

УДК 531.8

**Р.З. Хайруллин****ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕШАГИВАНИЯ  
ЧЕРЕЗ ПРЕПЯТСТВИЕ**

Решается задача оптимизации перешагивания через препятствие для ноги шагающего аппарата. Применяется модифицированный метод последовательной линеаризации. Построено энергетически оптимальное управление в классе непрерывных кусочно-линейных управляющих функций. Выявлена структура оптимального закона движения.

Ключевые слова: метод последовательной линеаризации, шагающий аппарат, оптимальная управляющая функция.

Семинар № 11

**R.Z. Khayrullin  
OPTIMIZING OF STEPPING OVER  
OBSTACLE**

The solution of optimizing problem of stepping over obstacle for the feet of walking robot is given. The step by step linearization method is applied. Energy optimal control function in the class of continues piece – wise function is constructed. The structure of optimal law of motion is discovered.

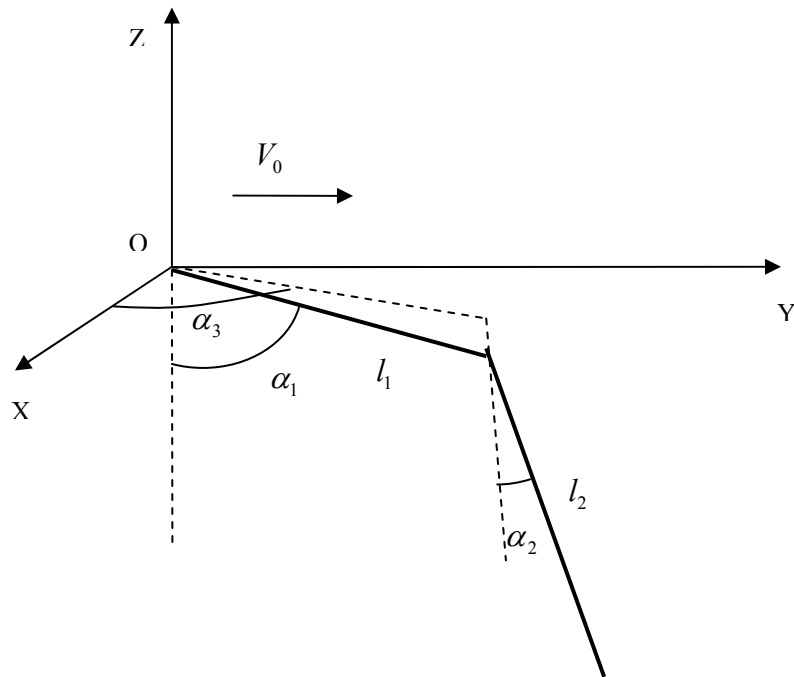
Key words: step by step linearization method, walking robot, optimal control function.

**В**опросам организации движения многоногих шагающих аппаратов (ША) посвящено достаточно много работ. К основополагающей можно отнести [1], в которой обосновывается существование энергетически оптимальных походок. При решении конкретных практических задач, в основном, проводится параметрическая оптимизация, например, по длине шага, скорости движения точки подвеса ноги, периоду движения ноги и т.д. В настоящей работе построено энергетически оптимальное управление в классе непрерывных кусочно-линейных управляющих функций. Решена задача оптимизации движения ноги ША при перешагивании через

цилиндрическое препятствие, лежащее поперек трассы. Выявлена структура оптимального управления и закона движения. Найдены оптимальные управляющие моменты, действующие в шарнирах ноги.

**1. Постановка задачи**

Для описания движения ноги ША введем правую декартову систему координат OXYZ, неподвижно ориентированную в пространстве (Рис.1). Ось OZ направлена вертикально вверх, оси OX и OY лежат в горизонтальной плоскости. Нога ША состоит из двух звеньев – бедра и голени. Бедро соединено с корпусом ША посредством двухстепенного шарнира. Связь между бедром и голенью осуществляется одноступенным шарниром. Обозначим  $\alpha_1$  - угол между бедром и отрицательным направлением оси OZ,  $\alpha_2$  - угол между голенью и отрицательным направлением оси OZ,  $\alpha_3$  - угол между плоскостью ноги и осью OX. Бедро и голень – тонкие однородные стержни, имеющие длины  $l_1$ ,  $l_2$  и массы  $m_1$ ,  $m_2$  соответственно. Контакт ноги с несущей поверхностью считается точечным. В дальнейшем конец ноги будем называть



**Рис. 1. Кинематика ноги ША**

стопой. Корпус ША движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $V_0$  в направлении оси ОУ (рис. 1).

Предполагается, что препятствие, имеющее форму цилиндрической трубы, расположено перпендикулярно направлению движения ША (рис. 2, а). Сечение трубы вертикальной плоскостью, ортогональной к ее оси  $O_0O_1$  дает эллипс (рис. 2, б). Малая полуось  $a$  и центр эллипса  $O_0$  принадлежат опорной плоскости.

Движение ША в фазе переноса ноги описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\frac{d x_i}{d \tau} = f_i(x, u, T), \quad \frac{d x_{i+3}}{d \tau} = x_i, \quad (1)$$

$i = 1, 2, 3, 0 \leq \tau \leq 1,$   
 где  $\tau$  - безразмерное время,  $T$  - время переноса ноги,  $x_{i+3} = \alpha_i$  и  $x_i = \frac{d \alpha_i}{d \tau}$  -

безразмерные угловые координаты и скорости соответственно,  $u = u^* / k_0$  - безразмерное управление,  $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  - вектор, компонентами которого служат управляющие моменты в соответствующих шарнирах ноги,  $k_0$  - безразмерный коэффициент.

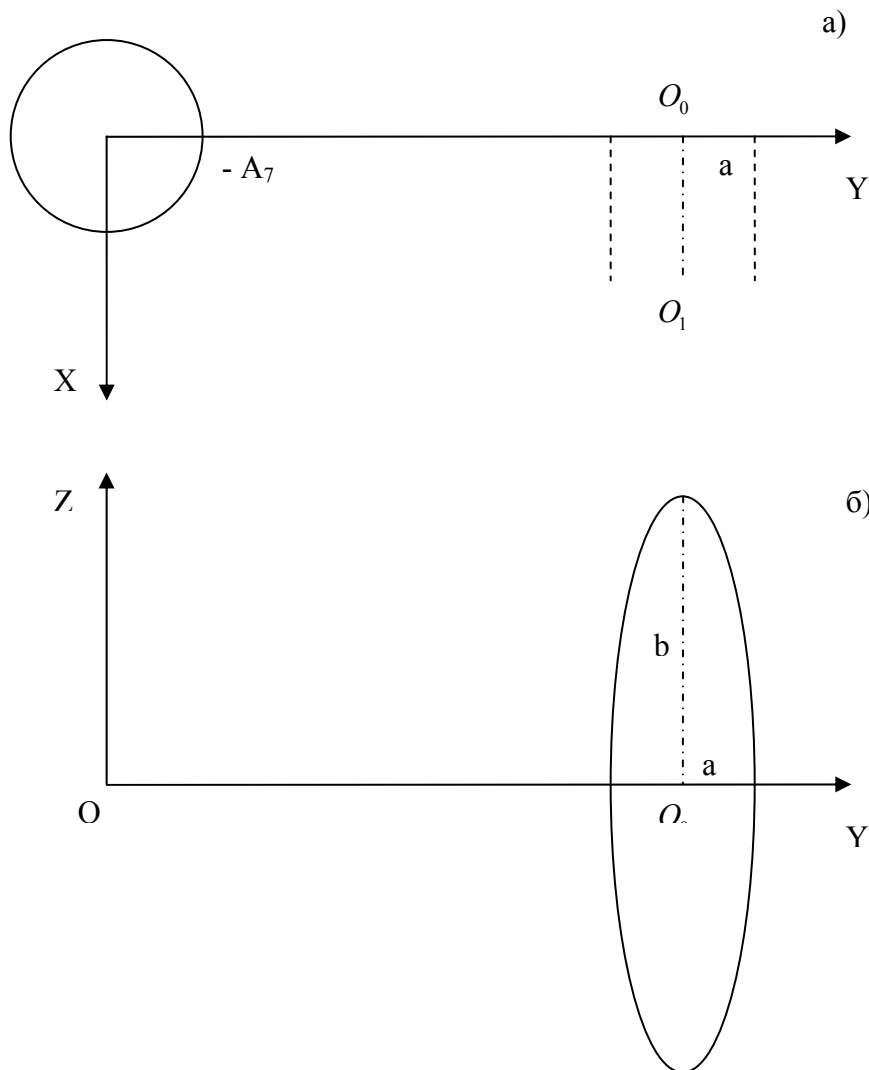
В момент  $\tau = 0$  начала движения угловые координаты и скорости будем считать заданными

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2)$$

В качестве критерия выберем функционал

$$F_0[u(\cdot)] = Tk_0^2 k \int_0^1 (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)) d\tau \rightarrow \min, \quad (3)$$

который характеризует возникающие при использовании электроприводов энергетические затраты на управление в шарнирах ноги ША. Здесь  $k$  -



**Рис. 2. Препятствие**

коэффициент, имеющий размерность  $1/(н \cdot м \cdot с)$ .

Потребуем, чтобы при  $\tau = T$  стопа опустилась на опорную плоскость в заданной точке. Это условие зададим с помощью терминальных функционалов

$$\begin{aligned} F_1[u(\cdot)] &= (l_1 \sin x_4(1) + l_2 \sin x_5(1)) \times \\ &\times \cos x_6(1) - X_1 = 0, \\ F_2[u(\cdot)] &= (l_1 \sin x_4(1) + l_2 \sin x_5(1)) \times \\ &\times \sin x_6(1) - Y_1 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$F_3[u(\cdot)] = -(l_1 \cos x_4(1) + l_2 \cos x_5(1)) - Z_1 = 0$$

Здесь  $(x_{i+3}(1), i=1,2,3)$  - угловые координаты ноги при  $\tau=1$ , а  $X_1, Y_1, Z_1$  - заданные требуемые значения декартовых координат стопы в этот момент.

Вертикальность конечной скорости опускания стопы будем контролировать следующими терминальными функционалами:

$$F_4[u(\cdot)] = x_3(1) \cdot (l_1 \sin x_4(1) + l_2 \sin x_5(1)) + V_0 T \cos x_6(1) = 0, \quad (5)$$

$$F_5[u(\cdot)] = l_1 x_1(1) \cos x_4(1) + l_2 x_2(1) \cos x_5(1) + V_0 T \sin x_6(1) = 0, \quad (6)$$

где  $(x_i(1), i=1,2,3)$  - угловые безразмерные скорости ноги в момент  $\tau = 1$ .

Потребуем, чтобы в процессе перешагивания через препятствие выполнялись следующие ограничения на фазовые координаты ноги.

1. Во все время движения нога ША должна находиться выше опорной плоскости:

$$F_6[u(\cdot)] = \max_{0 \leq \tau \leq 1} (l_1 \cos x_4(\tau) + l_2 \cos x_5(\tau)) - A_6 \leq 0, \quad (7)$$

здесь  $A_6$  - заданная постоянная. Функционал  $F_6$  оценивает расстояние от стопы до опорной плоскости.

2. Длина проекции радиус-вектора стопы на опорную плоскость должна быть не меньше некоторой заданной величины:

$$F_7[u(\cdot)] = \max_{0 \leq \tau \leq 1} (-(l_1 \sin x_4(\tau) + l_2 \sin x_5(\tau))) - A_7 \leq 0$$

здесь  $A_7$  - заданная постоянная. Функционал  $F_7$  оценивает расстояние от стопы до оси Oz (рис. 2, а).

2. При переносе нога не должна попадать внутрь препятствия:

$$F_8[u(\cdot)] = \max_{0 \leq \tau \leq 1} \Phi_8(x(\tau), \tau) \leq 0, \quad (9)$$

где  $\Phi_8(x(\tau), \tau) = -(\sqrt{R_1} - ab\sqrt{R_1}/\sqrt{R_2})$ ,

$$R_1 = (z(\tau) - z_0)^2 + (y(\tau) - (y_{10} - V_0 \tau T))^2,$$

$$R_2 = a^2(z(\tau) - z_0)^2 + b^2(y(\tau) - (y_{10} - V_0 \tau T))^2,$$

$$x(\tau) = (l_1 \sin x_4(\tau) + l_2 \sin x_5(\tau)) \cos x_6(\tau),$$

$$y(\tau) = (l_1 \sin x_4(\tau) + l_2 \sin x_5(\tau)) \sin x_6(\tau),$$

$$z(\tau) = l_1 \cos x_4(\tau) + l_2 \cos x_5(\tau).$$

Здесь  $y_{10}$ ,  $z_0$  - заданные постоянные числа. Функционал  $F_8$  оценивает расстояние от стопы до препятствия (рис. 2, а, б).

Задачу об оптимальном перешагивании через препятствие сформулируем следующим образом. Пусть задана система дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2). Требуется определить управляющие функции  $u_1(\tau)$ ,  $u_2(\tau)$ ,  $u_3(\tau)$  такие, что на соответствующей траектории достигается минимум функционала (3) и выполняются ограничения (4-9).

Эта задача решалась с помощью модифицированного метода последовательной линеаризации [2-3]. Поиск оптимального управления осуществлялся в классе непрерывных кусочно-линейных функций.

### 3. Первое приближение

В качестве первого приближения использовались непрерывные кусочно-линейные функции обеспечивающие движение, близкое к стандартному шаговому циклу [3]:

- вертикальный подъем стопы на высоту, превышающую высоту препятствия на 3-5% при  $0 \leq \tau \leq 0.3$

- поворот плоскости ноги на заданный угол  $\alpha_3$  при  $0.3 < \tau < 0.7$

- вертикальный спуск стопы в заданную точку опорной плоскости при  $0.7 \leq \tau \leq 1$ .

### 4. Результаты расчетов

Расчеты проводились для модели ША с характеристиками, принятыми в [2].

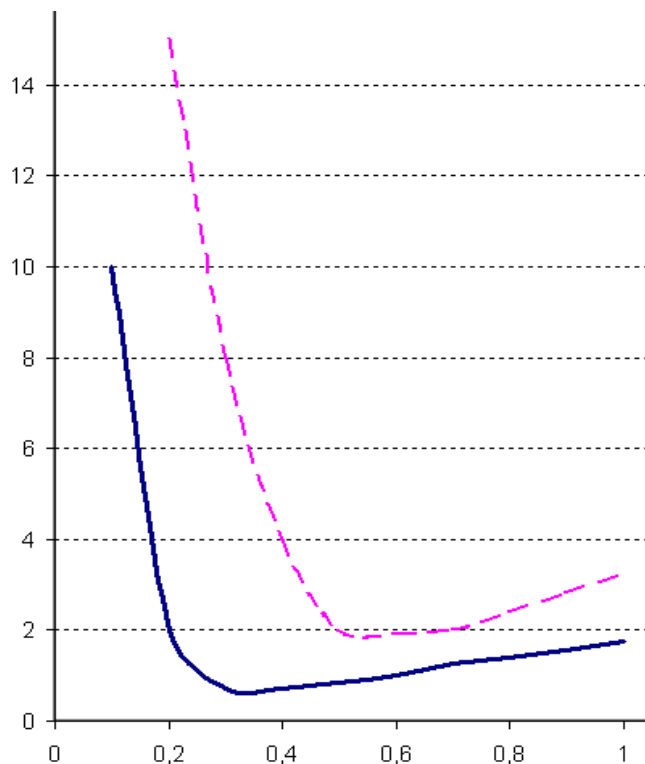
На рис. 3 приведены соответствующие оптимальному закону движения (сплошная линия) и исходному шаговому циклу (штриховая линия) графики энергозатрат в зависимости от безразмерного времени переноса ноги.

Максимальные управляющие моменты в шарнирах ноги ША, необходимые для реализации оптимального закона движения, составляют

$$\max_{0 \leq \tau \leq 1} |u_1(\tau)| = 1.86 \text{ н} \cdot \text{м},$$

$$\max_{0 \leq \tau \leq 1} |u_2(\tau)| = 0.51 \text{ н} \cdot \text{м},$$

$$\max_{0 \leq \tau \leq 1} |u_3(\tau)| = 0.89 \text{ н} \cdot \text{м}$$



**Рис.3. Зависимость энергозатрат от безразмерного времени переноса ноги ША**

этом длина проекции радиус-вектора стопы на опорную плоскость уменьшается. Нога как бы поджимается к вертикали, проходящей через точку подвеса ноги. Постепенно стопа поднимается и с некоторого момента времени движется по границе препятствия, а ее проекция на опорную плоскость принимает предельно допустимое значение (максимально поджимается к вертикали). Затем проекция радиус-вектора стопы сходит с предельно допустимого значения, и после этого стопа плавно сходит с границы препятствия.

По результатам расчетов выявлена структура оптимального закона движения ноги ША. В начале переноса нога ША движется на небольшой высоте над опорной плоскостью, при

Далее стопа опускается до небольшой высоты над опорной плоскостью и движется на этой высоте, а длина проекции радиус-вектора стопы на опорную плоскость постепенно возрастает до требуемой величины.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оходимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического аппарата. Москва, Наука, 1984.
2. Голубев Ю.Ф., Дегтярев Е.В., Хайруллин Р.З. Метод последовательной линеаризации в задаче поиска оптимального шагового цикла шагающего аппарата. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1990, №2.
3. Хайруллин Р.З. Технология исследования управляемых систем. Горный информационно – аналитический бюллетень, N4, 1999.
4. Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З. К построению оптимальных режимов раскачивания двузвенного физического маятника. Прикладная математика и механика, 2000, вып. 3. **ГИАБ**

#### Коротко об авторе

Хайруллин Р.З. – доктор физико-математических наук, каф. высшей математики, zrk@nm.ru, Московский государственный горный университет, Moscow state mining university, Russia.