УДК 622:51.001.57

Г.М. Редькин

АНИЗОТРОПНЫЙ КРАЙГИНГ ОТРАБАТЫВАЕМЫХ БЛОКОВ

Сформулирована проблема крайгинга и дано ее решение в классе нестационарных анизотропных моделей. Приведены выражения для определения весов и погрешности дискретного анизотропного крайгинга. Выявлены условия целесообразности его применения.

Ключевые слова: месторождение, промышленные блоки, множитель Лагранжа, условие несмещенности.

Бедные участки месторождения с содержанием полезного компонента значительно ниже среднего по месторождению зачастую граничат с более богатой рудой и наоборот-богатые участки граничат с более бедной рудой. При отработке бедных блоков в добычу вовлекается также и богатая руда, их вмещающая, что повышает средние содержания блоков по сравнению с данными проб, отобранных внутри отрабатываемых объемов. По этой же причине средние содержания участков с богатыми оруденением будут ниже по сравнению с данными геологического опробования внутри отрабатываемых блоков.

Данный факт в практике эксплуатации месторождений ископаемых наблюдался многими учеными, в том числе и Д.Г. Крайгом [1], который первым установил, что оценки содержаний в блоках, определенные как средние арифметические данных опробования, в среднем систематически завышают фактические средние промышленных блоков и занижают фактические средние блоков, отнесенных к непромышленным. Это приводит к ущербу при их отработке.

Таким образом, возникла проблема крайгинга, которая была сформулирована и решена Ж. Матероном [1] в классе стационарных моделей. Крайгингом называется оценка среднего содержания в блоке на основе всех имеющихся данных опробования, включая граничную зону, которая минимизирует дисперсию разности истинного среднего значения и его оценки. Определение крайгинга в классе стационарных моделей не отражает анизотропной структуры изменчивости оцениваемого геологического показателя, то есть не учитывает различия в взаимовлиянии проб по разным направлениям, что снижает достоверность определения оценок средних в блоках.

Ниже сформулируем проблему крайгинга и ее решение в классе нестационарных анизотропных моделей, которое лишено отмеченного недостатка [2].

Пусть в блоке G и его граничной зоне отобраны N проб в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, которые характеризуются содержаниями $c_i = f(x_i)$. Обозначим крайгинг блока G через

$$c_K = \sum_{i=1}^{N} p_i f(x_i), \qquad (1)$$

веса которого удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 . \qquad (2)$$

Заметим, что крайгинг (1), (2) представляет средне взвешенное содержание компонента в поле *G*.

Согласно определению крайгинга, требуется найти такие веса p_i, чтобы оценка c_K (1) удовлетворяла условиям

$$D\left(c^* - c_K\right) = \min , \qquad (3)$$

$$Mc^* = Mc_K , \qquad (4)$$

где c^* — истинное среднее содержание в блоке *G*.

Назовем анизотропным крайгингом – крайгинг в классе нестационарных анизотропных моделей. Дисперсия (3) в классе нестационарных анизотропных моделей и условие несмещенности (4) примут вид

$$D\left(c^* - c_K\right) = D\left(c^*\right) - 2\sum_{i=1}^{M} p_i K\left(c^*, \quad x_i\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_i p_j K\left(h_{ij}, \quad \alpha_{ij}\right) = \min , \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 , \qquad (6)$$

где $K\left(c^*, \quad x_i\right)$ — ковариация содержаний c^* и c_i в точке x_i; $K\left(h_{ij}, \quad \alpha_{ij}\right)$ — значения корреляционной функции в точках x_i, x_j; $h_{ij} = \left|x_i - x_j\right|$.

Определяя условный минимум дисперсии (5) при условии (6) по методу неопределенных множителей Лагранжа, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} p_i K\left(h_{ij}, \quad \alpha_{ij}\right) + \lambda = K\left(c^*, \quad x_j\right), \\ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \quad j = 1,2,3...,N, \end{cases} \qquad (7)$$

решением которой является веса анизотропного крайгинга и множитель Лагранжа λ.

Можно показать, что дисперсия анизотропного крайгинга имеет вид

$$D\left(c^* - c_K\right) = D\left(c^*\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{N} p_i K\left(c^*, \quad x_i\right) - \lambda . \qquad (8)$$

Ввиду сложности нахождения величин $K\left(c^*, \quad x_i\right)$, веса крайгинга можно определить на основе точечного крайгинга и теоремы суперпозиции из теории крайгинга. Точечным крайгингом называют наилучшую в смысле критерия (6.22) и несмещенную оценку содержания пробы в точке x на основе всей имеющейся информации. Точечный крайгинг назовем точечным анизотрпным, если критерием оптимизации является дисперсия (6.24). Обозначим точечный анизотропный крайгинг в точке x через

$$c_K\left(x\right) = \sum_{i=1}^{N} p_i\left(x\right) f\left(x_i\right), \qquad (9)$$

где $p_i\left(x\right)$ — его веса, которые необходимо определять из системы (8) при замене в ней c^* на x.

Теорема суперпозиции позволяет выразить крайгинг блока через точечные крайгинги. Сформулируем ее в непрерывной форме. Пусть $c_K\left(x\right)$ — точечный крайгинг, отнесенный к блоку *dG* бесконечно малой величины с центром в точке x. Тогда крайгинг блока имеет вид

$$c_K = \frac{1}{|G|}\int_G c_K\left(x\right)dx .$$

Из теоремы суперпозиции и равенства (6.28) следует, что веса крайгинга блока *G* равны

$$p_i = \frac{1}{|G|}\int_G p_i(x)\,dx\,,\ \ i = 1,2,\ldots,N\,. \qquad (10)$$

Крайгинг называют неполным, если веса точечного крайгинга определяют из системы (7), составленной не по всем пробам, а по некоторому числу ближайших. Ж. Матероном установлено [1], что при составлении уравнений (7) достаточно использовать пробы ближайших двух ореолов, которые образуют почти непроницаемый экран. При этом неполный крайгинг почти не отличается от полного.

Рассмотрим вариант дискретного опробования оцениваемого блока G в точках регулярной сети. Согласно определению неполного крайгинга и равенству (10), дискретный неполный анизотропный крайгинг и его веса примут вид

$$c_K = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} p_i}\,,\ \ p_i = \sum_{l\in A_l} p_i(x_l)\,, \qquad (11)$$

где $p_i(x_l)$ — веса точечных (точек x_l) неполных анизотропных крайгингов, которые являются решениями систем вида (7), т.е.

$$\begin{cases} p_j(x_l)D(\alpha_{jl}) + \sum_{i\in A_l} p_i(x_l)\times \\ \sum_{i\in A_L} p_l(x_l) = 1,\ \ i,j\in A_l \subset \{1,2,3,\ldots,N\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \times K(h_{ij},\ \ \alpha_{ij}) + \lambda_l = K(h_{jl},\ \ \alpha_{jl}) \\ l = 1,2,\ldots,N \end{cases}, \qquad (12)$$

где A_l — множество номеров проб из двойного ореола пробы в точке x_l; $|A_l|$ — число проб в ореоле l-ой пробы.

Можно показать, что дисперсия дискретного неполного анизотропного крайгинга равна

$$D(c^* - c_K) = \sigma^2 \Big/ N - \sum_{l=1}^{N}\sum_{i\in A_l} p_i(x_l)\times$$

$$\times K(h_{il},\ \ \alpha_{il}) \Big/ N^2 - \sum_{l=1}^{N}\lambda_l / N^2 +$$

$$+2\sum_{l<p} K\left[c_K(x_l),\ \ c_K(x_p)\right], \qquad (13)$$

где $K\left[c_K(x_l),\ \ c_K(x_p)\right]$ — ковариации точечных крайгингов в точках x_l и x_p.

Определим дискретные неполные анизотропные крайгинги блоков горизонта 94 м Ковдорского месторождения. На основе совокупной характеристики изменчивости содержаний железа построена табл. 1. Ее данные являются коэффициентами систем линейных уравнений (12), решения которых есть веса точечных крайгингов.

Приведем расширенную матрицу коэффициентов систем линейных уравнений вида (12) для внутренней точки x_l блоков горизонта 94 м с учетом ее двойного ореола

Коэффициенты системы (14) взяты из табл. 1. Ее решение является весами точечного крайгинга:

$p_1(x_l) = 0{,}316$, $p_2(x_l) = 0{,}157$,

$p_3(x_l) = -0{,}174$, $p_4(x_l) = 0{,}201$,

$p_5(x_l) = 0{,}316$, $p_6(x_l) = 0{,}157$,

$p_7(x_l) = -0{,}174$, $p_8(x_l) = 0{,}201$

и $\lambda(x_l) = -6{,}78$ — множитель Лагранжа. Аналогичные системы и веса точечных крайгингов получены для других точек оцениваемых блоков. Затем по формулам (11) определены веса и дискретные неполные анизотропные крайгинги блоков.

На рис. 1 приведены веса точечных анизотропных крайгингов для

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
104,82 & 52,89 & 41,91 & 50,98 & 46,89 & 51,48 & 42,86 & 50,88 & 1 & 63,28 \\
52,89 & 83,26 & 52,89 & 63,28 & 51,48 & 42,86 & 29,76 & 32,63 & 1 & 50,88 \\
41,91 & 52,89 & 67,67 & 50,88 & 42,86 & 29,76 & 26,95 & 29,27 & 1 & 32,63 \\
50,98 & 63,28 & 50,88 & 89,24 & 50,88 & 32,63 & 29,27 & 41,91 & 1 & 52,89 \\
46,89 & 51,48 & 48,86 & 50,88 & 104,82 & 52,89 & 41,91 & 50,98 & 1 & 63,28 \\
51,48 & 42,86 & 29,76 & 32,62 & 52,89 & 83,26 & 52,89 & 63,28 & 1 & 50,88 \\
42,86 & 29,76 & 26,95 & 29,27 & 41,91 & 52,89 & 67,67 & 50,88 & 1 & 32,63 \\
50,88 & 32,62 & 29,27 & 41,91 & 50,98 & 63,28 & 50,88 & 89,24 & 1 & 52,89 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right) \qquad (14)$$

Таблица 1

Коэффициенты систем линейных уравнений для определения весов точечных крайгингов участка Ковдорского месторождения

h	$K(h,\ \alpha)$							
	α, град							
	–40	**–13**	**5**	**23**	**50**	**77**	**95**	**113**
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	83,26	69,46	67,67	72,98	89,24	103,03	104,82	99,52
1	50,88	38,23	35,74	39,41	52,89	65,54	68,04	64,36
$\sqrt{2}$			32,63				63,28	
2	42,86	31,21	28,22	30,65	41,91	53,56	56,54	54,12
$\sqrt{5}$		29,76		29,27		50,98		51,48
$2\sqrt{2}$			26,95				46,89	
3	34,10	25,08	22,84	24,80	33,63	42,64	44,86	42,92

внутренней точки с учетом ее двойного ореола, а также веса для точек блоков № 5, № 11, конфигурации, содержания Fe и веса дискретных неполных анизотропных крайгингов этих блоков.

В табл. 2 содержатся определения дискретных анизотропных крайгингов 15 блоков горизонта 94 м. Обозначения в табл. 6.21 следующие: $n_б$ — количество данных опробования оцениваемого блока; $n_П$ — количество прилегающих к блоку проб; $\bar{c}_\delta$ — среднее арифметическое данных опробования блока; c_K — дискретный анизотропный крайгинг блока;

$$\Delta(\delta,\ K) = \left|\bar{c}_\delta - c_K\right|;$$

$$\Delta_{отн}(\delta,\ K) = \left(\left|\bar{c}_\delta - c_K\right| / c_K\right) \cdot 100\%.$$

Из анализа табл. 2 следует:

1. Крайгинги блоков, содержащих большое количество данных опробования, нецелесообразно определять ввиду малой разницы между средними арифметическими и крайгингами при значительной трудоемкости вычислительных операций.

2. Крайгинги блоков, имеющих небольшое количество данных опробования дают существенное уточнение по сравнению со средними арифметическими оценками.

1

0,316	0,157	−0,174
0,201		0,201
−0,174	0,157	0,316

2

21,1	34,4	24,4
34,0	49,0	27,5
36,2	30,5	32,6

0,684	0,201	0,349	1,127	0,443	0,330	0,481	
0,167	0,316	−0,142	0,157	0,320	−0,174	0,325	
0,338	−0,144	0,313	0,299	0,092	0,314	0,465	
1,174	0,201	0,330	2,068	0,330	0,201	1,174	
0,465	0,314	0,092	0,299	0,313	−0,144	0,338	
0,325	−0,174	0,320	0,157	−0,142	0,316	0,167	
0,481	0,330	0,443	1,127	0,349	0,201	0,684	

$C_к = 34,73$, $\bar{C}_б = 49,0$

3

	28,4	27,7
31,5	16,8	25,7
26,2	25,9	31,5
26,0	22,1	32,9
28,7	15,4	27,9
12,7	13,7	26,1

			0,920	0,443	0,367	0,554	
			−0,082	0,239	0,320	−0,138	0,325
		−0,090		0,399	0,092	0,324	0,465
	0,649	0,256	0,397	1,553	0,330	0,247	1,187
	0,167	0,316	−0,142	0,157	0,320	−0,174	0,325
	0,357	−0,120	0,328	0,210	−0,142	0,306	0,167
	0,921	0,201	0,330	1,391	0,330	0,201	0,825
	0,167	0,316	−0,142	0,157	0,320	−0,174	0,325
	0,325	−0,174	0,320	0,157	−0,142	0,316	0,167
	0,835	0,201	0,330	1,330	0,330	0,201	0,835
	0,167	0,316	−0,142	0,157	0,320	−0,174	0,325
	0,325	−0,174	0,320	0,157	−0,142	0,316	0,167
	1,131	0,201	0,330	1,699	0,330	0,201	0,878
	0,465	0,314	0,092	0,299	0,313	−0,144	0,338
	0,325	−0,174	0,320	0,157	−0,142	0,316	0,167
	0,481	0,330	0,443	1,127	0,349	0,201	0,684

$C_к = 23,95$, $\bar{C}_б = 24,78$

Рис. 1. Дискретный анизотропный крайгинг блоков горизонта 94 м Ковдорского месторождения:

1 — веса точечных анизотропных крайгингов для внутренней точки с учетом ее двойного ореола; *2* — содержания Fe и веса дискретных неполных крайгингов блока №5; *3* — содержания Fe и веса дискретных неполных крайгингов блока № 11

Таблица 2

Результаты определения анизотропных крайгингов блоков участка Ковдорского месторождения

№ блоков	n_δ	$n_П$	$\bar{c}_\delta$	c_K	$\Delta(\delta,\ K)$	$\Delta_{отн}(\delta,\ K)$
1	1	5	15,4	23,86	8,46	35,46
2	1	5	15,6	21,06	5,46	25,92
3	1	5	45,0	40,79	4,21	10,32
4	1	5	47,3	42,97	4,33	10,08
5	1	8	49,0	34,73	14,27	41,09
6	1	8	27,5	36,36	8,86	24,37
7	1	8	25,4	26,88	1,48	5,51
8	8	9	26,69	20,91	0,78	3,72
9	3	8	21,6	25,84	4,24	16,41
10	8	8	42,92	41,63	1,29	3,11
11	8	9	24,78	23,95	0,82	3,42
12	6	7	18,95	21,66	2,71	12,51
13	9	9	49,08	44,11	4,97	11,27
14	12	12	48,76	43,16	5,60	12,97
15	77	32	33,23	31,76	1,47	4,63

3. Крайгинги блоков нецелесообразно определять, если значения данных опробования в блоке и в прилегающих к блоку пробах отличаются незначительно.

Дискретный анизотропный крайгинг учитывает не только значения содержаний внутри блока, но и значения проб, прилегающих к блоку, геометрию оцениваемого блока, анизотропию изменчивости значений геологических показателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матерон Ж.* Основы прикладной геостатистики / Ж. Матерон. — М.: Мир, 1968. — 408 с.
2. *Редькин Г.М.* Нестационарное анизотропное математическое моделирование неоднородностей систем минерального сырья / Г.М. Редькин. — М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2007. — 500 с. ГИАБ

Коротко об авторе

Редькин Г.М. — кандидат технических наук, доцент, зам. заведующего кафедрой прикладной математики, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, E-mail: rector@intbel.ru