УДК 534.283

А.Ю. Бауков, А.А. Звонкина

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРАХ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ОДНОРОДНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Проведена количественная оценка возможности замены многослойной колебательной системы однослойной однородной пластиной с эквивалентными колебательными параметрами с использованием ряда положений, применяемых при изучении виброизоляции и вибропоглощения конструкций, выполненных из системы плоскопараллельных слоев.

Ключевые слова: колебания многослойных конструкций, импеданс, вибропоглощение, однослойная однородная пластина.

Семинар № 2

A.Y. Baukov, A.A. Zvonkina

THE EQUIVALENT PARAMETERS OF THE MULTI-LAYERED CONSTRUCTIONS AND THE ISOTROPIC ONE-LAYER PLATE

The quantative estimation of the possibility to replace the multi-layered oscillating system with a isotropic plate of the equivalent oscillating parameters is carried out. The postulates for vibration isolation and absorption of the constructions made of the plane-parallel layers have been used.

Key words: movement of multi-layered constructions, total resistance, isotropic one-layer plate

Теоретическое изучение изгибных колебаний многослойных конструкций - чрезвычайно сложная математическая задача. С целью ее упрощения предлагается свести данную проблему к исследованию изгибных колебаний однослойной однородной упругой пластины с некими эффективными физико-механическими характеристиками, которые эквивалентны аналогичным характеристиками многослойной системы.

Такая методика исследований колебательных свойств многослойных систем применялась в ультразвуковой дефектоскопии при обосновании применения метода свободных колебаний [1, 2]. Однако в данном случае использование такого подхода носило чисто качественный характер.

С целью количественной оценки возможности замены многослойной колебательной системы однослойной однородной пластиной с эквивалентными колебательными параметрами воспользуемся рядом положений, широко используемых при изучении виброизоляции и вибропоглощения конструкций, выполненных из системы плоскопараллельных слоев [1-3]. В данной области сделаны попытки определения параметров однородной пластины, совершающей колебания определенного типа, которые соответствовали бы параметрам многослойной пластины при распространении в ней, в частности, изгибных колебаний [3]. При этом используется так называемый метод волнового импеданса тонких пластин, заключающийся в определении входных импедансов многослойных конструкций и соответствующих входных импедансов тонкой пластины.

Под волновым импедансом в данном случае понимается механическое сопротивление колебательной системы, которое соответствует отношению силы к колебательной скорости $\dot{\xi}_0$ системы, которая имеет место при действии на нее этой гармонической возбуждающей силы $F = F_0 e^{j\omega t}$:

$$Z_\xi = \frac{F_0}{\dot{\xi}_0}, \qquad (1)$$

При изучении вибропоглощения многослойных конструкций в общем случае рассчитываются волновые механические сопротивления для различных типов волн, которые могут распространяться по таким конструкциям: изгибных, сдвиговых, продольных. При этом даже без учета внутренних потерь импеданс является комплексной величиной. Так, например, в случае изгибных волн поперечное волновое сопротивление тонкой пластины равно:

$$Z_\xi = \frac{F_0}{\dot{\xi}_0} = j\omega m + \frac{Bk^4}{j\omega}, \qquad (2)$$

где m – масса, приходящаяся на единицу поверхности пластины; B - изгибная жесткость пластины, k – волновое число для изгибных колебаний пластины.

В случае многослойных пластин их входные импедансы описываются чрезвычайно громоздкими выражениями [2], структура которых зависит от числа слоев конкретной конструкции. Причем основной целью при использовании данного метода является определение коэффициента потерь η

$$\eta = \frac{R_e Z}{|Z_1|}, \qquad (3)$$

где $R_e Z$ - вещественная часть волнового сопротивления многослойной пластины; Z_1 - упругая составляющая волнового сопротивления многослойной пластины.

Здесь необходимо отметить, что несмотря на то, что данный метод используется при расчете волновых сопротивлений для различного типа бегущих волн, он может быть применен и в случае изгибных колебаний тонких пластин на их основных модах, т.к. возникновение изгибных мод (стоячих волн) в пластине является следствием суперпозиции прямых и встречных изгибных волн, отражающихся от краевых границ пластины, частоты которых соответствуют частоте изгибных мод:

$$\xi = A_1 e^{-jk_n x} + A_2 e^{jk_n x}, \qquad (4)$$

где ξ - смещение в стоячей волне на основной моде пластины; A_1 и A_2 - амплитуды прямой и отраженной от края пластины изгибных волн; k_n – волновое число изгибных колебаний пластины, $k_n = \frac{\omega}{C_n}$, C_n - фазовая скорость изгибных волн в пластине.

При этом уравнение движения пластины, вдоль которой распространяется под действием вынужденной силы $F(t) = F_0 e^{jwt}$ изгибная волна, может быть записано в следующем виде:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + B\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = F(t), \qquad (5)$$

где B - изгибная жесткость пластины,

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \qquad (6)$$

Из выражений (5) и (6) можно сделать вывод о том, что основными эквивалентными параметрами, определяющими изгибные колебания тонкой пластины являются ее масса m и изгибная жесткость B. Таким образом, при решении поставленной выше задачи необходимо определить эквивалентную массу одно-

Основные характеристики элементов многослойных строительных конструкций

Вид конструкции	Тип слоя	Материал слоя	Номер слоя	Толщина слоя h, м	$E_i \cdot 10^{-10}$, Н/м^2	μ	ρ_i, кг/м^3
Двухслойная	Подготовка	Бетон низкой марки	1	0,1-0,2	0.5-2.0	0.28	1800-2000
	Плита	Железобетон	2	0,1-0,3	1,0-5,0	0,22	2200-2500
Трехслойная	Подготовка	Бетон низкой марки	1	0,1-0,2	0,5-2,0	0,28	1800-2000
	Гидроизоляционный слой	Синтетика	2	0,01-0,03	0,02-0,06	0,3	900-1150
	Плита	Железобетон	3		1,0-5,0	0,22	2200-2500

слойной однородной пластины $m_э$ и эквивалентный модуль упругости *Eэ*, принимая во внимание, что изменение величины коэффициента Пуассона μ в многослойных строительных конструкциях достаточно мало.

В связи с тем, что данные исследования имеют оценочный характер, ниже рассмотрим вопрос об определении эквивалентных характеристик однослойных пластин лишь для конкретных случаев многослойных бетонных конструкций, наиболее часто встречающихся в практике применения виброакустического метода при неразрушающем контроле строительных объектов.

К таким основным типам многослойных конструкций относится объекта, состоящий из слоя бетонной подготовки, непосредственно лежащей на грунтовом или насыпном основании и расположенной сверху железобетонной плиты (рис. 1, *а*). К другому характерному типу многослойного объекта можно отнести конструкцию, состоящую также из слоя подготовки, основного верхнего железобетонного покрытия и промежуточного гидроизоляционного тонкого слоя, выполненного из синтетических материалов (рис. 1, *б*).

Характерный диапазон изменения толщин указанных слоев, а также их основных физико-механических свойств представлен в таблице.

Для оценки эквивалентной массы единичного слоя в обоих указанных в таблице случаях необходимо рассчитать массу многослойной плиты с какими-либо заданными горизонтальными размерами, соответствующими горизонтальным размерам дефекта, и сравнить ее с массой однослойной пластины, толщина которой соответствует суммарной толщине слоев многослойной пластины при соответствующем выбранном значении ее плотности.

Так в случае двухслойной пластины (подготовка + плита) ее суммарная масса определится следующим образом:

$$M_\Sigma = S(h_1\rho_1 + h_2\rho_2)\,, \tag{7}$$

где S - площадь пластины (дефекта).

Масса эквивалентной однослойной пластины соответствует

$$M_Э = S \cdot H_Э \cdot \rho_Э\,, \tag{8}$$

где $H_Э$ и $\rho_Э$ - эквивалентные толщина и плотность плиты.

Так как различие в плотности составляющих многослойной пластины невелика, в качестве двух возможных

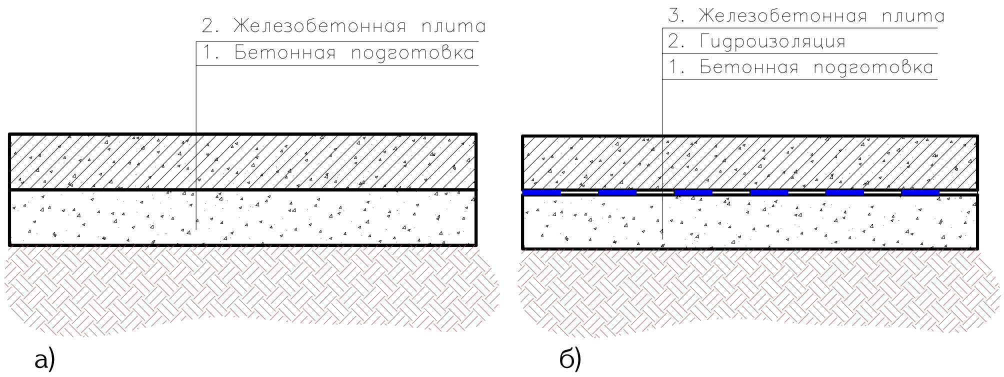


Рис. 1. Схематическое изображение типичных многослойных строительных конструкций: а) двухслойные; б) трехслойные

вариантов эквивалентной плотности выберем: а) $\rho_Э^{(1)} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ - средняя плотность слоев; б) $\rho_Э^{(2)} = \rho_1$ - плотность бетонной плиты.

Величину эквивалентной толщины $H_Э$ выберем для определенности равной суммарной толщине многослойной пластины $H_Э = h_1 + h_2$.

Оценим относительную разность между M_Σ и $M_Э$ для двух указанных случаев а) и б) при возможной вариации реальных толщин слоев h_1 и h_2 и плотностей ρ_1 и ρ_2, определяя в каждом случае величину

$$\delta M_{Э2} = \frac{(M_Э - M_\Sigma)}{M_Э} = \frac{[H_Э\rho_Э - (h_1\rho_1 + h_2\rho_2)]}{H_Э\rho_Э} \quad (9)$$

Проведя указанные вычисления можно получить, что величина $\delta M_{Э2}$ при вариации названных параметров изменяется в диапазоне от долей процента до 12 %, причем наименьшее значение $\delta M_{Э2}$ имеет место в случае б), когда $\rho_Э = \rho_1$. Так при наиболее характерных значениях параметров многослойной пластины ($h_1 = 0,2$ м; $h_2 = 0,15$ м; $\rho_1 = 2,3 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\rho_2 = 2,0 \cdot 10^3$ кг/м^3) величина $\delta M_{Э2}$ соответствует $\delta M_{Э2}^{(1)} = 2\%$ и $\delta M_{Э2}^{(2)} = 0,6\%$.

Отсюда можно сделать вывод о том, что при выборе эквивалентных характеристик массового члена двухслойной плиты можно в качестве ее толщины принимать толщину многослойной пластины, а в качестве эквивалентной плотности – плотность верхнего бетонного слоя.

Аналогичные расчеты были выполнены и для трехслойной конструкции для двух указанных случаев выбора $\rho_Э$: а) $\rho_Э^{(1)} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3}$; б) $\rho_Э^{(2)} = \rho_3$.

При этом определялась величина

$$\delta M_{Э3} = \frac{[H_Э\rho_Э - (h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3)]}{H_Э\rho_Э}, \quad (10)$$

где $H_Э = h_1 + h_2 + h_3$.

Расчеты в данном случае показали, что относительная разность $\delta M_{Э3}$ при вариации характеристик трехслойной системы в пределах, указанных в таблице, изменяется в диапазоне от единиц процента до 21 % и наименьшее значение $\delta M_{Э3}$ получается при $\rho_Э = \rho_3$.

Рис. 2. Зависимость эквивалентного модуля упругости для двухслойной пластины от модуля упругости нижнего слоя

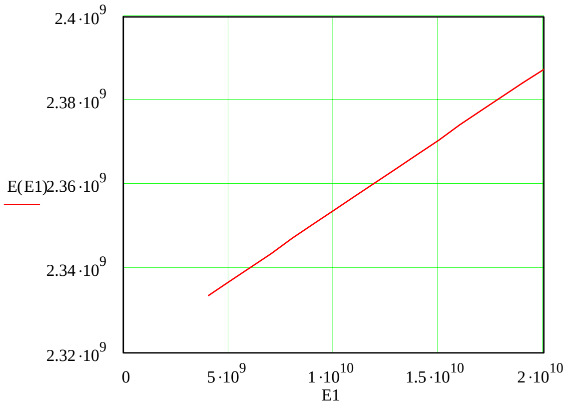
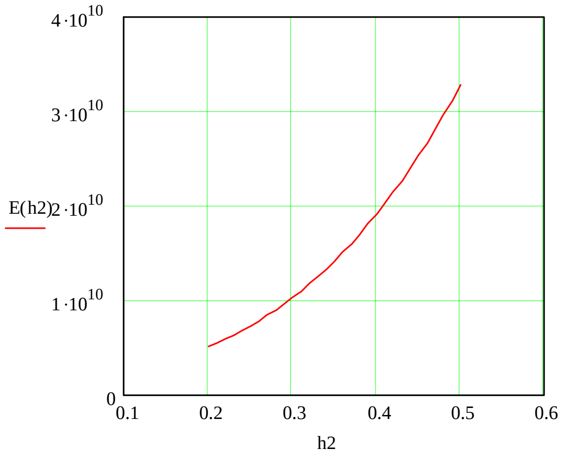


Рис. 3. Зависимость эквивалентного модуля упругости для двухслойной пластины от толщины верхнего слоя



В частности, в случае средних значений характеристик трехслойной пластины ($h_1 = 0{,}15$ м; $h_2 = 0{,}02$ м; $h_3 = 0{,}2$ м; $\rho_1 = 2{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\rho_3 = 2{,}3 \cdot 10^3$) получено

$\delta M_{э3}^{(1)} = 19\%$ $\delta M_{э3}^{(2)} = 8\%$.

Таким образом и при рассмотрении трехслойной конструкции в качестве эквивалентных значений толщины $H_э$ и плотности $\rho_э$ также можно принять суммарную толщину слоев и плотность бетонной плиты ρ_3.

В таком случае для оценки эквивалентных значений модуля Юнга $E_{эi}$ для двух и трехслойных пластин можно воспользоваться теоретическими расчетами изгибной жесткости B_j для многослойных пластин, представленных в работе [3], и сравнить данные выражения с эквивалентной изгибной жесткостью для однослойной однородной пластины

$$B_{эj} = \frac{E_{эj} \cdot H_{эj}^3}{12(1-\mu^2)}, \tag{11}$$

где индекс j соответствует числу слоев в многослойной пластине, $j = 2, 3$.

Так согласно [3] изгибная жесткость двухслойной пластины определяется:

$$B_2 = B_1(1 + 5\alpha_2^3\beta_2 + 4\alpha_2\beta_2), \tag{12}$$

где B_1 - жесткость нижнего слоя (подготовки); $\alpha_2 = \dfrac{h_2}{h_1}$; $\beta_2 = \dfrac{E_2}{E_1}$;

$$\alpha_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1+\alpha_2}{2}. \tag{13}$$

Приравнивая выражения (11) и (12) с учетом соответствующего выбора значений $E_{э2}$ и $H_{э2}$, можно получить

$$E_{э2} = \frac{E_1 \cdot h_1^3}{H_э^3}\left\{1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{h_2}{h_1}\left[5\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + 4\right]\right\}. \tag{14}$$

На основании выражения (14) были проведены расчеты изменения величины эффективного модуля Юнга для двухслойной пластины в зависимости от мощности обоих слоев h_1 и h_2, а также от изменения модулей Юнга материалов этих слоев. Примеры результатов таких расчетов в виде соответствующих графиков представлены на рис. 2 и рис. 3. Из данных зависимостей видно, что при изменении величины модулей Юнга E_1 и E_2 относительная разность между эквивалентной величиной модуля Юнга $E_{Э2}$ и модуля E_1, соответствующего бетонной плите изменяется в пределах от 8% до 68%, а при изменении величин h_1 и h_2 диапазон вариации той же относительной разности составляет от 16% до 86%.

Такие же операции позволяют получить на основании выражения для изгибной жесткости трехслойной системы, по своей структуре аналогичной трехслойной строительной конструкции (рис. 1, *б*), приведенного в работе [3], величину эквивалентного модуля Юнга $E_{Э3}$ для трехслойной упругой пластины:

$$E_{Э3} = E_1 \cdot \frac{h_1^3}{H_Э^{\,3}} \times$$

$$\times\left[1 + h_2 \frac{E_2}{h_1 E_1}\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + 12\left[\frac{(h_1+h_2)}{2h_1}\right]^2\right]\right] +$$

$$+h_3 \frac{E_3}{h_1 E_1}\left[\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2 + 12g \cdot \frac{\left[\dfrac{h_1+h_3+2h_2}{2h_1}\right]^2}{1+g\left(1+h_3\dfrac{E_3}{h_1E_1}\right)}\right] -$$

$$-\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{(h_1+h_3+2h_2)}{2h_1} \times$$

$$\times\frac{E_2}{E_1}\left[\frac{\left[6\dfrac{(h_1+h_2)}{2h_1} + \dfrac{h_2}{h_1} + 24gh_3(h_1+h_2)\dfrac{E_3}{h_1 2h_1 E_1}\right]}{1+g\left(1+h_3\dfrac{E_3}{h_1E_1}\right)}\right] \qquad (15)$$

где

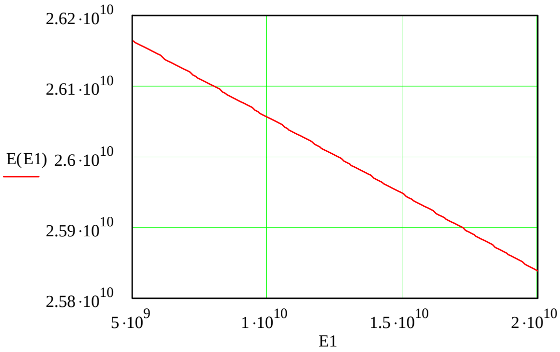
$$g = E_2 h_3^2 \cdot 12 \frac{(1-\mu^2)}{2(1+\mu)\cdot 12 E_3 h_3^2 h_2 \cdot 2\pi f} \times$$

$$\times \sqrt{E_1 \frac{h_1^3}{12(1-\mu^2)\cdot \rho_Э}},$$

где E_1, E_2, E_3 - модули Юнга, соответственно, слоя подготовки, гидроизоляционного слоя, железобетонного слоя верхней плиты; h_1, h_2, h_3 - толщины тех же компонент многослойной пластины; $\rho_Э$ - эквивалентная плотность трехслойной структуры, соответствующая плотности верхнего слоя ρ_3; $H_Э$ - эквивалентная мощность трехслойной структуры, равная суммарной мощности многослойной пластины; μ - коэффициент Пуассона верхнего слоя; f - частота изгибных колебаний пластины на первой моде над дефектом.

Типичные зависимости величины $E_{Э3}$ от параметров трехслойной пластины E_1, E_3, h_1, h_3, построенные на основании (15), приведены на рис. 4 и рис. 5. Расчет относительной разности $\delta E_{Э3}$ между $E_{Э3}$ и $E_{1,3}$ при изменении указанных параметров трехслойной пластины в пределах характерного диапазона их вариации (см. таблицу) показывает, что для трехслойной конструкции $\delta E_{Э3}$ изменяется от 27% до 83% при изменении E_1 и E_3, и от 30% до 83% при изменении h_1 и h_3. В случае вариации параметров промежуточного слоя (E_2 и h_2) вследствие относительно малых значений этих величин изменение $\delta E_{Э3}$ происходит в пределах 30%.

Таким образом, на основании результатов проведенных исследований можно сделать следующие практические выводы.



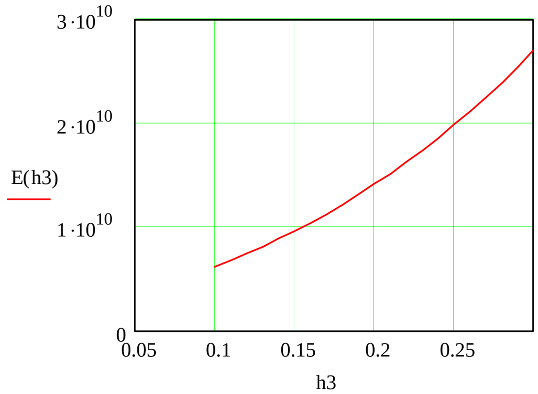


Рис. 4. Зависимость эквивалентного модуля упругости для трехслойной пластины от модуля упругости нижнего слоя

Рис. 5 . Зависимость эквивалентного модуля упругости для трехслойной пластины от толщины верхнего слоя

Во-первых, изучение особенностей изгибных колебаний многослойных пластин можно выполнять на основе однородной однослойной упругой пластины с некоторыми эквивалентными характеристиками.

Во-вторых, в случае многослойных пластин, параметры и конструкция которых соответствует типичным многослойным строительным объектам, представленным в таблице и на рис. 1 *а, б,* их эквивалентными параметрами, определяющими эффективную массу однослойной пластины, могут быть выбраны: общая толщина многослойной пластины и плотность верхнего железобетонного слоя.

В-третьих, эквивалентный модуль Юнга многослойной пластины при проведении расчетов, когда приемлемая погрешность этих расчетов может быть в пределах 30-40%, может быть принят равным модулю Юнга верхнего железобетонного слоя. В противном случае эквивалентный модуль Юнга однослойной однородной пластины рассчитывается согласно выражениям (14) или (15), или определяется по соответствующим номограммам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров А.С., Будрин С.В.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. *Л.*: Судостроение, 1968.

2. *Будрин С.В.* Метод приведения вибрационных параметров нормальных волн многослойной конструкции к эквивалентным параметрам однородной пластины. Акустическая акустика, 1999, т. V, вып. 1-2.

3. *Ross D., Ungar E., Kerwin E.* Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminat. “Structural Damping”. Pergamon Press, 1960. ГИАБ

Коротко об авторах

Бауков Ю.Н. – доцент кафедры ФТКП факультета ФТ,
Звонкина А.А. – студентка факультета ФТ,
Московский государственный горный университет,
Moscow state mining university, Russia, ud@msmu.ru