

УДК 662:502.03:.541.11

**В.Е. Трушников**

**ПРИМЕНЕНИЕ ГРЕБНЕВОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ  
ТЕРМИЧЕСКИХ ФОСФАТОВ ИЗ ТЕХНОГЕННЫХ  
ФОСФАТНО-МАГНИЕВЫХ ОТХОДОВ**

*Приведены данные по плотности расплавов плавленных магниевых фосфатов из техногенных фосфатно-магневых отходов, по температурным интервалам плавления, по поверхностному натяжению расплавов и краевых углов смачивания расплавом графита. При обработке результатов экспериментальных исследований использовали метод гребневой регрессии, являющимся линейным оценителем, дающим более точные результаты по сравнению с градиентными методами.*

*Ключевые слова: техногенные отходы, плавленные магниевые фосфаты, плавление, расплав, гребневая регрессия.*

---

**Х**восты магнитной сепарации и отвальные хвосты Ковдорского ГОКа содержат примерно 12% и 4 %  $P_2O_5$  (около 26 % от содержащегося в исходном сырье  $P_2O_5$ ) и около 18 % и 28%  $MgO$  соответственно. Мелочь фосфоритов крупностью менее 10 мм (содержание  $P_2O_5$  составляет от 23 до 25%) в производстве элементарного фосфора является отходом и также складывается более 40 лет в отвалах в Самарской области.

Поэтому использование этих сырьевых ресурсов довольно перспективно. Одним из перспективных направлений переработки такого фосфатного сырья является способ получения термических фосфатов, сущность которого заключается в разрушении неусвояемой растениями кристаллической структуры минералов апатита при плавлении в процессе термического нагрева. В результате быстрого охлаждения расплава и образования мелких гранул, подаваемой водой под давлением, сохраняется аморфная стеклообразная структура, растворимая в 2 %- ном растворе лимонной кислоты и усваиваемая расте-

ниями при внесении в почву. Одним из видов термических фосфатов являются плавленные магниевые фосфаты, содержащие два удобрительных компонента: фосфор и магний. Для определения оптимальных параметров проведения технологического процесса плавления фосфорно-магниевых удобрений необходимо провести исследование их свойств в расплавленном состоянии. Использовались современные методы определения свойств жидких расплавов и шлаков.

Химический состав расплавов сырья представлен в табл.1. №1- 4 - плавленные магниевые фосфаты, № 5-7 – расплавы для определения других характеристик

Плотность характеризует количественное содержание массы вещества в единице объема. Определение плотности расплавов осуществляли пикнометрическим методом, наиболее простым и точным из существующих методов определения плотности [1], который основан на взвешивании затвердевшего вещества, заполнявшего в жидком состоянии измеренный объем.

Таблица 1

**Химический состав расплавов сырья, % (без учета содержания бадделита и прочих)**

Расплав	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	MgO	CaO	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O
№ 1	19,63	11,15	34,91	24,75	2,69	3,27	0,78	1,12
№ 2	19,81	10,54	35,69	24,87	2,34	3,64	0,65	0,50
№ 3	20,29	10,20	36,35	23,50	2,59	3,68	0,78	0,49
№ 4	20,33	11,15	35,74	24,72	2,54	4,79	0,69	1,10
№ 5	9,85	24,85	26,86	26,34	4,65	3,27	0,67	1,77
№ 6	13,11	19,81	33,42	21,86	3,13	5,34	0,56	1,24
№7	17,15	15,39	34,13	23,43	2,95	4,73	0,52	1,06

Для проведения опытов использовали тигель из корунда. Общеизвестно, чем меньше разница температур тигля и исследуемого расплава, тем выше точность определения плотности. Корундовый тигель также нагревали до температуры расплава, была определена величина объемного расширения тигля. Определяли плотности расплавов получаемых плавленных магниевых фосфатов, которые будут использованы в качестве удобрений, при температуре 1723 К. Результаты измерений представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Значения плотности расплавов плавленных магниевых фосфатов при температуре 1723 К**

Расплав	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Плотность, г/см <sup>3</sup>	2,59	2,61	2,62	2,60

Величины краевого угла смачивания с графитом (шлифованная поверхность) и поверхностного натяжения расплавов определяли по методу капли, описанному в работе [2]. Из образцов шихт, в которых расплавы имели химические составы представленные в табл. 1, готовили гранулы диаметром 5 мм. В каждом опыте гранулу укладывали внутрь алундовой трубки и помещали в лабораторную герметичную печь в атмосфере аргона, которую нагревали до температу-

ры 1723 К над шлифованной графитовой поверхностью. Затем на фото образовавшейся капли определяли краевой угол смачивания  $\theta$ .

Поверхностное натяжение расплавов  $\sigma$  определяли по методу [3]. Полученные значения краевых углов смачивания и поверхностного натяжения расплавов представлены в табл. 3.

Таблица 3

**Зависимости краевого угла смачивания графита и поверхностного натяжения расплавов от содержания P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> при температуре 1723 К**

P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> (%)	9,85	13,11	17,15	20,33
$\theta$ , град	142	140	137	136
$\sigma$ , Дж/м <sup>2</sup>	0,39	0,37	0,35	0,31

При увеличении содержания P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> в шихте поверхностное натяжение расплавов уменьшается.

Полученные экспериментальные данные по температурам плавления, вязкости и электрической проводимости расплавов были опубликованы ранее в работе [4].

Таким образом, в результате проведенных исследований показано, что графит можно использовать в качестве футеровки ванны печи при получении расплава плавленных магниевых фосфатов из отходов фосфатного сырья и хвостов обогащения, содержащих фосфор и магний. Проведенные испытания на опытной печи мощ-

ностью 17 МВА с использованием охлаждения стенок и подины печи водой, что обеспечивает образование гарнисажной защиты футеровки, показали, что графитовая футеровка не разрушается [5], так как исключается взаимодействие расплава с высоким содержанием  $P_2O_5$  с углеродом.

Экспериментальные данные обрабатывались с использованием методов математической статистики с использованием гребневой регрессии.

Метод гребневой регрессии известен под названием "Ridge Regression Analysis" [6]. Математические основы этого метода базируются на теории построения устойчивых приближенных решений некорректно поставленных задач [7].

Гребневая регрессия является линейным оценителем. Поскольку метод наименьших квадратов представляет собой аналог классической линейной задачи, то в сочетании гребневая регрессия имеет еще одну область приложения.

Теоретические основы метода подробно описаны [6]. Поэтому основное внимание уделено методическим вопросам компьютерного моделирования, связанным с его применением.

Аналогия между системой алгебраических уравнений

$$\tilde{Y} = XK + \varepsilon, \quad (1)$$

к которой преобразованы исходные дифференциальные уравнения

$$\frac{dC}{dt} = f(C, K) \quad (2)$$

$$C(0) = C_0 \quad (3)$$

и классической множественной линейной регрессией позволяют утверждать, что оценки интегральной гребневой регрессии

$$\hat{K}(\alpha) = (X^T Q_3^{-1} X + \alpha I)^{-1} X^T Q_3^{-1} Y \quad (4)$$

обладают свойствами, которые характерны для ее классического варианта (следует отметить, матрица  $X^T Q_3^{-1} X$  при вычислениях нормирована и имеет вид корреляционной матрицы). Существенным для гребневой регрессии является теорема, утверждающая, что существует такое значение параметра  $\alpha = \alpha^* > 0$ , при котором математическое ожидание ошибки в определении вектора  $K$  меньше, чем при любых других значениях  $\alpha$ , т.е.

$$M \left[ (\hat{K}(\alpha^*) - K)^T (\hat{K}(\alpha^*) - K) \right] < M \left[ (\hat{K}(\alpha) - K)^T (\hat{K}(\alpha) - K) \right] \quad (5)$$

Доказательство теоремы описано в работе [6]. Для нахождения  $\alpha^*$  предлагается итерационная процедура в окрестности фиксированной точки [8]. Эта итерационная процедура громоздка и неудобна из-за неустойчивости особенно при большом числе параметров. Поэтому наиболее простым способом определения  $\alpha^*$  может служить гребенчатая регрессия, представляющая собой род оценок  $\hat{K}(\alpha)$  и соответствующих значений  $F(\hat{K}(\alpha))$

при различных значениях  $\alpha$ . Эти зависимости представляют определенный интерес, как группа параметров  $K_j$ , при  $j=1, 2, \dots, l$ , первоначально плохо обусловленной (или даже вырожденной при  $\alpha=0$ ) модели сильно изменяется по абсолютной величине с изменением  $\alpha$  в области  $0 \leq \alpha < \alpha^*$ , а другая группа параметров  $K_j$ ,  $j=l+1, l+2, \dots, p$  малочувствительна к изменению  $\alpha$ .

В указанной области значений  $\alpha$  целевая функция  $\hat{K}(\bar{K}(\alpha))$  практически не изменяется, это область неединственности решения обратной

задачи. При приближении  $K\alpha \approx \alpha^*$  на кривой  $K(\alpha)$  наступает перелом, дальнейшее увеличение  $\alpha$  приводит к резкому росту  $K(\alpha)$ , так как при этом малые изменения значимых параметров модели при  $j=l+1, l+2, \dots, p$  приводят к значительному рассогласованию модели и эксперимента.

Оценки  $K(\alpha)$ , найденные вблизи точки перелома на кривой, являются наилучшими и устойчивыми. Если исходная модель имела некорректные маршруты, то оценки параметров при

$\alpha \approx \alpha^*$  концентрируются в окрестности нулевых значений, остальные параметры принимают свои фиксированные значения.

Сравнивая разновидности неявного метода оценивания [9], описанная гребневая регрессия дает также эффективный результат. Учитывая, что в работе [9] не сообщаются истинные значения параметров и не указаны характеристики доверительной области оценок, для полного сравнения их можно определить из анализа свойств шкалированной матрицы чувствительности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линчевский Б.В. Техника металлургического эксперимента.- М.: Металлургия, 1979.- 256 с.
2. Попель С.И., Есин О.А. Поверхностные явления в пирометаллургии // Труды УПИ, Свердловск, 1964.- с.47-60.
3. Филиппов С.И., Арсентьев П.П., Яковлев В.В. Физико-химические методы исследования металлургических процессов.- М.: Металлургия, 1968.- 590 с.
4. Трушников В.Е. Применение математического моделирования для прогнозирования вязкости и электрической проводимости расплавов фосфорно-магниевого удобрения // Горный информационно-аналитический бюллетень, № 1, 2010.- с. 65- 74.
5. Трушников В.Е. Экспериментальные исследования технологических свойств термических фосфатов из отходов мелочи фосфоритов и хвостов обогащения в условиях опытного производства // Горный информационно-аналитический бюллетень, № 12, 2009.- с.91- 101.
6. Hoere A.E., Kennard R.W. Ridge-Regression: biased estimation for nonorthogonal problems // Technometrics. – 1970. – V.12. – P.55-67.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1974. – 223 с.
8. Hemmerle W.J. An explicit solution for generalized riddle regression // Technometrics. – 1975. – V.17. – P.300-314.
9. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров.- М.: Финансы и статистика, 1979.- 349 с.

### Коротко об авторе

Трушников В.Е. – кандидат технических наук, доцент, Ульяновский государственный технический университет, tvye@yandex.ru

