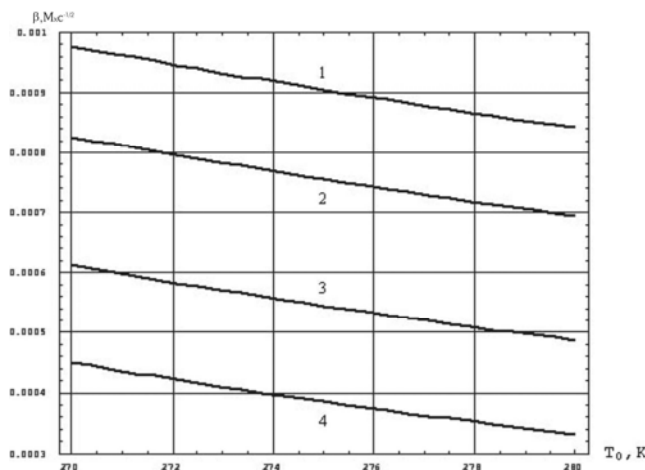


Рис. 4

зволяет с большой точностью находить значения коэффициента β , при этом она дает явный аналитический вид зависимости этого коэффициента от теплофизических свойств породы и условий теплообмена. В частности характер изменения β от температуры внешней среды (воздуха) и температуры талой зоны приведен на рис. 3. Явное аналитическое представление формулы для величины β позволяет использовать аппарат анализа при исследовании процесса промерзания или оттаивания массивов горных пород.

Как следует из данного рисунка, величина β существенно зависит от температуры T_b и в незначительной степени от T_0 . Это непосредственно видно на рис. 4, где представлены зависимости коэффициента β от температуры T_0 . Кривые 1, 2, 3 и 4 на рис. 4 получены для температур воздуха T_b , равных соответственно 243 К, 253 К, 263 К и 268 К. Зависимости $\beta(T_0)$ практически близки к прямым линиям в заданном диапазоне изменения T_0 , причем все они качественно идентичны.

Зависимость глубины промерзания (координаты подвижной границы ξ) от времени, полученная по формуле (10), представлена на рис. 5. Величина ξ интенсивно возрастает вначале процесса промер-

зания (в пределах 1 суток), далее темп ее изменения снижается. В частности, если за 1 сутки глубина промерзания составляет примерно 2 м, то за 5 суток – около 0,45 м.

Графики распределения температуры в промерзшем и талом слоях представлены на рис. 6. Кривые 1 и 2 соответствуют продолжительностям промерзания 1 и 6 суткам. Распределение температуры в мерзлом слое близко к линейному, а в талом – асимптотически стремится к начальной температуре массива. Пунктирная линия на данном рисунке отражает температуру фазового перехода грунтовой влаги и равно для двухзонной модели (для воды) $T_{\phi} = 273 \text{ К}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1966. - 600 с.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.

3. Комаров И.А. Термодинамика и теплообмен в дисперсных мерзлых породах. - М.: Научный мир, 2003. - 608 с.

4. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористых средах. М. - Л.: Гостехиздат, 1947. 214 с. **ГИАБ**

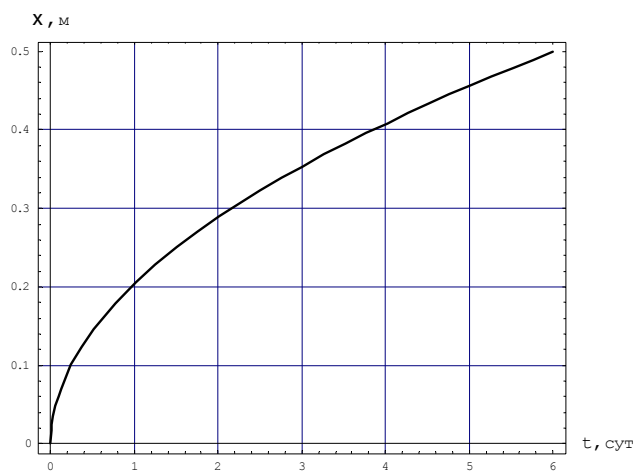


Рис. 5

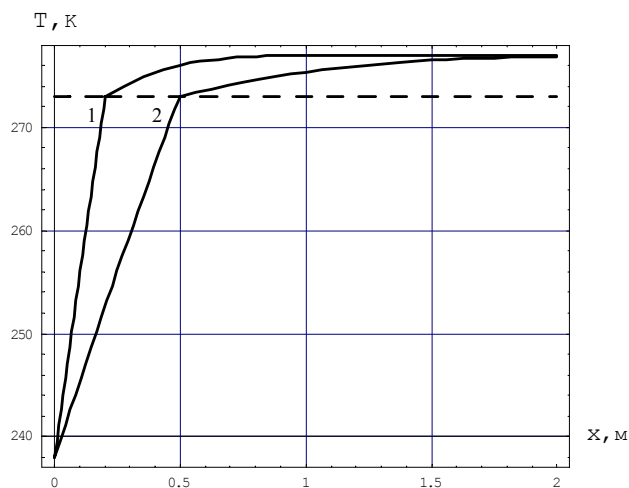


Рис. 6

Коротко об авторах

Дугарцыренов А.В. – докторант кафедры «Физика горных пород и процессов» Московского государственного горного университета,
Бельченко Е.Л. – профессор кафедры «Физика горных пород и процессов».

Рецензент д-р техн. наук, проф. О.М. Гридин, Московский государственный горный университет.