УДК 658.14.0123.1

А.В. Юденков, А.Э. Адигамов, Е.В. Горонина

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Основы современного математического моделирования основных задач плоской теории упругости были заложены в работах Н.И. Мусхелишвили и Г.В. Колосова. В них было показано, что основные характеристики состояния упругого изотропного однородного тела могут быть найдены через решение краевых задач для бианалитических функций

$$F(z)=\varphi_0(z)+\bar{z}\varphi_1(z). \qquad (1)$$

Здесь, $\varphi_k(z)$ - аналитические компоненты, $z=x-iy$. В дальнейшем подход, предложенный в работе [2], получил значительное развитие в трудах Г.Н. Савина, Г.С. Лехницкого, и других отечественных и зарубежных ученых.

Рассмотрим первую основную задачу теории упругости.

Требуется найти смещения по заданным на контуре напряжениям. Используя бианалитические функции, первой задачи теории упругости, можно поставить в соответствие следующую краевую задачу.

Пусть D – область занимаемая телом, L - контур. Требуется определить неизвестные аналитические компоненты $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ по краевым условиям.

$$\varphi_0'(t)+\bar{t}\varphi_1'(t)+\varphi_1(t)=-\left[\overline{\varphi_0'(t)+\bar{t}\varphi_1'(t)+\varphi_1(t)}\right]+$$
$$+g_1(t),\quad t\in L \qquad (2)$$
$$\varphi_0'(t)+\bar{t}\varphi_1'(t)-\varphi_1(t)=\left[\overline{\varphi_0'(t)+\bar{t}\varphi_1'-\varphi_1(t)}\right]+g_2(t)$$

Здесь $g_1(t)$ и $g_2(t)$ - заданные на L функции ($g_1(t)=\int Y_n ds$, $g_2(t)=-i\int X_n ds$).

Обычно полагают, что $g_k(t)\in H^{(1)}(L)$, $H(L)$ - класс функций Гельдера, $L\in L^{(1)}$, L - класс кривых Ляпунова.

Краевые задачи вида (2) достаточно полно изучены, однако говорить о том, что математическое моделирование напряженного состояния упругого тела с помощью краевых задач для бианалитических функций и их обобщений достаточно полно отражает основные задачи теории упругости нельзя.

Рассмотрим ряд моментов, с которыми приходится часто сталкиваться в процессе решения практически важных задач.

1) Центральной идеей решения краевой задачи (2) является переход от области D к единичному кругу γ с помощью конформных отображений. При этом конформноотображающая функция строится в виде полинома. В результате область D заменяется на достаточно близкую к ней область D′. Так как задача (2) устойчива относительно изменений области, то таким образом можно получить достаточно точное решение задачи (2). Однако полином при конформном отображе-

нии преобразует контур L в более «волнистый» контур L′. Это приводит к тому, что вблизи границы рассчитанные нагрузки значительно больше, чем реальные. В работах А.Г. Угодчикова, для преодоления этого противоречия предлагается рассматривать не сам контур L′, а его сглаженное математическое ожидание, т.е. детерминированная краевая задача переходит в стохастическую.

2) Линейная математическая модель (2) описывает только небольшой спектр нагрузок, которые могут действовать на тело. Она не может описать процесс перехода упругого состояния в текучее, что бывает важно при решении задач теории упругости для плоскостей, ослабленных отверстиями. На наш взгляд это также связано с тем, что математическая модель (2) не учитывает вероятностного характера процесса деформации тела.

В работах Д.Д. Ивлева образец D, подвергающийся деформации, рассматривается как совокупность элементарных составляющих.

При приближении внешней нагрузки к предельной детерминированная задача становится стохастической, так как невозможно предсказать , какой из элементов перейдет из упругого состояния в текучее.

Такая ситуация наблюдается и при нагрузках далеких от предельных. В результате флуктуаций в образце будут возникать зародыши «текучей» фазы. Правда, их влияние на напряженное состояние будет незначительным. Однако учет этого случайного фактора может служить для построения общей модели напряженного состояния тела при переходе от упругого состояния к текучему.

Таким образом, традиционную математическую модель (2) можно усовершенствовать, если дать процессу стохастическое толкование. Используем для этого теорию дифференциальных стохастических уравнений.

Известно, что стохастические дифференциальные уравнения эффективно применяются для вероятностного описания краевых задач для аналитических (гармонических) функций, т.е. функций, удовлетворяющих эллиптическому (гармоническому) уравнению

$$\Delta\varphi \equiv 0 . \qquad (3)$$

Бианалитическая функция F(Z) является решением бигармонического уравнения

$$\Delta^2 F(z) \equiv 0 . \qquad (4)$$

Поэтому непосредственно построить стохастическое дифференциальное уравнение, для решения краевой задачи (2) нельзя.

Преобразуем краевые условия (2). Предположим, что функция, отображающая единичный круг на область D является полиномом, т.е.

$$\omega(\xi) = a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n .$$

Введем дополнительные функции

$$\varphi(\xi) = \varphi_1[\omega(\xi)],$$

$$\psi(\xi) = \psi_1[\omega(\xi)], \psi_1(z) = \varphi_1'(z),$$

$$g_k(\sigma) = g_k^*(\omega(\xi)), k = 1,2.$$

С учетом обозначений краевые условия (2) примут вид

$$\begin{gathered}
\psi(\sigma) + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \varphi(\sigma) = \\
= -\left[\overline{\psi(\sigma) + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \varphi(\sigma)}\right] + g_1^*(\sigma), \\
\psi(\sigma) + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) - \varphi(\sigma) = \\
= \left[\overline{\psi(\sigma) + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) - \varphi(\sigma)}\right] + g_2^*(\sigma).
\end{gathered} \qquad (5)$$

Воспользуемся тем, что на единичной окружности выполняется условие

$\overline{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}$.

Получим

$$\overline{\omega(\sigma)} = \overline{a_1} \cdot \sigma^{-1} + \overline{a_2} \cdot \sigma^{-2} + \overline{a_n} \cdot \sigma^{-n} = $$
$$= \sigma^{-n}(\overline{a_1}, \sigma^{n-1} + ... + \overline{a_n}) = \sigma^{-n} f(\sigma).$$

Введем вспомогательные аналитические функции

$$\Phi_1(\xi) = \psi(\xi) + \frac{f(\xi)}{\xi^n} \cdot \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} + \varphi(\xi),$$
$$\Phi_2(\xi) = \psi(\xi) + \frac{f(\xi)}{\xi^n} \cdot \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} - \varphi(\xi). \quad (6)$$

Краевые условия (5) примут вид

$$\begin{cases} \Phi_1(\sigma) = -\overline{\Phi_1(\sigma)} + g_1^*(\sigma), \\ \Phi_2(\sigma) = \overline{\Phi_2(\sigma)} + g_2^*(\sigma). \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) состоит из задачи Дирихле и задачи Шварца для отыскания неизвестных аналитических функций.

Как было показано в работах Какутани (см. [3]), каждую из задач можно выразить в терминах броуновского движения. Здесь $\Phi_k(\xi)$ есть математическое ожидание функции $g_k^*(\sigma)$ в точке первого выхода из единичного круга броуновского движения, начавшегося в точке $\xi \in \gamma$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности.-М.: Наука. 1966.
2. *Мусхелишвили Н.Н.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М: Наука, 1968.
3. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференіальные уравнения. – М. Мир 2003.
4. *Хотченков А.Г.* Гетерофазные флуктуации - Смоленск, из-во СГПИ, 1993.
5. *Юденков А.В.* Краевые задачи для полианалитических функций. – Смоленск, 2002. ГИАБ

Коротко об авторах

Юденков А.В. –доктор физико-математических наук, профессор Смоленской ГСХА,
Адигамов А.Э. – кандидат технических наук, доцент Московского государственного горного университета,
Горонина Е.В. – аспирантка, Смоленской ГСХА.

Доклад рекомендован к опубликованию Смоленской ГСХА.
Рецензент д-р экон. наук, проф. *А.В. Самородский.*