УДК 512.71

И.В. Степанян

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

Посвящена алгебраическим фракталам и их обобщениям на плоскости действительной, комплексной и двойной переменной.

Ключевые слова: фракталы, множество мандельброта, множество жюлиа, условия коши-римана.

Фракталы — геометрические объекты с дробной размерностью. Фрактал происходит от латинского прилагательного «fractus», и в переводе означает состоящий из фрагментов, а соответствующий латинский глагол «frangere» означает разбивать, то есть создавать неправильные фрагменты. Пионером в этой области познания был франко-американский математик, профессор Бенуа Б. Мандельброт. В середине 1960-х им разработана фрактальная геометрия, целью которой был анализ ломаных и нечетких форм [1, 2]. Мандельброт на основе теории фракталов в частности предсказал изменение цен на шерсть и определил, что фрактальная размерность береговой линии Англии составляет 1,25.

Существуют алгебраические и геометрические фракталы. Геометрические фракталы получают путем итеративных геометрических преобразований, примером могут служить такие известные фракталы как снежинка Коха и салфетка Серпинского. Особенный интерес у математиков вызывают алгебраические фракталы, которые строятся на основе гиперкомплексных систем.

Комплексные числа — расширение множества вещественных чисел. Комплексное число может быть представлено как сумма x + iy, где x и y — вещественные числа, i — мнимая единица $i^2 = -1$. Применение комплексных чисел позволяет удобно и компактно формулировать многие математические модели, применяемые в математической физике и в естественных науках — квантовой механике, электротехнике, гидродинамике, картографии, теории колебаний и многих других. В этом состоит одновременно мощь и загадка комплексных чисел.

Множества Мандельброта и Жюлиа были получены при изучении нелинейной функции комплексного процесса с обратной связью вида $z \Rightarrow z^2+c$ в рамках теории итераций рациональных отображений комплексной плоскости. Данное отображение было изучено в 1918—1919 гг в работах французских математиков Гастона Жюлиа и Пьера Фату. Позже Мандельброт построил первое изображение множества с применением компьютера, получившего впоследствии его имя.

Условия Коши — Римана (или условия д'Аламбера — Эйлера) — условия на вещественную $u = u(x,y)$ и мнимую $v = v(x,y)$ части функции комплексного переменного

$$w = f(z) = u + iv, \ z = x + iy$$

обеспечивающие бесконечную непрерывную дифференцируемость f(z) как функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана состоят в том, что для того чтобы функция $w = f(z)$, определенная в некоторой области D комплексной плоскости, была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ как функция комплексного переменного z, необходимо и достаточно, чтобы её вещественная и мнимая части u и v были дифференцируемы в точке (x_0,y_0) как функции вещественных переменных x и y и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись условия:

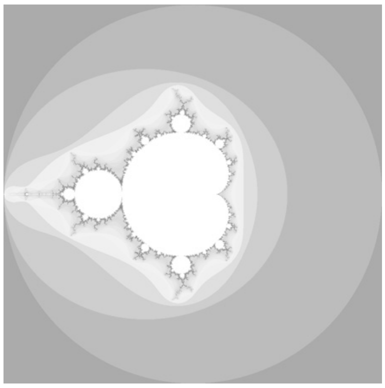
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Если условия Коши — Римана выполнены, то производная $f'(z)$ представима в форме:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Итак, множество Мандельброта — это фрактал, определенный как множество точек на комплексной плоскости, для которых итеративная последовательность $z(n+1)=z(n)^2 + c$ не уходит на бесконечность. Множество Мандельброта строится путем перебора по c (его мнимой Im(c) и действительной Re(c) части) при фиксированном z(0)=0. Множество Жюлиа, строится при фиксированном c путем перебора по z(0) (см. рис. 1). При этом каждому комплексному c соответствует свое множество Жюлиа.

Нарушение условия Коши — Римана на множествах Мандельброта и Жюлиа заключается в уходе от комплексной аналитичности. Идея была предложена Пэкхемом в [3] и исследована А. Топоренским (ГАИШ) в [4].



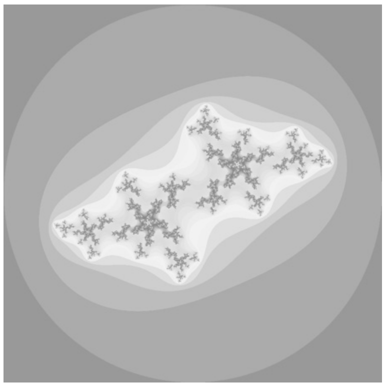


Рис. 1. Множество Мандельброта (слева) и множество Жюлиа при Re(c)=-0.6 Im(c)=0.6 (справа)

Потеря аналитичности позволяет получить класс фрактальных преобразований множеств Мандельброта и Жюлиа, связанный с введением комплексно сопряженных членов в итерационную процедуру построения фракталов. Путешествие по декартовой системе координат, образованной действительными весовыми коэффициентами дополнительно введенных слагаемых демонстрирует сильную нелинейность полученных фрактальных преобразований. Автором данной статьи были созданы изображения (рис. 2), соответствующие обучающие компьютерные программы и видео-ролики, а также интерактивные online фрактальные игры. Подробнее см. на сайте neurocomp.ru.

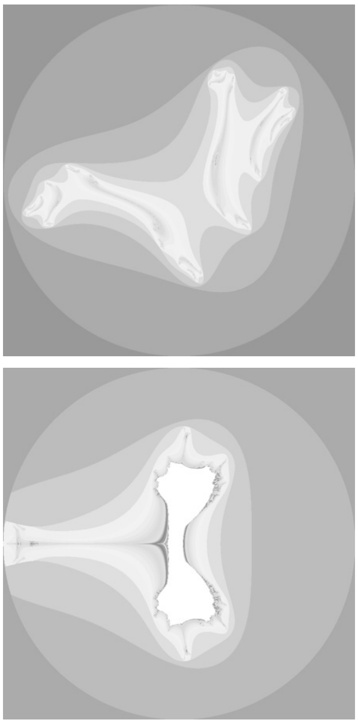


Рис. 2. Множество Мандельброта (слева) и множество Жюлиа при Re(c)=-0.6 Im(c)=0.6 (справа) с нарушением условия Коши — Римана введением в итеративную процедуру комплексно сопряженного слагаемого с весовым коэффициентом 0.6

В свою очередь двойные (паракомплексные, гиперболические, расщепляемые комплексные) числа — это числа вида $a + jb$, где a и b — вещественные числа и $j^2 = 1$. Двойные числа образуют двумерную ассоциативно-коммутативную алгебру над полем вещественных чисел. Таким образом, у множества комплексных чисел C есть «двойник» — гиперболические числа H2. Не углубляясь в теорию комплексного евклидова пространства и связанных с ним унитарных пространств [5], можно отметить что вместо евклидовой плоскости двойные числа задаются псевдоевклидовой плоскостью или двумерным пространством-временем. В работе [6] авторы отмечают, что коммутативность алгебр C и H2 во многом предопределяет разнообразие множества аналитических функций соответствующих переменных, а те, в свою очередь, жестко связаны с разнообразием группы конформных отображений.

Любое двойное число может быть представлено как сумма $\alpha x + \beta y$, где x и y — вещественные числа. В таком представлении сложение и умножение производится покоординатно. Таким образом, алгебра двойных чисел может быть разложена в прямую сумму двух полей вещественных чисел. В отличие от поля комплексных чисел, алгебра H2 содержит делители нуля, причем все они имеют вид $a=a \pm aj$. Если взять $\alpha = (1 + j) / 2$ и $\beta = (1 - j) / 2$, то $\alpha\beta = 0$, $\alpha^2 = \alpha$ и $\beta^2 = \beta$.

Исследуя фрактальные множества на плоскости двойных чисел, В.А. Панчелюга (Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино) продемонстрировал фрактальность аналогов множеств Мандельброта, получаемых в результате итераций квадратичного отображения на множес-

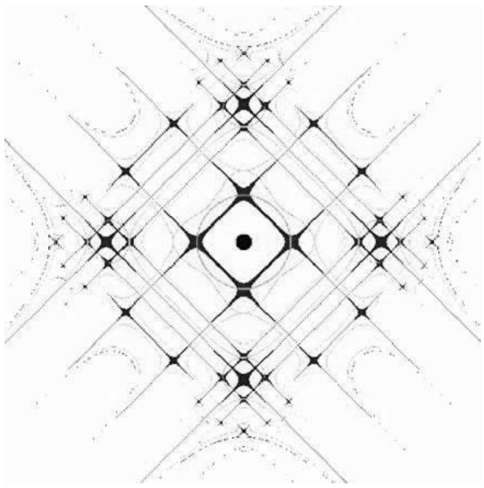


Рис. 3 Фрактал на H2

тве H2 и построил фрактал на плоскости двойной переменной (рис. 3)

Фракталы находят всё большее применение в науке и технике. Часто они описывают реальный мир даже лучше, чем другие методы физики или математики. Например фракталы применяются в системах передачи информации, основанных на фрактальной маскировке, в телевидении, в методах сжатия изображений, на фондовых рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бенуа Б.* Мандельброт Фрактальная геометрия природы = The Fractal Geometry of Nature. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — С. 656. — ISBN 5-93972-108-7

2. *Бенуа Б.* Мандельброт, Ричард Л. Хадсон (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах = The Misbehavior of Markets. — М.: «Вильямс», 2006. — С. 400. — ISBN 0-465-04355-0

3. *B. Peckham,* Int. J. Bifurcation and Chaos 10, 391 (2000)

4. *A.V. Toporensky* Quasi-Mandelbrot sets for perturbed complex analytic maps: visual patterns. ArXiv:0807.1667v1 [cs.GR] 10 Jul 2008

5. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. — 4-е изд. — М.: Наука, 1976.

6. *Павлов Д.Г., Просандеева М.С., Панчелюга В.А.* О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. №1, (7), том 4, 2007, с. 93-97. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Степанян И.В. — кандидат технических наук, доцент кафедры Электротехники и информационных систем МГГУ, e-mail: skwwwks@gmail.com

SVIT GIS-2012

В Крыму завершил свою работу II Международный научно-практический семинар SVIT GIS-2012 «Использование геоинформационной системы K-MINE в разных сферах деятельности» (www.kai.com.ua).

Семинар объединил научных работников, экологов, горняков, геологов, маркшейдеров и других специалистов со всей Украины и отдаленных уголков России, Дагестана, Армении, Киргизстана. В этом году SVIT GIS собрал свыше 160 участников, представителей 71 предприятия. Мероприятие было организовано научно-производственным предприятием «КРИВБАСАКАДЕМИНВЕСТ» при поддержке Министерства экологии и природных ресурсов, Госкомиссии Украины по запасам полезных ископаемых, Национального научно-исследовательского института промышленной безопасности и охраны труда, «Геоинформ Украины», Союза маркшейдеров России, других организаций, а также ряда учебных заведений Украины и России.

Семинар проходил при информационной поддержке 39 информационных спонсоров, в том числе ГИС-Ассоциаций Украины и России, ряда изданий, таких как: «Рациональное освоение недр», «Техническая газета» и «Промышленная безопасность», «Горная промышленность», «Горно-металлургическая промышленность», «ИТМ. Информационные технологии для менеджмента», «Геопрофиль», «ГЕОПРОФИ», «Горнопромышленные ведомости», «Горный журнал Казахстана», «ГИАБ», «УГОЛЬ», «Точка Опоры», издательство «Горная книга», «Металлургическая и горнорудная промышленность», «Сети и Телекоммуникации», «Мир техники и технологий», а также информационно-издательского центра по геологии и недропользованию «ГеоИнформМАРК», агентства «PRoAtom» и множества известных специализированных Web-порталов, выставок и конференций.

На семинаре SVIT GIS-2012 разработчики K-MINE презентовали программный продукт, который уже на протяжении 15-ти лет успешно используют в горно-добывающей отрасли, в агрохозяйствах, при создании кадастров, в экологии, экономике и учебном процессе. ГИС K-MINE решает широкий спектр задач: от автоматизации элементарных операций горного производства до создания системы управления недропользованием на государственном уровне. Созданные в K-MINE модели месторождений используются как для оперативного учета, так и для оценки запасов месторождений.