УДК 621.396.945

***Н.Е. Цапенко***

# *ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ*

*Выведены новые формулы приближенного представления компонент плоской электромагнитной волны в неоднородной среде, учитывающие относительную скорость изменения волнового сопротивления. Даны выражения для коэффициентов отражения и прохождения и условия полной прозрачности и полной непрозрачности диэлектрического слоя.*

*Ключевые слова: неоднородная среда, фазовый интеграл, точки поворота, волновое сопротивление, коэффициенты отражения и прохождения, электродинамика.*

Задачу о распространении плоской волны в неоднородной среде можно отнести к группе традиционных электродинамических задач. Весьма часто к ней сводятся более общие проблемы. В той или иной степени она затрагивается практически во всех соответствующих учебниках и монографиях (см., например, [1], [2]).

Хорошо разработаны два основных способа построения решения: в виде асимптотических разложении и в виде итерационных рядов. Во многих случаях в основном для высокочастотных полей в этих разложениях удовлетворительные результаты дают уже первые члены приближения, которые представляют собой так называемые ВКБ-формулы или какие-либо их модификации.

В настоящей работе, отклоняясь от общепринятых методов, для составляющих поля выводятся приближенные выражения, уточняющие ВКБ-решения с помощью поправок к фазовому интегралу, которые учитывают первый порядок относительной скорости изменения волнового сопротивления неоднородной среды.

**Вывод приближенных формул**

Рассмотрим систему уравнений для одной из возможных монохроматических плоских волн, распространяющихся в среде с параметрами, меняющимися вдоль некоторого фиксированного направления, с которым отождествим ось $x$ прямоугольной системы координат.

$$\frac{dH_y}{dx} = i\omega\varepsilon_a(x)E_z, \quad \frac{dE_z}{dx} = i\omega\mu_a(x)H_y. \quad (1)$$

где $\omega$ – круговая частота колебании, $\varepsilon_a$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, $\mu_a$ – абсолютная магнитная проницаемость среды.

Вводя величины

$$\xi = \int_{x_0}^{x} k(x)dx = \omega\int_{x_0}^{x} \sqrt{\varepsilon_a(x)\mu_a(x)}dx,$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a(x)}{\varepsilon_a(x)}},$$

называемые, соответственно, фазовым интегралом и волновым сопротивлением, перепишем систему (1) в виде

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{i}{W}E, \ \frac{dE}{d\xi} = iWH. \tag{2}$$

Определим преобразования

$$Z = \frac{E}{H}, \ P = EH, \quad E = \sqrt{PZ}, \ H = \sqrt{\frac{P}{Z}}, \tag{3}$$

и заменим систему (2) нелинейной системой, связывающей функции $Z$ и $P$:

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\xi} = i\left(\frac{W}{Z} - \frac{Z}{W}\right), \ \frac{1}{P}\frac{dP}{d\xi} = i\left(\frac{W}{Z} + \frac{Z}{W}\right),$$

или $$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\xi} = 2ish\left(\ln\frac{W}{Z}\right), \ \frac{1}{P}\frac{dP}{d\xi} = 2ich\left(\ln\frac{W}{Z}\right). \tag{4}$$

Задавая начальные условия

$$Z(x_0) = W(x_0) = W_0, \ P(x) = 1$$

и полагая, что неизвестная функция $Z$ близка по своим значениям к волновому сопротивлению $W$ (по крайней мере в окрестности точки $x = x_0$), от (4) переходим к приближенной системе

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\xi} = 2i\ln\frac{W}{Z}, \ \frac{1}{P}\frac{dP}{d\xi} = 2i.$$

Откуда

$$Z = We^{-\varsigma}, \ P = e^{2i\xi}, \tag{5}$$

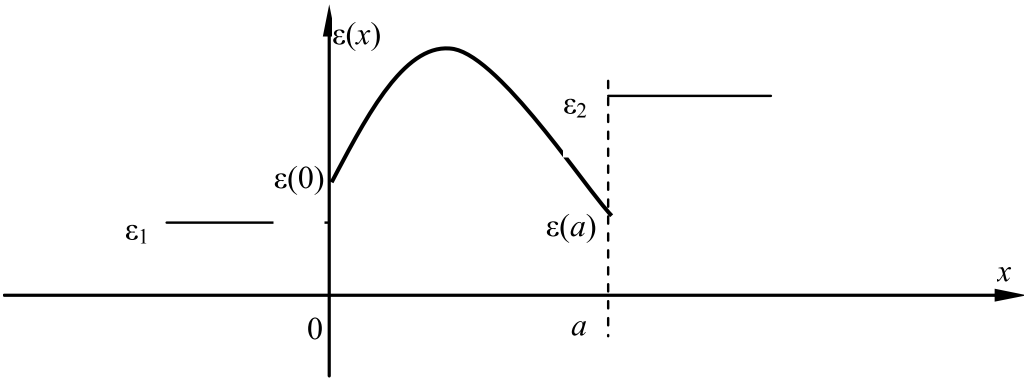
где $$\varsigma = e^{-2i\xi}\int_0^{\xi}\frac{1}{W}\frac{dW}{d\xi}e^{2i\xi}d\xi. \tag{6}$$

Внося эти выражения в (3), приходим к представлению компонент в виде

$$E = \sqrt{Z}e^{i\xi}, \ H = \frac{1}{\sqrt{Z}}e^{i\xi}. \tag{7}$$

Другое решение системы (2), линейно независимое с данным, получается заменой в нем $k$ на $-k$ и $H$ и $-H$.

Видим, что полученные представления составляющих плоской волны отличаются от обычного ВКБ-приближения наличием множителя, учитывающего логарифмическую производную волнового сопротивления. Если среда обладает настолько слабой неоднородностью, что допустимо пренебрежение скоростью изменения ее параметров, то этот множитель обращается в единицу. Важно также отметить, что решение (7) остается непрерывным в так называемых точках поворота (в точках обращения в нуль функции $k(x)$), что существенно




расширяет возможности его применения по сравнению с ВКБ-решением, которое разрушается в этих точках.

**Отражение от неоднородного слоя.** Используя полученные выше формулы, проанализируем волновой процесс, протекающий в неоднородном диэлектрическом слое конечной толщины $a$, на который слева падает плоская электромагнитная волна.

Примем следующие параметры среды: $\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon(x)$, $\mu_a = \mu_0 = const$, где $\varepsilon_0$, $\mu_0$ – вакуумные постоянные. Возможный вид зависимости $\varepsilon(x)$ представлен на рисунке.

Выпишем составляющие плоской волны отдельно для всех трех областей.

В области $x < 0$

$$E = A\sqrt{W_-}e^{ik_-x} + B\sqrt{W_-}e^{ik_-x}, \ H = \frac{A}{\sqrt{W_-}}e^{ik_-x} - \frac{B}{\sqrt{W_-}}e^{ik_-x}.$$

В области $0 < x < a$

$$E = A_1\sqrt{Z}e^{i\xi} + A_2\sqrt{Z^*}e^{-i\xi}, \ H = \frac{A_1}{\sqrt{Z}}e^{i\xi} - \frac{A_2}{\sqrt{Z^*}}e^{-i\xi}.$$

В области $x > a$

$$E = C\sqrt{W_+}e^{-ik_+x}, \ H = -\frac{C}{\sqrt{W_+}}e^{-ik_+x}.$$

Здесь $A$, $B$, $A_1$, $A_2$, $C$ – произвольные постоянные.

Определим коэффициент отражения $R$ и коэффициент прохождения $T$ неоднородного слоя, соответственно, как отношения амплитуд отраженной и прошедшей волн электрического поля к амплитуде падающей волны, т.е.

$$R = \frac{A}{B}, \ T = \frac{C\sqrt{W_+}}{B\sqrt{W_-}}.$$

Для определения этих величин надо решить систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных, которая вытекает из условия непрерывности компонент в граничных точках $x = 0$ и $x = a$. Выполняя надлежащие алгебраические действия, найдем что

$$R = \frac{\Delta_R}{\Delta},\ T = t(1+R),\ \text{где}$$

$$\Delta = \left[\left(\sqrt{\frac{Z(0)}{W_-}} - \sqrt{\frac{W_-}{Z(0)}}\right)\left(\sqrt{\frac{Z^*(a)}{W_+}} - \sqrt{\frac{W_+}{Z^*(a)}}\right)e^{-is} - \left(\sqrt{\frac{Z^*(0)}{W_-}} - \sqrt{\frac{W_-}{Z^*(0)}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{Z(a)}{W_+}} - \sqrt{\frac{W_+}{Z(a)}}\right)e^{-is}\right]e^{-ik_+a},$$

$$\Delta_R = \left[\left(\sqrt{\frac{Z(0)}{W_-}} - \sqrt{\frac{W_-}{Z(0)}}\right)\times\left(\sqrt{\frac{Z^*(a)}{W_+}} - \sqrt{\frac{W_+}{Z^*(a)}}\right)e^{-is} - \left(\sqrt{\frac{Z^*(0)}{W_-}} - \sqrt{\frac{W_-}{Z^*(0)}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{Z(a)}{W_+}} - \sqrt{\frac{W_+}{Z(a)}}\right)e^{-is}\right]e^{-ik_+a},$$

$$t = \frac{\left(Z(a) + Z^*(a)e^{ik_+a}\right)}{\left(1 - \frac{Z^*(a)}{W_+}\right)\sqrt{Z(0)Z(a)}e^{-is} + \left(1 + \frac{Z^*(a)}{W_+}\right)\sqrt{Z^*(0)Z^*(a)}e^{-is}},$$

$$S = \int_0^a k(x)dx = \omega\varepsilon_0\mu_0\int_0^a \sqrt{\varepsilon(x)}dx.$$

Если в качестве начальной точки $x_0$ взять $x_0 = 0$, то выражения (5) и (6) дают

$$Z(0) = W(0),\ Z(a) = W(a)e^{\eta + i\theta},$$

где $\eta = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\xi}\cos 2(\xi - s)d\xi,\ \ \theta = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\xi}\sin 2(\xi - s)d\xi.$

Практический интерес представляет выяснение условий, когда неоднородный слой совсем не дает отражения, т. е. когда $R = 0$ и напротив, когда он является полностью непрозрачным, т. е. $T = 0$.

*Неотражающий* слой характеризуется дисперсионным уравнением $\Delta_R = 0$, которое эквивалентно системе из двух трансцендентных уравнений

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_-}{\varepsilon(0)}\frac{\varepsilon(a)}{\varepsilon_+}} = \frac{\cos\left(s + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(s - \frac{\theta}{2}\right)}e^{\eta},\qquad \sqrt{\frac{\varepsilon_-}{\varepsilon(0)}\frac{\varepsilon(a)}{\varepsilon_+}} = \frac{\sin\left(s - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(s + \frac{\theta}{2}\right)}e^{\eta}. \tag{8}$$

Так как левые части этих равенств положительные величины, то полный фазовый интеграл $S$ не должен равняться $\frac{\pi}{2}n$ ($n$ = 0, 1, 2 ...). Поэтому, естественно связать частоты и толщину неоднородного слоя условием

$$S = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\int_0^a \sqrt{\varepsilon(x)}dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+n\right). \tag{9}$$

Тогда из уравнений (8) находим

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_-}{\varepsilon(0)}} = tg\left(\frac{\pi}{4}-(-1)^n\frac{\theta}{2}\right),\ \sqrt{\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon(a)}} = e^{-\eta}. \tag{10}$$

*Непрозрачный* слой характеризуется дисперсионным уравнением $\Delta_R = -\Delta$, которое после несложных преобразований и сокращений приобретает вид

$$\cos\left(s-\frac{\theta}{2}\right)+i\sqrt{\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon(a)}}e^{\eta}\sin\left(s+\frac{\theta}{2}\right)=0.$$

Из него вытекают условия

$$s=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+n\right),\ \theta=-\frac{\pi}{2}+\pi(n+2m),$$

$$(n,\ m=0,\pm 1,\pm 2,\ ...). \tag{11}$$

Заметим, что свойство непрозрачности слоя не налагает никаких ограничений на величины скачков диэлектрической проницаемости на границах слоя.

Таким образом, получены две группы условий (9), (10) и (11), относящие неоднородный слой, соответственно, к одному из двух типов: неотражающему и непрозрачному. Важно подчеркнуть, что в обоих случаях величина полного фазового интеграла одна и та же, а именно $S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+n\right)$. Определяющим же фактором принадлежности слоя к тому или иному типу является значение аргумента комплекса Z(a). Это значение зависит от относительной скорости изменения диэлектрической проницаемости среды и поэтому может служить интегральным показателем степени ее неоднородности.

Следовательно, оставаясь в рамках приближения геометрической оптики, т. е. в рамках ВКБ-метода, никак нельзя различать слоистые структуры по их способности на определенных частотах пропускать электромагнитную энергию или напротив полностью ее отражать. Априорная же информация об этих свойствах весьма важна при решении многих прикладных задач электродинамики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973.

2. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. – Т. 1, 2. – М.: Мир, 1978.

3. *Цапенко Н. Е.* Новые формулы приближенного решения одномерного волнового уравнения. Дифференциальные уравнения. – Т. 25. – 1989. – № 11.

4. *Tsapenko N. E.* Plane electromagnetic wave in heterogeneous medium under approximation regarding relative rate of change of wave resistance. Laser and Particle Beams, 1993. – Vol. 11. – № 4. ГИАБ

## Коротко об авторе

*Цапенко Н.Е.* —. кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, nt225@yandex. ru
Московский государственный горный университет,
Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru

## РУКОПИСИ, ДЕПОНИРОВАННЫЕ В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

***Зубков А.А*** канд. техн. наук; гл. технолог ООО «Экомет Плюс»,
E-mail: trbusiness7@mail.ru

ОБОГАЩЕНИЯ МЕДНЫХ ОКИСЛЕННЫХ РУД (760/06-10 от 23.03.10 г.) 6 с

*Технологические показатели обогащения окисленных медных руд, ввиду отсутствия высокоэффективных, экономически выгодных технологий их переработки, невысокие. Разработана технологическая схема и режим обогащения окисленных медных руд, содержащих хризоколлу и другие окисленные минералы меди. Разработанная технология с применением в качестве восстановителя раствора формальдегида позволяет получить высокие технологические показатели.*

*Ключевые слова: хризоколла, малахит, окисленные руды, восстановление, металлизированная поверхность, флотация.*

***Subkov A.A.*** ENRIMENT OF THE COPPER OXIDIZED ORES

*Technological indicators enrichment the oxidized copper ores in view of absense of highly effective, economic technologies of their processing, low. The technological enrichment and mode of enrichment and the oxidized copper ores contoining chrysocolla and other oxidized minerals of copper are developed. The technology of processing is offered with application as a reducer of a solution of formaldehyde that allows to receive high technological results is offered*

*Key words: chrysokolla, malachite, the oxidized ores, restoration, the metallized surface, flotation*