

УДК 622.831.3

А.Н. Казаков, Ш.Р. Мухитдинов

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКИ

Предложена программная реализация решение задачи прогнозирования глубин проявления динамических форм горного давления и радиуса зоны разрушения вокруг выработок при горных ударах на базе применения математической модели распределения напряжения вокруг горизонтальных выработок, основанной на фундаментальных решениях расчета конструкций на упругом основании.

Ключевые слова: удароопасность месторождения, распределение напряжения вокруг горизонтальных выработок.

Семинар № 4

Проблема повышения безопасности и эффективности освоения удароопасных рудных месторождений подземными способами, является одним из важных вопросов. В условиях глубоких горизонтов, высокой тектонической напряженности массива пород и сложности его геологической структуры, проявление горного давления в динамической форме приводит к таким опасным последствиям как горные и горно-тектонические удары.

На подземных рудниках Узбекистана проблема удароопасности существует почти на всех золотодобывающих рудниках. В связи с этим, с увеличением глубины горных работ проблема предотвращения горных и горно-тектонических ударов приобретает особую актуальность.

Обычно при проектировании рудников следует уточнять степень удароопасности пород и определение глубин, начиная с которых породы становятся удароопасными.

Глубина, начиная с которой породы становятся удароопасными, различна для разных типов пород и ме-

сторождений, и определяется уровнем концентрации напряжений вокруг горных выработок. Поэтому всеми доступными методами (аналитическими, лабораторными и особенно путем натуральных измерений) следует определять величины напряжений в окрестности выработок. Ориентировочно оценочным критерием опасной по горным ударам глубине, на стадии проектирования, может служить отношение $\gamma H / \sigma_{сж}$ – когда оно приближается к единице, породы переходят в предельное напряженное состояние и могут стать удароопасными. В последнее время широкое применение при оценке удароопасности месторождения нашли аналитические методы.

Вопросам прогнозирования глубин проявления динамических форм горного давления и радиуса зоны разрушения вокруг выработок при горных ударах теоретическими методами посвящено много работ. В частности в работе [1] приведены приближенные решения задачи теории упругости о напряженном состоянии пород вокруг выработок. Условия возникно-

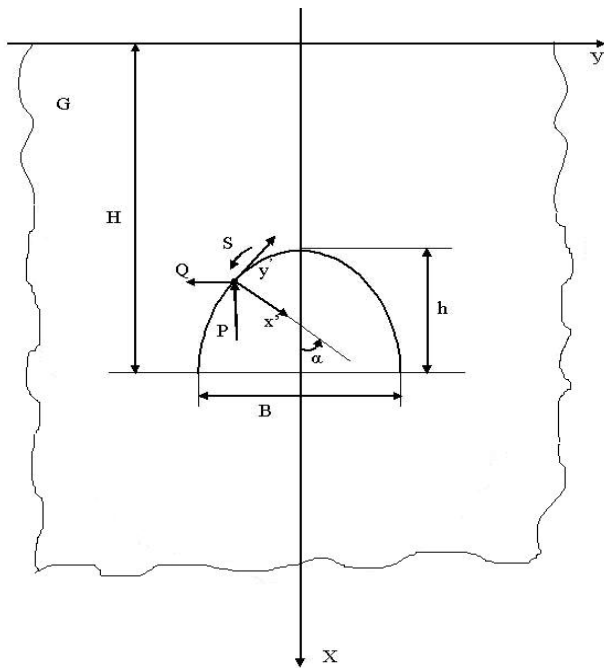


Рис. 1. Расчётная схема задачи

вения горного удара в работе определяются по критерию Кулона-Мора. Находится глубина расположения выработки, при которой начинаются динамические проявления горного давления.

Нами предлагается программная реализация решения этой задачи на базе применения математической модели распределения напряжения вокруг горизонтальных выработок, основанной на фундаментальных решениях расчета конструкций на упругом основании.

Рассмотрим тяжелую полуплоскость G с вырезом, как показано на рис.1. Напряжение в каждой точке области G будем определять путем суперпозиции решений для тяжелой полуплоскости без выреза и невесомой полуплоскости, нагруженной по контуру выработки фиктивными усилиями $P(S)$ и $Q(S)$, распределенными так, чтобы обеспечить выполнение исходных граничных условий на кон-

туре выработки. При этом имеем решение:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x; \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_y^0 + \sigma_y; \\ \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (1)$$

где S – координата вдоль контура выреза $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – компоненты напряжений для тяжелой полуплоскости без выреза; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжений невесомой полуплоскости, нагруженной по контуру выреза усилиями $P(S)$ и $Q(S)$.

Решение первой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= -\gamma x g; \\ \sigma_y^0 &= -\xi \gamma x g; \quad \tau_{xy}^0 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\xi = \frac{\nu}{1-\nu}$ – коэффициент бокового распора, определяемый коэффициентом Пуассона (ν).

Решение второй задачи будем искать, задавшись следующим распределением фиктивных усилий на контуре выреза:

$$\begin{aligned} P(S) &= a_0 + a_1 S + a_2 S^2 \quad (3) \\ Q(S) &= b_0 + b_1 S + b_2 S^2, \end{aligned}$$

где $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ – неизвестные коэффициенты, значения которых могут быть установлены из граничных условий на контуре выработки.

Напряжения в точке (x, y) невесомой полуплоскости могут быть определены как интегралы по контуру выработки:

$$\sigma_x(x, y) = \int_L \left[P(S) \delta_{xp}(S, x, y) + Q(S) \delta_{xq}(S, x, y) \right] ds$$

$$\sigma_y(x, y) = \int_L \left[P(S) \delta_{yp}(S, x, y) + Q(S) \delta_{yq}(S, x, y) \right] ds$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \int_L \left[P(S) \delta_{\tau p}(S, x, y) + Q(S) \delta_{\tau q}(S, x, y) \right] ds$$

где L – контур выработки;
 $\delta_{xp}, \delta_{xq}, \delta_{yp}, \delta_{yq}, \delta_{xp}, \delta_{yp}, \delta_{xq}, \delta_{yq}$ – фундаментальные решения для невесомой полуплоскости, определяющие соответствующие напряжения в точке (x, y) полуплоскости от действия единичных сил (по вертикали – P и по горизонтали – Q) в точке (S) контура выработки. Для аналитического представления этих функций будем использовать выражения, приведенные в [2].

Определим граничные условия на контуре выработки. Для точек на контуре выработки (рис. 1) формулы преобразования от системы координат (x, y) к местной системе координат (x', y') имеют вид:

$$\sigma_{x'} = \bar{\sigma}_x \cdot \cos^2 \alpha + \bar{\sigma}_y \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \bar{\tau}_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sigma_{y'} = \bar{\sigma}_x \cdot \sin^2 \alpha + \bar{\sigma}_y \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot \bar{\tau}_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sigma_{x'y'} = (-\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \bar{\tau}_{xy} \cdot (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

где α – угол между осями \mathbf{x}' и \mathbf{y}' , отсчитываемый против часовой стрелки.

Рассмотрим два случая граничных условий:

а) Свободный контур: при этом

$$\sigma_{x'} = \tau_{x'y'} = 0$$

б) Контур выработки, воспринимающий равномерное давление R от крепи:

$$\tau_{x'y'} = 0, \sigma_{x'} = -R$$

Граничные условия (7) заменим одним интегральным условием, когда сумма квадратов отклонений вдоль всего контура минимальна, т.е.:

$$\int_L \left[\tau_{x'y'}^2 + (\sigma_{x'} + R)^2 \right] ds = \min$$

По условию минимума в (8) и с учетом зависимостей (1) - (5) получаем систему разрешающих уравнений для определения a_0, a_1, \dots, b_2 ;

$$\int_L \left[\tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial a_0} + (\sigma_{x'} + R) \cdot \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial a_0} \right] ds = 0,$$

$$\int_L \left[\tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial a_1} + (\sigma_{x'} + R) \cdot \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial a_1} \right] ds = 0,$$

$$\dots \dots \dots (9)$$

$$\int_L \left[\tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial b_2} + (\sigma_{x'} + R) \cdot \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial b_2} \right] ds = 0.$$

Условия для свободного контура (6) по лучим из (9) положив: R=0.

$$\int_L \left(\tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial a_0} + \sigma_{x'} \cdot \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial a_0} \right) ds = 0,$$

$$\int_L \left(\tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial a_1} + \sigma_{x'} \cdot \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial a_1} \right) ds = 0, (10)$$

$$\int_L \left(\tau_{x'y'} \cdot \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial b_2} + \sigma_{x'} \cdot \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial b_2} \right) ds = 0.$$

Для решения системы уравнений (9, 10), а также для манипулирования значениями напряжений типа (4) разработана специальная компьютерная программа. Иллюстрации расчётов для двух типов очертаний крепи по разработанной программе проведена для следующих условий (табл. 1).

Таблица 1

Параметры арочной крепи	Циркулярная крепь	Шатровая крепь
Ширина выработки по почве (B), м.	3,75	4,45
Высота выработки (h), м	3,00	2,91
Радиус верхняка (r), м.	2,73	2,64
Радиус стойки, м.	2,10	---
Длина стойки, м.	2,45	2,45

Соппротивление арочной крепи $N_s = 220$ КН,

Характеристика массива горных пород: объемная масса $\gamma = 2,6$ т/м³; плотность $\gamma = 2,6$ т/м³; глубина расположения выработки $H = 435$ м; система кососекущих трещин с углом падения 45° .

Для оценки максимума R имеем (при плотности крепления 2) для условий

$$R = 2 \cdot N_s \cdot \frac{B}{2} = 4 \cdot \frac{N_s}{B} = \frac{880}{B}, \text{ либо}$$

Тип крепи	R, кг/см ²
Циркулярная	234,67
Шатровая	197,75

Для практического решения задачи определения компонент напряжений в невесомой полуплоскости, нагруженной по контуру выреза усилиями, имеющими вид параметрической функции от координаты контура вдоль его дуги, путем решения системы уравнений, получающейся при дифференцировании определенного вида многочленов, конкретное представление которых зависит от формы контура выреза, и фундаментальных решений для невесомой полуплоскости, имеющих в свою очередь согласно [1,2] вид дробно-рациональных функций, наиболее подходящим является система аналитических вычислений Maple 7 разработки канадского университета Waterloo [3].

Интуитивно ясный и простой язык Maple 7 позволяет достаточно просто, практически на языке аналитических выражений математической модели задачи, программировать решение задач. Прodelывая в автоматическом режиме все необходимые преобразования математических выражений, описывающих поэтапное представление имеющейся математической модели, начиная от параметрического задания функции, описывающей контур выработки, задания распределения усилий в каждой точке контура в виде многочлена второй степени, функций компонент напряжения в каждой точке невесомой полуплоскости в виде интеграла по контуру выработки, система Maple 7 позволяет получить аналитическое представление получающейся в конечном счете системы уравнений для определения неизвестных коэффициентов многочленов, в виде которых представлены распределения фиктивных усилий на контуре выработки.

Решение полученной системы уравнений программируется также просто в виде вызова команды fsolve системы Maple 7, предназначенной для численного решения уравнений общего вида или же системы уравнений. Единственной проблемой является ограниченные вычислительные возможности имеющихся персональных компьютеров. Для решения подобных задач за приемлемое машинное время все же таки лучше подходят специализированные многопроцессорные компьютерные системы. Впрочем, это замечание относится ко всем системам, реализующим аналитическую и вычислительную математику. Менее острой является проблема нехватки вычислительных ресурсов для решения системы линейных уравнений, для чего предназначается команда linsolve, находящаяся в подключаемом пакете linalg. Эта команда позволяет находить решения уравнений значи-

тельно быстрее и точнее по сравнению с командой `fsolve`.

Представленный в приложении текст программы решения задачи определения компонент напряжений тяжелой полуплоскости с вырезом даже без всяких комментариев дает полное представление о программной реализации решения этой задачи на компьютере.

Технология работы в Maple 7 представляет собой интерактивный сеанс: пользователь вводит на рабочем листе команды и нажатием клавиши `<Enter>` передает их на выполнение исполняющей системе (ядру) Maple 7. Все вводимые команды и отображаемые результаты вычислений представляют собой содержимое рабочего листа – основного документа, который Maple 7 создает и с которым он работает. При завершении сеанса работы его можно сохранить на диске в файлах разных форматов, а при очередном сеансе открыть и снова выполнить все команды, содержащиеся в нем, или произвести его корректировку.

Рабочий лист состоит из области ввода и области вывода. В первом пользователь вводит команды Maple 7, которые передаются на выполнение ядру системы. В области вывода отображаются результаты выполнения команд и операторов языка Maple 7, а также двумерная и трехмерная графика, создаваемая графическими командами Maple 7, если задан режим вставки графики в рабочий лист, а не отображения ее в отдельном окне.

Содержимое областей ввода и вывода образует группу вычислений, или просто группу, которая на рабочем листе отмечается слева квадратной скобкой. Группа вычислений может содержать несколько областей ввода и, соответственно, вывода. Основное свойство группы заключается в том, что все ее операторы и команды выполняются за одно обращение к исполняю-

щей системе Maple 7, т.е. нажатие клавиши `<Enter>` приводит к вычислению всех ее операторов и команд.

Хотя программа на Maple 7 и является интуитивно ясной для понимания специалиста, имеющего базовые знания в высшей математике в рамках программы технического вуза, дадим все-таки несколько пояснений к тексту программы определения компонент напряженности для придания большей ясности в применяемых для решения задачи методах.

В первой части текста программы устанавливаются значения параметров выреза контура, глубины его расположения, плотности грунта, максимального значения давления от крепи, коэффициента Пуассона.

Далее приводятся определения функции контура выработки в виде параметрически заданных функций для координат по оси x и y , в данном случае эллипс с полуосями согласно установленным размерам выреза, изменяемым параметром которых является угол между радиус-вектором от центра эллипса до точки на контуре и осью абсцисс. Для более упрощенного случая, по которому выполнен реальный расчет с использованием системы Maple 7, взят предельный случай эллипса – окружность, для которой дифференциал дуги контура определяется простым перемножением радиус-вектора на дифференциал дуги контура. Другие зависимости, используемые ниже в программе в этом случае также сильно упрощаются.

Выражение для SL представляет собой определенный интеграл (функция `int` Maple 7) с пределами интегрирования от левой нижней границы верхнего полуэллипса, являющимся математическим выражением контура выработки, и точкой S контура как координата точки на контуре. В этом выражении присутствует дифференциал дуги по контуру выработки, в представлении

которого в Maple 7 применяется функция дифференцирования diff.

В тексте программы расчета составляющих напряжений в комментариях приведены команды Maple 7 для расчета напряжений для общего случая вида контура выработки, и выполняемые команды для случая контура выработки в виде полукружности. Также выделены команды расчета для общего случая задания распределения фиктивных усилий на контуре выработки в виде квадратичных функций общего вида и для частного случая фиктивных усилий в виде специального вида квадратичной функции, симметричной относительно вертикальной оси выреза и принимающей нулевое значение на концах выреза, - для вертикальной составляющей усилий и дополнительной по отношению к ней функции для горизонтальной составляющей усилий, выбираемой таким образом, чтобы их векторная сумма была направлена по нормали к кривой контура выреза.

Приведенная в комментариях процедура alfa устанавливает способ преобразования системы координат (x, y) к местной системе координат (x', y') , ось x' которой расположена по нормали к контуру выработки в фиксированной его точке, заключающийся в определении угла α , измеряемого против часовой стрелки между направлением оси абсцисс x и направлением нормали к контуру выработки в какой-либо фиксированной точке.

Выражение для переменной $r1$ представляет собой расстояние от точки на контуре до произвольной точки в пространстве на полуплоскости вокруг контура с единственным ограничением на координату точки полуплоскости $x \geq 0$. В выражении для $r1$ используется функция Maple 7 simplify(), осуществляющая упрощение математического представления выражения, указанного в качестве параметра этой функции.

Далее в программе даются аналитические представления фундаментальных решений для невесомой полуплоскости, определяющие соответствующие напряжения в точке (x, y) полуплоскости от действия единичных сил (по вертикали - P и по горизонтали - Q) в точке S контура. Это соответственно выражения для переменных Maple 7 del_xP (δ_{xp}), del_xQ (δ_{xq}), del_yP (δ_{yp}), del_yQ (δ_{yq}), del_tP (δ_{tp}), del_tQ (δ_{tq}). Для целей упрощения дальнейших преобразований здесь и далее применяются алгебраические представления некоторых выражений, включающих тригонометрические функции и радикалы, получаемые путем их разложения в многомерный ряд Тейлора с помощью команды mtaylor системы Maple 7.

Следующим шагом программа формирует аналитические выражения для $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ путем интегрирования по контуру выработки выражения, составленного из суммы произведений соответственно фиктивных вертикальных и горизонтальных усилий в определенной точке контура на значения фундаментальных решений для напряжения от вертикальных и горизонтальных усилий с последующим преобразованием их в компоненты напряжений в местной системе координат.

Далее приведены уравнения, определяющие необходимые условия минимизации интегрального условия по сумме квадратов отклонений от нуля соответствующих напряжений в местной системе координат. Путем приведения в них подобных членов относительно коэффициентов квадратичных функций распределения фиктивных усилий на контуре выреза с помощью команды collect системы Maple 7 получается система линейных уравнений из 6 уравнений по общему числу искомых коэффициентов квадратичных функций. Решение системы линейных уравнений выполняется вышеуказанной командой linsolve.

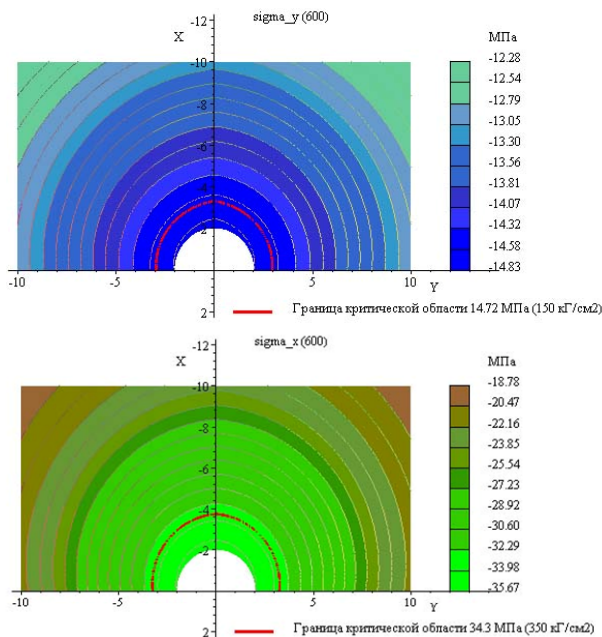


Рис. 2. Распределение вертикальной составляющей напряжений вокруг выработки

В заключении программа определяет аналитические представления компонент напряжений в тяжелой полуплоскости с вырезом в виде двумерных функций в цилиндрической системе координат (t, r, z – соответственно полярный угол, полярный радиус точки в области полуплоскости вокруг выреза и значение соответствующей функции)

путем подстановки значений найденных выражений для коэффициентов квадратичных функций распределения фиктивных усилий в выражения для этих напряжений.

Для наглядного представления полученных решений с помощью соответствующих команд подключаемого пакета `plots` (команды `cylinderplot`, `spacecurve`, `textplot3d`, `display`) выводятся трехмерные графические представления аналитических выражений для найденных решений, а также вспомогательных функций. Для удобства пользователя в эти графические представления включена цилиндрическая координатная сетка, формируемая с помощью разработанной процедуры `coord_cyl` (рис. 2).

Как видно из полученных решений, приведенных на рис. 2, граница критической области проявления горного давления в динамической форме при глубине $H=600$ м составляет соответственно для вертикальной составляющей напряжения 35 МПа, для горизонтальной составляющей 15 МПа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айтматов И.Т., Бекназаров Т.С. и др. Прогнозирование глубины начала проявления динамических форм разрушения и радиус зоны разрушения вокруг выработки при горном ударе. В кн. Горные удары, методы оценки и контроль удароопасности массива горных пород. Фрунзе, «Илим», 1979.
2. Горбунов-Пасадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М., Стройиздат, 1984. 679 с.
3. Марп 7. Матросов А.В. Решение задач высшей математики и механики. С.Пб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.: ил. **ГИАБ**

Коротко об авторах

Казаков А.Н. – аспирант,
 Мухитдинов Ш.Р. – кандидат технических наук,
 кафедра «Маркшейдерское дело и геодезия», ТашГТУ.