

УДК 622.765

В.И. Мелик-Гайказян, Н.П. Емельянова, Т.И. Юшина

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПЕННОЙ ФЛОТАЦИИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

Сообщение 2*

Введен критерий в новый вариант расчета энергетической возможности перехода свободного пузырька A в прилипший к подложке-частице пузырек M или кратко переход $A \rightarrow M$ (ПАМ). Установлено, что результаты расчета ПАМ зависят от величины капиллярного давления $P_{кМ}$ в пузырьке M и могут быть как правильными, так и ошибочными. Введенный критерий позволяет их легко разделить, но это потребовало повторного, более точного расчета ПАМ. В результате открылись новые обстоятельства, иллюстрирующие влияние $P_{кМ}$ на процесс прилипания. Приведен числовой пример расчета ПАМ от источника точных данных параметров пузырьков M до конечных однозначных результатов расчета.

Ключевые слова: уравнения капиллярной физики, энергетическая возможность прилипания, капиллярное давление, пенная флотация, механизм прилипания, гидрофобная поверхность, гидрофильная поверхность.

Влияние капиллярного давления в пузырьке на его прилипание к подложке-частице. (Часть 1)

1. Энергетический расчет возможности прилипания пузырька к подложке (частице)

Представим схемой на рис. 1, а процесс перехода маленького свободного сферического пузырька A в прилипший к подложке пузырек M . Для краткости назовем этот процесс переходом $A \rightarrow M$ и разделим его для расчета на три этапа [1].

Первый этап. Соприкосновение сферического пузырька A с твердой, горизонтальной, гладкой поверхностью в точке O .

Второй этап. Прилипание. Рассмотрим его после третьего этапа.

Третий этап. Прилипание состоялось и образовался периметр контакта с малым радиусом Ox_1 . Пузырек A с формой $\beta = 0$ превратился в пузырек M с формой β , описываемой уравнением Лапласа [2].

Используя результаты численного решения уравнения Лапласа для выбранного значения β , можно рассчитать все параметры пузырька M : его объем V_M , площадь боковой поверхности Γ_M , площадь контакта Γ_{aM} , радиус кривизны b поверхности пузырька в его куполе, диаметр d_e его экватора, краевой угол θ_M у основания пузырька, высоту z пузырька и величину капиллярного давления $P_{кМ}$ газа в нем.

Забегая вперед, отметим, что за величину $P_{кМ}$ в сообщении [1] было принято давление в куполе пузырька M , что оказалось неприемлемым и привело к ошибочным результатам в случае пузырьков с d_e от 3 до 0,03 мм.

*Сообщение 1 – ГИАБ, 2011, № 5, с.135-144.

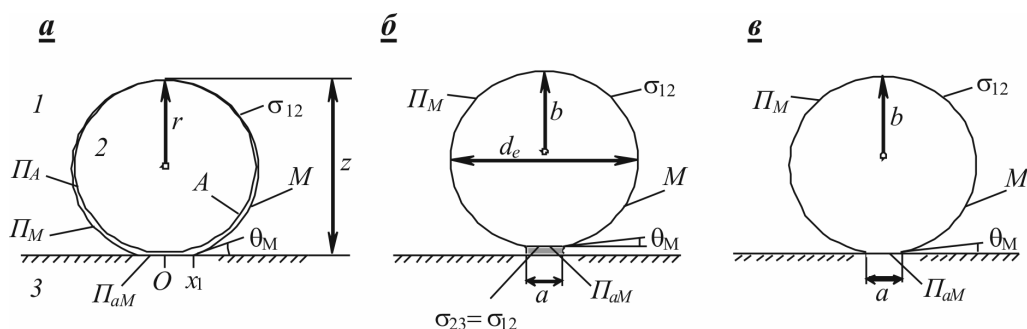


Рис. 1. Схема прилипания маленького сферического свободного пузырька A (а) к предельно гидрофильной (б) и предельно гидрофобной (в) подложке (частице). Переход $A \rightarrow M$ (а): 1, 2, 3 – водная, газообразная и твердая фазы; σ_{12} – поверхностное натяжение на границе пузырек-вода до и после прилипания; σ_{23} – поверхностное натяжение на границе водной прослойки с воздухом пузырька; P_A и P_M – площади поверхности пузырьков соответственно до и после прилипания; P_{aM} – площадь границы пузырек-подложка; r – радиус пузырька A ; b – радиус кривизны прилипшего пузырька M в его куполе; d_e – экваториальный диаметр пузырька M ; z – высота пузырька M ; a – диаметр основания пузырька M ; θ_M – угол наклона поверхности пузырька M к горизонту у его основания; Ox_1 – начальный радиус периметра контакта пузырька M с подложкой

Затем вычисляются параметры пузырька A . При этом поначалу предполагается, что в момент прилипания объемы пузырьков A и M одинаковые, т.е. $V_A = V_M$.

Таким образом, рассмотрение процесса прилипания (второй этап) сводится к расчету параметров пузырьков M и A , вычислению заключенной в них энергии, определению знака и величины приращения энергии при переходе $A \rightarrow M$ и оценке их соответствия существующим представлениям о процессе.

Следует также учесть, что при прилипании пузырька к гидрофильной поверхности между прилипшим пузырьком и подложкой образуется тонкая прослойка жидкости (см. рис. 1, б). В случае предельно гидрофобной подложки (рис. 1, в) эта пленка распадается на мелкие капельки. Оба явления были обнаружены под пузырьком, сидящим на поверхности ртути при различных ее поляризациях А.Н.Фрумкинским с сотрудниками [3, 4].

Поскольку толщины прослоек воды на отдельных частицах неизвестны, то в расчетах рассматриваются два предельных случая. Первый случай с гидрофильной (Ф) подложкой (рис. 1, б), когда толщина прослойки настолько велика, что поверхностное натяжение на ее границе с воздухом пузырька $\sigma_{23} \approx \sigma_{12}$. Этот случай наиболее неблагоприятный для прилипания. Второй предельный случай изображен на рис. 1, в. Он соответствует условию предельно гидрофобной (Г) подложки, наиболее благоприятному для прилипания и флотации.

Естественно, что сделанные допущения могут не соответствовать реальности, но все реальные случаи расположатся веером между рассматриваемыми предельными. Расчет проводится для этих предельных случаев.

Энергия $G_{MГ}$ пузырька M , сидящего на гидрофобной (Г) поверхности, равна сумме объемной энергии газа в пузырьке $P_{кв} \cdot V_M$ и поверхностной энергии $\sigma_{12} \cdot P_M$. Вычисляется $G_{MГ}$ по уравнению (1)

$$G_{MГ} = P_{кв} \cdot V_M + \sigma_{12} \cdot P_M. \quad (1)$$

Энергия $G_{MФ}$ пузырька M , сидящего на гидрофильной (Ф) поверхности (рис. 1, б), больше, чем $G_{MГ}$ на величину поверхностной энергии $\sigma_{12} \cdot P_{aM}$ и вычисляется по уравнению (2)

$$G_{M\Phi} = P_{KM} \cdot V_M + \sigma_{12} \cdot (\Pi_M + \Pi_{aM}) . \quad (2)$$

Энергия G_A пузырька A рассчитывается по уравнению (3)

$$G_A = P_{KA} \cdot V_A + \sigma_{12} \cdot \Pi_A . \quad (3)$$

Далее определяется знак и величина приращений энергии ΔG при переходе $A \rightarrow M$ по уравнениям (4) и (5)

$$\Delta G_T = G_{MT} - G_A , \quad (4)$$

$$\Delta G_\Phi = G_{M\Phi} - G_A . \quad (5)$$

Если приращение ΔG_T или ΔG_Φ окажется положительным, т.е. $\Delta G > 0$, то прилипание пузырька данного размера и формы самопроизвольно произойти не может. В случае $\Delta G < 0$ прилипание может быть самопроизвольным, а если $\Delta G \approx 0$, то для прилипания необходимы некоторые флуктуации у периметра контакта, которые были рассмотрены в [5].

Чтобы установить роль капиллярного давления в переходе $A \rightarrow M$, вычислим P_{KM} на трех уровнях пузырька M для каждого β . Естественно, P_{KM1} , P_{KM2} , и P_{KM3} получатся разными. Разными получатся и ΔG . Соотнося их знаки с реальными явлениями, можно установить, какое из значений P_{KM} ближе к истинному, а какого просто не может быть в пузырьке M .

2. Источник параметров пузырьков

Единственным надежным источником параметров пузырьков для расчета перехода $A \rightarrow M$ пока являются результаты численного решения уравнения Лапласа, оформленные в виде безразмерных точных таблиц типа таблиц Башфорта и Адамса [2].

Авторами таблиц [2] являются выдающиеся английские ученые: Френсис Башфорт – баллистик, увлекавшийся на досуге капиллярными явлениями, и Джон К.Адамс – знаменитый астроном, вычисливший в 1845 г. в свои 26 лет точное положение на небе неизвестной тогда планеты (Нептун) по отклонению планеты Уран от предписанной ей орбиты.

Следует заметить, что уравнение Лапласа в своем первоначальном виде (1806 г.) не могло быть использовано для вычисления координат контуров пузырьков. По просьбе Ф.Башфорта (в 1855 г.) Дж.Адамс преобразовал уравнение и разработал метод численного его решения для простого случая симметричных капель и пузырьков. В 1883 г. таблицы [2] были опубликованы и содержали результаты решения для 30-ти положительных ($\beta > 0$) и 16-ти отрицательных ($\beta < 0$) форм. В пояснении к таблицам Адамс изложил свой метод решения уравнения Лапласа, причем отдельно для $\beta > 0$ и $\beta < 0$.

По описанию в [2] для $\beta < 0$ метод Адамса был воспроизведен в [6, с.161÷165]. Учитывая трудоемкость расчета, он был снабжен поясняющим числовым примером ($\beta = -0,15$) и использован для получения большого числа таблиц от форм крупных сидячих пузырьков, содержащихся в [2], до весьма малых. Применительно к пенной флотации уравнение Лапласа рассмотрено также и в [7] с изображением контуров пузырьков с различными формами β .

Для пояснения проводимого ниже расчета энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ приведена табл. 1 в качестве источника исходных данных для пузырька с диаметром $d_e \approx 3$ мм и формой $\beta = -3,15 \cdot 10^{-1}$. Табл. 1 составлена почти также как и таблицы [2], но содержит вместо шести семь граф: s/b ; b/ρ ; φ ; x/b ; z/b ; V/b^3 и Π/b^2 .

Поясним смысл параметров пузырька, указанных в этих графах. Величина b – радиус кривизны формы в ее куполе, является масштабом к таблицам и вычисляется по преобразованному уравнению Лапласа. Величина s/b – длина дуги, отсчитанная от купола в единицах b , является независимой переменной при решении уравнения для форм $\beta < 0$. Величина b/ρ – второй главный радиус кривизны. Параметр φ – угол, который составляет с осью симметрии нормаль к контуру пузырька в точке с координатой s/b . Параметры x/b и z/b – декартовские координаты этой точки. Параметры V/b^3 и Π/b^2 – соответственно объем и площадь поверхности части пузырька, заключенной между куполом формы и уровнем, проходящим через точку с указанными параметрами s/b , x/b , z/b или φ . Дополнительной к таблицам [2] является графа Π/b^2 . Ее пришлось досчитать [6], поскольку площадь поверхности пузырька необходима для расчета его поверхностной энергии.

Чтобы оценить влияние размера пузырька и величины давления $P_{\text{км}}$ в нем на переход $A \rightarrow M$, расчеты проводились также с пузырьками значительно меньшего размера с формами β , равными; $-3,5 \cdot 10^{-2}$; $-3,15 \cdot 10^{-3}$; $-3,15 \cdot 10^{-5}$; $-3,15 \cdot 10^{-7}$. Они соответствуют пузырькам диаметром в 1 мм, 300, 30 и 3 мкм. Все расчеты проводились по одной схеме, которая поясняется приведенным в п.3 числовым примером, выполненным для пузырька диаметром 3 мм. В табл. 2 приведены фрагменты таблиц типа табл. 1 для перечисленных выше форм β , которые послужили основой для расчетов связанных с переходом $A \rightarrow M$ пузырьков меньших размеров.

3. Расчет энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ пузырька диаметром 3 мм и формой $\beta = -3,15 \cdot 10^{-1}$. Числовой пример

Чтобы использовать для расчета безразмерные данные, содержащиеся в табл. 1, их надо умножить на масштаб, т.е. на величину b в соответствующей степени. Величина b вычисляется по уравнению Лапласа [7, ур-е (5)] после подстановки в него соответствующих параметров, связанных с пузырьком M : $\beta = -3,15 \cdot 10^{-1}$; $\sigma = 0,070$ Н/м; $D_1 = 0$ кг/м³ (для воздуха); $D_2 = 1 \cdot 10^3$ кг/м³ (для воды); $g = 9,8$ м/с².

$$b = \sqrt{\frac{\beta \cdot \sigma}{(D_1 - D_2) \cdot g}} = \sqrt{\frac{(-3,15 \cdot 10^{-1}) \cdot 0,070}{(0 - 1 \cdot 10^3) \cdot 9,8}} = \sqrt{2,25 \cdot 10^{-6}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Вычисленные параметры пузырьков M и A вносятся в соответствующие графы и строки табл. 3.

Для расчета рационально из табл. 1 выбрать пузырек, основание которого соответствует точке перегиба на контуре формы. В этой точке второй главный радиус b/ρ кривизны поверхности пузырька меняет свой знак, угол φ максимален, а выбранный пузырек имеет минимальный краевой углом θ_M , с которым он может закрепиться на данной подложке, если $\theta_M \leq \theta$. Угол θ характеризует смачиваемость подложки и удовлетворяет закону Юнга.

В соответствии с вышесказанным находим в табл. 1, в графе 1 строку с $s/b = 2,975$ соответствующую уровню, ближайшему к точке перегиба, где значение b/ρ минимально или близко к нулю.

3.1. Вычисление объема пузырька V_M .

Из графы 6 на уровне $s/b = 2,975$ берем значение V/b^3 и умножаем его на b^3
 $V_M = V/b^3 \cdot b^3 = 5,95014256 \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^3 = 2,00817311 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3$.

Результаты численного решения уравнения Лапласа для $\beta = -3,15 \cdot 10^{-1}$

$\frac{s}{b}$	$\frac{b}{\rho}$	φ°	$\frac{x}{b}$	$\frac{z}{b}$	$\frac{V}{b^3}$	$\frac{\Pi}{b^2}$
1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,998820	5,727323	0,09983349	0,00499485	0,00007825	0,0313898
0,2	0,995290	11,441140	0,19867182	0,01991790	0,00123871	0,1252459
0,3	0,989442	17,128073	0,29553904	0,04458636	0,00615983	0,2806349
0,4	0,981329	22,774982	0,38949685	0,07870140	0,01898909	0,4960213
0,5	0,971022	28,369085	0,47966164	0,12185655	0,04490781	0,7692960
0,6	0,958606	33,898047	0,565219511	0,17354883	0,089596	1,0978162
0,7	0,944179	39,350060	0,64543876	0,23319215	0,15865648	1,4784528
0,8	0,927847	44,713902	0,71967964	0,30013234	0,25706308	1,9076454
0,9	0,909719	49,978970	0,78740107	0,37366309	0,38868308	2,3814625
1,0	0,889904	55,135288	0,84816445	0,45304232	0,55592075	2,89566645
1,1	0,868504	60,173489	0,90163465	0,53750826	0,75950446	3,44576688
1,2	0,845612	65,084764	0,94757848	0,62629475	0,99842579	4,0271146
1,3	0,821303	69,860785	0,98586091	0,71864552	1,27002179	4,6349254
1,4	0,795629	74,493596	1,01643964	0,81382689	1,57017826	5,2643695
1,5	0,768615	78,975464	1,03935820	0,91113896	1,89362365	5,9106158
1,6	0,740249	83,298693	1,05473829	1,00992513	2,23427869	6,5688857
1,7	0,710474	87,455401	1,06277162	1,10957993	2,58562743	7,2344995
1,76	0,691890	89,866048	1,06416830	1,16955924	2,79882075	7,6354973
1,9	0,646193	95,235014	1,05786599	1,30936602	3,29429328	8,5697770
2,0	0,611251	98,838335	1,04558865	1,40859288	3,63945790	9,2309234
2,1	0,573991	102,235014	1,02727433	1,50688660	3,97149689	9,8824374
2,2	0,533924	105,410438	1,00335312	1,60397014	4,28621578	10,5206594
2,3	0,490394	108,346733	0,97428714	1,69964134	4,58037933	11,1422100
2,4	0,442535	111,021689	0,94056909	1,79377569	4,85172941	11,7440098
2,5	0,389212	113,407397	0,90272314	1,88632965	5,09895162	12,3232989
2,6	0,328939	115,468482	0,86130894	1,97734494	5,32160087	12,8776572
2,7	0,259787	117,159835	0,81692967	2,06695382	5,51999722	13,4050299
2,8	0,179273	118,423762	0,77024532	2,15538551	5,69510290	13,9037577
2,9	0,084260	119,186504	0,72199314	2,24297304	5,8483907	14,3726193
2,975	0,001211	119,374147	0,68527800	2,30837176	5,95014256	14,7042081
2,980	-0,004736	119,373644	0,68282546	2,31272894	5,95654777	14,7256982
3,1	-0,165009	118,810200	0,62431239	2,41749581	6,09718439	15,2184132
3,3	-0,518598	115,001765	0,53277416	2,59527633	6,283718313	15,9441999
3,5	-0,957603	106,574568	0,46048036	2,78155896	6,42679155	16,5654088
3,7	-1,288435	93,444904	0,42469032	2,97788186	6,54555551	17,1168418
3,745	-1,314585	90,084353	0,42330038	3,02285393	6,57092808	17,2366615
3,8	-1,315353	85,931497	0,425211645	3,07780865	6,60195443	17,3831590

Примечание: Таблица составлена по типу Таблиц Башфорта и Адамса [2].

Таблица 2

Фрагменты результатов численного решения уравнения Лапласа для различных форм - β

s/b	b/p	φ°	x/b	z/b	V/b^3	Π/b^2
1	2	3	4	5	6	7
$\beta = -3,5 \cdot 10^2$						
1,590	0,970304	90,164067	1,005939542	1,017275927	2,160605724	6,415070330
3,030	0,081679	162,203892	0,165544321	2,060120426	4,340513647	12,785544198
3,035	0,028601	162,219800	0,160783324	2,061647813	4,340641404	12,790670143
3,040	-0,029409	162,219809	0,156022112	2,063174529	4,340761759	12,795646509
3,050	-0,162827	162,165938	0,146500859	2,066231608	4,340981569	12,805150534
$\beta = -3,15 \cdot 10^3$						
1,570	0,997379	89,872919	1,000523407	0,999032164	2,092362922	6,279125258
3,090	0,335664	174,629893	0,056446365	2,006993063	4,202016506	12,582845230
3,100	0,022102	174,741077	0,046489115	2,007916709	4,202024221	12,586079052
3,102	-0,067104	174,738611	0,044497535	2,008100035	4,202025414	12,586650738
3,110	-0,581669	174,601512	0,036531874	2,008840451	4,202029241	12,588687222
$\beta = -3,15 \cdot 10^5$						
1,570	0,999974	89,953553	1,000004921	0,999201853	2,091896718	6,278188842
3,1365	0,206004	179,471371	0,005142994	2,000122511	4,188921013	12,566548652
3,1370	0,025802	179,474823	0,004643015	2,000127105	4,188921013	12,566564024
3,1375	-0,223509	179,472194	0,004143036	2,000131695	4,188921014	12,566577825
3,1380	-0,582380	179,460980	0,003643058	2,000136342	4,188921014	12,566590056
$\beta = -3,15 \cdot 10^7$						
1,570	1,000000	89,954360	0,999999735	0,999203548	2,091892048	6,278179476
3,1408	0,666204	179,939381	0,000793228	2,000001435	4,188790638	12,566368723
3,1410	0,402949	179,945717	0,000593228	2,000001635	4,188790638	12,566369595
3,1412	-0,362650	179,946769	0,000393228	2,000001820	4,188790638	12,566370214
3,1414	-4,887217	179,923751	0,000193228	2,000002033	4,188790638	12,566370583

Примечание: табл. 2 содержит фрагменты таблиц типа табл. 1 для уровня, ближайшего к экватору формы и нескольких уровней в районе точки перегиба на ее меридиональном контуре.

Внесем этот параметр в графу 4, в строку 1 табл. 3, а также и в строку 4, поскольку ранее было принято, что $V_A = V_M$.

3.2. Вычисление диаметра пузырька A

$$d_A = (6 \cdot V_A / \pi)^{1/3} = (6 \cdot 2,00817311 \cdot 10^{-8} / \pi)^{1/3} = 3,372361907 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Полученное значение внесем в строку 4 графы 5 табл. 3.

3.3. Вычисление площади поверхности пузырька A

$$P_A = \pi \cdot (d_A)^2 = \pi \cdot (3,372361907 \cdot 10^{-3})^2 = 3,57287829 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Внесем этот результат в графу 6, в строку 4.

3.4. Вычисление площади поверхности пузырька M

$$P_M = \pi / b^2 \cdot b^2 = 14,7042081 \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2 = 3,30844682 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Внесем этот результат в графу 6, в строку 1.

3.5. Вычисление площади контакта пузырька M с подложкой

$$P_{aM} = \pi \cdot [(x/b) \cdot b]^2 = \pi \cdot (0,6852780 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3})^2 = 3,31944877 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Внесем этот результат в графу 8, в строку 1.

3.6. Вычисление общей площади поверхности пузырька M

$$P_M + P_{aM} = 3,30844682 \cdot 10^{-5} + 3,31944877 \cdot 10^{-6} = 3,64039170 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Внесем этот результат в графу 7, в строку 1.

3.7. Вычисление экваториального диаметра d_e пузырька M

Этот параметр можно определить по значению x/b на уровне $s/b = 1,76$ посредством тригонометрического соотношения

$$d_e = \frac{2 \cdot (x/b) \cdot b}{\sin \varphi} = \frac{2 \cdot 1,0641683 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{\sin 89,866048} = 3,192513625 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Внесем этот результат в графу 5, в строку 1.

3.8. Вычисление величины краевого угла θ_M

$$\theta_M = 180 - \varphi = 180 - 119,374147 \approx 60,6^\circ.$$

Внесем этот результат в графу 9, в строку 1.

3.9. Вычисление величины капиллярного давления $P_{кМ}$ для трех уровней в пузырьке M с тем, чтобы потом по результатам расчета ΔG_T и ΔG_F выбрать то давление, которое реально действует в нем

$$P_{кМ1} = 2 \cdot \sigma / b = 2 \cdot 0,070 / (1,5 \cdot 10^{-3}) = 93,3333333 \text{ Н/м}^2 \text{ - в куполе пузырька;}$$

$$P_{кМ2} = 4 \cdot \sigma / d_e = 4 \cdot 0,070 / (3,192513625 \cdot 10^{-3}) = 87,7051856 \text{ Н/м}^2 \text{ - между куполом и экватором;}$$

$$P_{кМ3} = 2 \cdot \sigma / b - (z/b)_3 \cdot b \cdot D_2 \cdot g = 93,3333333 - 1,16955924 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 9,8 = 76,1408125 \text{ Н/м}^2 \text{ - на уровне экватора.}$$

Внесем полученные результаты в графу 11, в строки 1÷3.

3.10. Вычисление величины капиллярного давления $P_{кА}$ в пузырьке A

$$P_{кА} = 4 \cdot \sigma / d_A = 4 \cdot 0,070 / (3,372361907 \cdot 10^{-3}) = 83,0278623 \text{ Н/м}^2 \text{ - по закону Лапласа.}$$

Внесем полученный результат в графу 11, в строку 4.

3.11. Вычисление объемной энергии газа в пузырьке M для выбранных трех уровней

$$P_{кМ1} \cdot V_M = 93,3333333 \cdot 2,00817311 \cdot 10^{-8} = 1,87429490 \cdot 10^{-6} \text{ Дж;}$$

$$P_{кМ2} \cdot V_M = 87,7051856 \cdot 2,00817311 \cdot 10^{-8} = 1,76127195 \cdot 10^{-6} \text{ Дж;}$$

$$P_{кМ3} \cdot V_M = 76,1408125 \cdot 2,00817311 \cdot 10^{-8} = 1,52903932 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Внесем полученные результаты в графу 12, в строки 1, 2 и 3.

3.12. Вычисление объемной энергии газа в пузырьке A
 $P_{кА} \cdot V_A = 83,0278623 \cdot 2,00817311 \cdot 10^{-8} = 1,66734320 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Внесем полученный результат в графу 12, в строку 4.

3.13. Вычисление поверхностной энергии пузырька M
 $\sigma \cdot \Pi_M = 0,070 \cdot 3,30844682 \cdot 10^{-5} = 2,31591277 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Вносим этот результат в графу 13, в строки 1ч3.

3.14. Вычисление поверхностной энергии пузырька A
 $\sigma \cdot \Pi_A = 0,070 \cdot 3,57287829 \cdot 10^{-5} = 2,50101480 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Вносим этот результат в графу 13, в строку 4.

3.15. Вычисление полной поверхностной энергии пузырька M
 $\sigma \cdot (\Pi_M + \Pi_{аМ}) = 0,070 \cdot 3,64039170 \cdot 10^{-5} = 2,54827419 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Внесем этот результат в графу 14, в строки 1ч3.

3.16. Вычисление энергии $G_{МГ}$ пузырька M по уравнению (1)
 $G_{МГ1} = P_{кМ1} \cdot V_M + \sigma \cdot \Pi_M = 1,87429490 \cdot 10^{-6} + 2,31591277 \cdot 10^{-6} =$
 $= 4,19020767 \cdot 10^{-6}$ Дж.;

$G_{МГ2} = P_{кМ2} \cdot V_M + \sigma \cdot \Pi_M = 1,76127195 \cdot 10^{-6} + 2,31591277 \cdot 10^{-6} =$
 $= 4,07718472 \cdot 10^{-6}$ Дж.;

$G_{МГ3} = P_{кМ3} \cdot V_M + \sigma \cdot \Pi_M = 1,52903932 \cdot 10^{-6} + 2,31591277 \cdot 10^{-6} =$
 $= 3,84495209 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Внесем полученные результаты в графу 15, в строки 1, 2 и 3.

3.17. Вычисление энергии G_A
 $G_A = P_{кА} \cdot V_A + \sigma \cdot \Pi_A = 1,66734320 \cdot 10^{-6} + 2,50101480 \cdot 10^{-6} = 4,16835800 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Внесем полученный результат в графу 15, в строки 4.

3.18. Вычисление энергии $G_{МФ}$ по уравнению (2)

Суммируем значения граф 12 и 14 и заносим результат в графу 16.

3.19. Вычисление приращения энергии ΔG_T по уравнению (4)
 $\Delta G_{T1} = G_{МГ1} - G_A = 4,19020767 \cdot 10^{-6} - 4,16835800 \cdot 10^{-6} = 2,18497 \cdot 10^{-8}$ Дж.;

$\Delta G_{T2} = G_{МГ2} - G_A = 4,07718472 \cdot 10^{-6} - 4,16835800 \cdot 10^{-6} = -9,11733 \cdot 10^{-8}$ Дж.;

$\Delta G_{T3} = G_{МГ3} - G_A = 3,84495209 \cdot 10^{-6} - 4,16835800 \cdot 10^{-6} = -3,23406 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Внесем полученные результаты в графу 17 в строки 1, 2 и 3.

3.20. Вычисление приращения энергии $\Delta G_{Ф}$ по уравнению (5)
 $\Delta G_{Ф1} = G_{МФ1} - G_A = 4,42256909 \cdot 10^{-6} - 4,16835800 \cdot 10^{-6} = 2,54211 \cdot 10^{-7}$ Дж.;

$\Delta G_{Ф2} = G_{МФ2} - G_A = 4,30954614 \cdot 10^{-6} - 4,16835800 \cdot 10^{-6} = 1,41188 \cdot 10^{-7}$ Дж.;

$\Delta G_{Ф3} = G_{МФ3} - G_A = 4,07731351 \cdot 10^{-6} - 4,16835800 \cdot 10^{-6} = -9,10445 \cdot 10^{-8}$ Дж.

Внесем полученные результаты в графу 18 в строки 1, 2 и 3 табл. 3.

3.21. Обсуждение результатов расчета энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ по п.3

Обсуждение проводится на основе данных табл. 3, куда сведены все результаты расчет.

Рассмотрим поначалу результаты, которые можно считать приемлемыми.

Это: $\Delta G_T = -9,11733 \cdot 10^{-8}$ Дж (графа 17) и $\Delta G_{Ф} = 1,41188 \cdot 10^{-7}$ Дж (графа 18). Согласно им, пузырек диаметром 3 мм может прилипнуть ($\Delta G < 0$) к гидрофобной (Γ) подложке и не может прилипнуть ($\Delta G > 0$) к предельно гидрофильной (Φ) подложке.

Отсюда следует, что именно давление $P_{кМ2} = 87,7051856$ Н/м², использованное при расчете величин ΔG_T и $\Delta G_{Ф}$, является капиллярным давлением, действующим в пузырьке M .

Результаты расчета энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ для пузыря
диаметром $d_e \approx 3$ мм и формой $\beta = -3,15 \cdot 10^{-1}$, а также выбора методики расчета $R_{км}$

№ п/п	Пузырек	$-\beta$	$V_M, V_A, \text{м}^3$	$d_e, d_A, \text{м}$	$\Pi_M, \Pi_A, \text{м}^2$	$(\Pi_M + \Pi_{ам}), \text{м}^2$	$\Pi_{ам}, \text{м}^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	M1	$3,15 \cdot 10^{-1}$	$2,00817311 \cdot 10^{-8}$	$3,192513625 \cdot 10^{-3}$	$3,30844682 \cdot 10^{-5}$	$3,64039170 \cdot 10^{-5}$	$3,31944877 \cdot 10^{-6}$
4	A	0	$2,00817311 \cdot 10^{-8}$	$3,372361907 \cdot 10^{-3}$	$3,57287829 \cdot 10^{-5}$	-	-

продолжение таблицы							
№ п/п	Пузырек	θ_M°	$\sigma, \text{Н/м}$	$R_{км}, R_{кА}, \text{Н/м}^2$	$R_{км} V_M; R_{кА} V_A, \text{Дж}$	$\sigma \cdot \Pi_M, \sigma \cdot \Pi_A, \text{Дж}$	$\sigma(\Pi_M + \Pi_{ам}), \text{Дж}$
1	2	9	10	11	12	13	14
1	M1	60,6	0,070	93,33333333	$1,87429490 \cdot 10^6$	$2,31591277 \cdot 10^6$	$2,54827419 \cdot 10^6$
2	M2	60,6	0,070	87,7051856	$1,76127195 \cdot 10^6$	$2,31591277 \cdot 10^6$	$2,54827419 \cdot 10^6$
3	M3	60,6	0,070	76,1408125	$1,52903932 \cdot 10^6$	$2,31591277 \cdot 10^6$	$2,54827419 \cdot 10^6$
4	A	0	0,070	83,0278623	$1,66734320 \cdot 10^6$	$2,50101480 \cdot 10^6$	-

продолжение таблицы							
№ п/п	Пузырек	$G_M, G_A, \text{Дж}$	$G_{мв}, \text{Дж}$	$\Delta G = G_M - G_A, \text{Дж}$	$\Delta G_{\Phi} = G_{мв} - G_A, \text{Дж}$	$\frac{\Delta G_{\Gamma}}{V}, \text{Дж/м}^3$	$\frac{\Delta G_{\Phi}}{V}, \text{Дж/м}^3$
1	2	15	16	17	18	19	20
1	M1	$4,19020767 \cdot 10^6$	$4,42256909 \cdot 10^6$	$2,18497 \cdot 10^8$	$2,54211 \cdot 10^7$	-	-
2	M2	$4,07718472 \cdot 10^6$	$4,30954614 \cdot 10^6$	$-9,11733 \cdot 10^8$	$1,41188 \cdot 10^7$	-4,540	7,031
3	M3	$3,84495209 \cdot 10^6$	$4,07731351 \cdot 10^6$	$-3,23406 \cdot 10^7$	$-9,10445 \cdot 10^8$	-	-
4	A	$4,16835800 \cdot 10^6$	-	-	-	-	-

Примечание: Радиус кривизны в куполе пузыря $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Рассмотрим результаты, которые абсурдны. Это: $\Delta G_{\Gamma} = 2,18497 \cdot 10^{-8}$ Дж (графа 17) и $\Delta G_{\Phi} = -9,10445 \cdot 10^{-8}$ Дж (графа 18). Согласно им пузырек не может прилипнуть ($\Delta G > 0$) к гидрофобной (Γ) подложке и может прилипнуть ($\Delta G < 0$) к предельно гидрофильной (Φ) подложке. Очевидно, что такой вердикт ошибочен, и приведшие к нему давления $P_{\text{км1}}$ и $P_{\text{км3}}$ должны быть признаны как нереальные для пузырька M . Тем не менее они необходимы в познавательном отношении, ибо иллюстрируют, как небольшие отклонения от $P_{\text{км2}}$ могут привести к ошибочным результатам.

Итак, абсурдные результаты являются индикатором, указывающим, какие из использованных в расчете значений $P_{\text{км}}$ не соответствуют реальности.

Отсюда следуют два вывода.

1. По-видимому, найден способ оценки величины реального капиллярного давления $P_{\text{км2}}$ в пузырьке M и способ его расчета (см.п. 3.9).

2. Установлено, что $P_{\text{км}}$ является **влиятельным** фактором в процессе прилипания пузырька к подложке. Неправильная величина $P_{\text{км}}$, принятая при расчете, может привести к ошибочным выводам.

Очевидно, что сделанные выводы рационально проверить расчетами с пузырьками других размеров (см. часть 2 статьи).

Поскольку абсолютные значения приращений энергий ΔG очень зависимы от размера пузырька, то для удобства сравнения ΔG , полученных для пузырьков различного размера их следует делить на объем V пузырька и сравнивать полученные удельные значения $\Delta G_{\Gamma}/V$ и $\Delta G_{\Phi}/V$, помещенные в графы 19 и 20 табл. 3 соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мелик-Гайказян В.И., Емельянов В.М., Емельянова Н.П., Емельянов В.В., Моисеев А.А., Юшина Т.И. К решению задач пенной флотации на основе уравнений капиллярной физики. // ГИАБ, МГТУ, 2011, № 5, с.135-144.
2. Bashforth F., Adams J.C. An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluids. Cambridge, 1883. - 140 p.
3. Фрумкин А.Н., Городецкая А.В., Кабанов Б.Н., Некрасов Н.И. Электрокапиллярные явления и смачиваемость металлов электролитами. //Журн.физ.химии, 1932, т.3, № 5-6, с.351-367.
4. Фрумкин А.Н., Городецкая А.В. Об явлении смачивания и прилипания пузырьков. II. Механизм прилипания пузырьков к поверхности ртути //Журн.физ.химии. 1938. Т.12, вып.5-6, с.511-520.
5. Мелик-Гайказян В.И., Емельянов В.М., Моисеев А.А., Емельянов В.В., Емельянова Н.П., Юшина Т.И., Кулешова М.А. О капиллярном механизме действия реагентов при пенной флотации, развитии методов его исследования и подборе реагентов //ГИАБ, МГТУ, 2011, № 1, с.150-162; № 2, с.224-232.
6. Мелик-Гайказян В.И. Исследование механизма действия аполярных флотореагентов при флотации частиц с гидрофобными и гидрофобизированными поверхностями: Томский политехнический институт, 1966. Дис. ... д-ра хим. наук. Институт физической химии АН СССР, Москва, 1966, 263 с.; Приложение с таблицами, 107 с.
7. Мелик-Гайказян В.И., Емельянова Н.П., Козлов П.С., Юшина Т.И., Липная Е.Н. О капиллярном механизме действия реагентов при пенной флотации, развитии методов его исследования и подборе реагентов// ГИАБ, МГТУ, 2008, № 9, с.272-281. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Мелик-Гайказян Виген Иосифович – профессор, доктор химических наук,
Емельянова Нина Павловна – доцент, кандидат химических наук,
Юго-западный государственный университет, rector@swsu.ru
Юшина Татьяна Ивановна – кандидат технических наук, доцент,
Московский государственный горный университет, ud@msmu.ru