

В.И. Мелик-Гайказян, Н.П. Емельянова, Т.И. Юшина

**К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПЕННОЙ ФЛОТАЦИИ НА ОСНОВЕ
УРАВНЕНИЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ФИЗИКИ**

**Сообщение 2. Влияние капиллярного давления
в пузырьке на его прилипание к подложке-частице
(Часть 2)***

Расчет энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ (ПАМ) показал, что с уменьшением диаметра пузырьков M капиллярное давление $P_{кМ}$ в них растет, диапазон возможного изменения $P_{кМ}$ в пузырьках резко сужается, влияние $P_{кМ}$ на прилипание сохраняется и пузырьки микронных размеров энергетически могут почти в равной мере прилипать как к гидрофобным, так и к гидрофильным поверхностям. Этому способствует уменьшение краевого угла θ_M у микронных пузырьков до $0,02^\circ$ и начинающийся рост коэффициента растекания прилипшего пузырька по подложке-частице.

Ключевые слова: уравнения капиллярной физики, энергетическая возможность прилипания, капиллярное давление, пенная флотация, механизм прилипания, гидрофобная поверхность, гидрофильная поверхность, коэффициент растекания микропузырька по подложке.

**4. Расчет энергетической
возможности перехода $A \rightarrow M$
пузырька диаметром 30 мкм и
формой $\beta = -3,15 \cdot 10^{-5}$**

Для расчета используются данные, содержащиеся в табл. 2 с фрагментами результатов решения уравнения Лапласа для формы β , равной: $-3,15 \cdot 10^{-5}$.

Расчеты показали, что для пузырька M с экваториальным диаметром $d_e > 30$ мкм $V_A = V_M$ и параметры пузырька A (d_A и Π_A) могут быть легко вычислены, как это сделано в пп. 3.2 и 3.3 первой части статьи. Однако, оказалось, что пузырек A с $d_e \leq 30$ мкм в момент перехода $A \rightarrow M$ слегка расширяется и параметры пузырька A вычисляются на основе принципа, что поверхность шара не может быть

больше поверхности любого тела того же объема. Параметры пузырька A (Π_A , d_A и V_A) вычисляются на основе соотношения (6)

$$\Pi_A = (\Pi_M + \Pi_{aM}) - x, \quad (6)$$

где x — единица, вычитаемая из последнего разряда числа $(\Pi_M + \Pi_{aM})$.

Пример вычисления Π_A возьмем из табл. 4.

Подставив в уравнение (6) значение $(\Pi_M + \Pi_{aM})$ из графы 7 Таблицы 4 и вычтем из него величину $x = 0,000000001 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2$, получим тождество (7).

$$\begin{aligned} \Pi_A &= 2,827492144 \cdot 10^{-9} - \\ &- 0,000000001 \cdot 10^{-9} = \\ &= 2,827492143 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Возможно, χ должно быть бóльшим числом. Это следует исследовать.

Подставим полученное значение Π_A в графу 6, строку 4 табл. 4.

По вычисленному значению Π_A определяем d_A — диаметр пузырька A , а затем по d_A — объем V_A , которые вносим в графы 5 и 4 соответственно.

Таким образом, переход $A \rightarrow M$ для пузырьков диаметром до 30 мкм вычисляется полностью по схеме п.3, а для пузырьков с $d_e \leq 30$ мкм — с некоторым отклонением от этой схемы в самом начале расчета. Для них расчет ведется в следующей последовательности.

1. Вычисление V_M (по п.3.1).
2. Вычисление Π_M (по п.3.4).
3. Вычисление Π_{aM} (по п.3.5).
4. Вычисление $(\Pi_M + \Pi_{aM})$ (по п. 3.6).
5. Вычисление Π_A по уравнению (6) **(вместо п.3.3)**.
6. Вычисление $d_A = (\Pi_A/\pi)^{0,5}$ **(вместо п.3.2)**.
7. Вычисление $V_A = \pi(d_A)^3/6$ **(вместо п.3.1)**.

Далее весь расчет продолжается в последовательности, принятой в п.3, а полученные результаты вносятся в табл. 4, которая построена по типу табл. 3.

Сопоставим результаты перехода $A \rightarrow M$ пузырьков диаметром 3 мм и 30 мкм, т.е. в 100 раз меньше размера. Хотя числа в одноименных графах обеих таблиц различаются между собой от двух до восьми порядков, закономерности их изменения очень схожи и потому выводы, записанные в п.3.21 при обсуждении результатов табл. 3 остаются справедливыми и при трактовке результатов табл. 4. Именно из-за этой схожести не приведены таблицы с результатами расчета для промежуточных пузырьков диаметром 1 мм и 100 мкм, но некоторые из содержащихся в них результатов используются в дальнейших обсуждениях.

182

5. Расчет энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ пузырьков различного размера

Расчеты проводились по схеме п.3 для пузырьков с диаметром более 30 мкм (1 мм и 100 мкм), а для пузырьков меньшего размера (3 мкм, 1 мкм и 600 нм) с некоторыми изменениями в порядке расчета, поясненными в п.4. Чтобы не перегружать статью, в Таблице 5 приведены результаты, полученные в расчете перехода $A \rightarrow M$ для пузырька с $d_e = 600$ нм. Отличия в том, что при всех значениях $P_{кМ}$ пузырек показывает энергетическую возможность прилипнуть к гидрофильной поверхности.

Для обсуждения полученных результатов представим их в сводной табл. 6 и в виде рис. 2. Кроме того, рационально ввести параметр $K_M = V_M/V_A$, который помещен в строки 5 Таблиц 4 и 5. Параметр K_M монотонно растет с уменьшением размера пузырька, используемого в расчете перехода $A \rightarrow M$.

Рассмотрение данных табл. 6 рационально начать с графы 3, содержащей результаты расчета перехода $A \rightarrow M$ пузырьком диаметром 3 мм, помещенные в табл. 3 первой части статьи.

Из строки 5 табл. 6 следует, что при $P_{кМ2} = 87,7052$ Н/м² пузырек диаметром 3 мм может легко прилипнуть (знак минус в строке 6) к гидрофобной подложке, но из строк 1 и 8 следует, что при росте $P_{кМ2}$ до $P_{кМ1} = 93,333$ Н/м² этот пузырек уже не может (знак плюс в строке 8) прилипнуть к данной подложке, а из строк 2 и 9 следует, что при снижении $P_{кМ2}$ до $P_{кМ3} = 76,1408$ Н/м² он может прилипнуть даже к предельно гидрофильной поверхности.

Таким образом, при диапазоне изменений значений капиллярного давления от $P_{кМ1}$ до $P_{кМ3}$ 18,4 % влияние $P_{кМ}$ на прилипание прослеживается довольно четко.

Таблица 4

Результаты расчета энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ для пузырька диаметром $d_e \approx 30$ мкм и формой $\beta = -3,15 \cdot 10^{-5}$, а также выбора методики расчета $P_{кМ}$

№ п/п	Пузырек	$-\beta$	$V_M, V_A, \text{м}^3$	$d_e, d_A, \text{м}$	$P_M, P_A, \text{м}^2$	$(P_M + P_{aM}), \text{м}^2$	$P_{aM}, \text{м}^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	M1	$3,15 \cdot 10^{-5}$	$1,413760842 \cdot 10^{-14}$	$3,000015730 \cdot 10^{-5}$	$2,827476905 \cdot 10^{-9}$	$2,827492144 \cdot 10^{-9}$	$1,523816123 \cdot 10^{-14}$
4	A	0	$1,413760761 \cdot 10^{-14}$	$3,000031171 \cdot 10^{-5}$	$2,827492143 \cdot 10^{-9}$	-	-
5	$K_M = V_M/V_A = 1,0000000573$						

Продолжение табл. 4

№ п/п	Пузырек	θ_M°	$\sigma, \text{Н/м}$	$P_{кМ}, P_{кА}, \text{Н/м}^2$	$P_{кМ} \cdot V_M; P_{кА} \cdot V_A, \text{Дж}$	$\sigma \cdot P_M, \sigma \cdot P_A, \text{Дж}$	$\sigma(P_M + P_{aM}), \text{Дж}$
1	2	9	10	11	12	13	14
1	M1	0,525	0,070	9333,33333	$1,319510119 \cdot 10^{-10}$	$1,979233834 \cdot 10^{-10}$	$1,979244501 \cdot 10^{-10}$
2	M2	0,525	0,070	9333,28440	$1,319503200 \cdot 10^{-10}$	$1,979233834 \cdot 10^{-10}$	$1,979244501 \cdot 10^{-10}$
3	M3	0,525	0,070	9333,18645	$1,319489353 \cdot 10^{-10}$	$1,979233834 \cdot 10^{-10}$	$1,979244501 \cdot 10^{-10}$
4	A	0	0,070	9333,23636	$1,319496334 \cdot 10^{-10}$	$1,979244500 \cdot 10^{-10}$	-

Окончание табл. 4

№ п/п	Пузырек	$G_M, G_A, \text{Дж}$	$G_{MФ}, \text{Дж}$	$\Delta G_\Gamma = G_{M\Gamma} - G_A, \text{Дж}$	$\Delta G_\Phi = G_{M\Phi} - G_A, \text{Дж}$	$\frac{\Delta G_\Gamma}{V}, \text{Дж/м}^3$	$\frac{\Delta G_\Phi}{V}, \text{Дж/м}^3$
1	2	15	16	17	18	19	20
1	M1	$3,298743952 \cdot 10^{-10}$	$3,298743952 \cdot 10^{-10}$	$3,118 \cdot 10^{-16}$	$3,118 \cdot 10^{-16}$	-0,0269	0,0486
2	M2	$3,298737034 \cdot 10^{-10}$	$3,298747701 \cdot 10^{-10}$	$-3,800 \cdot 10^{-16}$	$6,867 \cdot 10^{-16}$		
3	M3	$3,298723187 \cdot 10^{-10}$	$3,298733854 \cdot 10^{-10}$	$-1,765 \cdot 10^{-15}$	$-6,980 \cdot 10^{-16}$		
4	A	$3,298740834 \cdot 10^{-10}$	-				
<i>Примечание.</i> Радиус кривизны в куполе пузырька $b = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м.							

124 Таблица 5

Результаты расчета энергетической возможности перехода $A \rightarrow M$ для пузырька диаметром $d_e = 600$ нм и формой $\beta = -1,26 \cdot 10^{-8}$, а также выбора методики расчета P_{KM}

№ п/п	Пузырек	$-\beta$	$V_M, V_A, \text{м}^3$	$d_e, d_A, \text{м}$	$\Pi_M, \Pi_A, \text{м}^2$	$(\Pi_M + \Pi_A), \text{м}^2$	$\Pi_{AM}, \text{м}^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	M1	$1,26 \cdot 10^{-8}$	$1,13097314023 \cdot 10^{-19}$	$6,00000001256 \cdot 10^{-7}$	$1,13097313539 \cdot 10^{-12}$	$1,13097313784 \cdot 10^{-12}$	$2,4444654284 \cdot 10^{-21}$
4	A	0	$1,13097302909 \cdot 10^{-19}$	$5,99999942316 \cdot 10^{-7}$	$1,13097313783 \cdot 10^{-12}$	-	-
5	$K_M = V_M/V_A = 1,00000009827$						

Продолжение табл. 5

№ п/п	Пузырек	θ_M°	$\sigma, \text{Н/м}$	$P_{KM}, P_{KA}, \text{Н/м}^2$	$P_{KM} \cdot V_M; P_{KA} \cdot V_A, \text{Дж}$	$\sigma \cdot \Pi_M, \sigma \cdot \Pi_A, \text{Дж}$	$\sigma(\Pi_M + \Pi_A), \text{Дж}$
1	2	9	10	11	12	13	14
1	M1	0,020	0,070	466666,66667	$5,2778746544 \cdot 10^{-14}$	$7,9168119477 \cdot 10^{-14}$	$7,9168119649 \cdot 10^{-14}$
2	M2	0,020	0,070	466666,66569	$5,2778746434 \cdot 10^{-14}$	$7,9168119477 \cdot 10^{-14}$	$7,9168119649 \cdot 10^{-14}$
3	M3	0,020	0,070	466666,66364	$5,2778746202 \cdot 10^{-14}$	$7,9168119477 \cdot 10^{-14}$	$7,9168119649 \cdot 10^{-14}$
4	A	0	0,070	466666,71153	$5,2778746432 \cdot 10^{-14}$	$7,9168119648 \cdot 10^{-14}$	-

Окончание табл. 4

№ п/п	Пузырек	$G_M, G_A, \text{Дж}$	$G_{MF}, \text{Дж}$	$\Delta G_\Gamma = G_M - G_A, \text{Дж}$	$\Delta G_\Phi = G_{MF} - G_A, \text{Дж}$	$\frac{\Delta G_\Gamma}{V}, \text{Дж/м}^3$	$\frac{\Delta G_\Phi}{V}, \text{Дж/м}^3$
1	2	15	16	17	18	19	20
1	M1	$1,3194686602 \cdot 10^{-13}$	$1,3194686619 \cdot 10^{-13}$	$-5,82 \cdot 10^{-23}$	$1,13 \cdot 10^{-22}$	-0,00051	0,00100
2	M2	$1,3194686591 \cdot 10^{-13}$	$1,3194686608 \cdot 10^{-13}$	$-1,69 \cdot 10^{-22}$	$2,42 \cdot 10^{-24}$	-0,0015	0,00002
3	M3	$1,3194686568 \cdot 10^{-13}$	$1,3194686585 \cdot 10^{-13}$	$-4,00 \cdot 10^{-22}$	$-2,29 \cdot 10^{-22}$	-0,0035	-0,0020
4	A	$1,3194686608 \cdot 10^{-13}$	-				

Примечание. Радиус кривизны в куполе пузырька $b = 3 \cdot 10^{-7}$ м.

Таблица 6

Параметры пузырьков различного размера, влияющие на их прилипание к подложке-частице

№ строк	Параметры	Экваториальные диаметры сидячих пузырьков d_e						
		3 мм	1 мм	100 мкм	30 мкм	3 мкм	1 мкм	600 нм
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$P_{кМ1}$, Н/м ²	93,3333	280,0000	2800,0000	9333,3333	93333,3333	280000,0000	466666,6667
2	$P_{кМ3}$, Н/м ²	76,1408	275,0154	2799,5104	9333,1865	93333,3186	279999,9951	466666,6636
3	$\Delta P_{кМ} = P_{кМ1} - P_{кМ3}$, Н/м ²	17,1925	4,9846	0,4896	0,1468	0,0147	0,0049	0,0031
4	$\Delta P_{кМ}$, %	18,4	1,78	$1,75 \cdot 10^{-1}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$1,58 \cdot 10^{-5}$	$1,75 \cdot 10^{-6}$	$6,64 \cdot 10^{-7}$
5	$P_{кМ2}$, Н/м ²	87,7052	278,3455	2799,8366	9333,2843	93333,3285	279999,9984	466666,6657
6	Приемлемые знаки, полученные с $P_{кМ2}$, строка 2	"-"	"-"	"-"	"-"	"-"	"-"	"-"
7	у $\Delta G_{Г}$ — в графе 17,	"+"	"+"	"+"	"+"	"+"	"+"	"-"
8	у $\Delta G_{Ф}$ — в графе 18							
9	Абсурдные знаки у $\Delta G_{Г}$, полученные с $P_{кМ1}$ в графе 17, строка 1	"+"	"+"	"+"	"+"	"+"		
10	Абсурдные знаки у $\Delta G_{Ф}$, полученные с $P_{кМ3}$ в графе 18, строка 3	"-"	"-"	"-"	"-"	"-"	"-"	
11	θ_M , град.	60,6	17,8	1,75	0,53	0,053	0,018	0,020
12	K_{θ} , K_a	1	1	1	2÷3	21÷34	90÷140	170÷270

Примечание. $P_{кМ}$ — капиллярные давления газа на различных уровнях пузырька M ; $\Delta G_{Г}$ и $\Delta G_{Ф}$ — приращения энергий пузырьков при их прилипании к гидрофобной (Г) и гидрофильной (Ф) подложкам (переход $A \rightarrow M$); θ_M — краевой угол смачивания; $K_{\theta} = \theta_2/\theta_1$; $K_a = a_2/a_1$ — коэффициенты растекания пузырьков, прилипших к поверхности подложки-частицы [8].

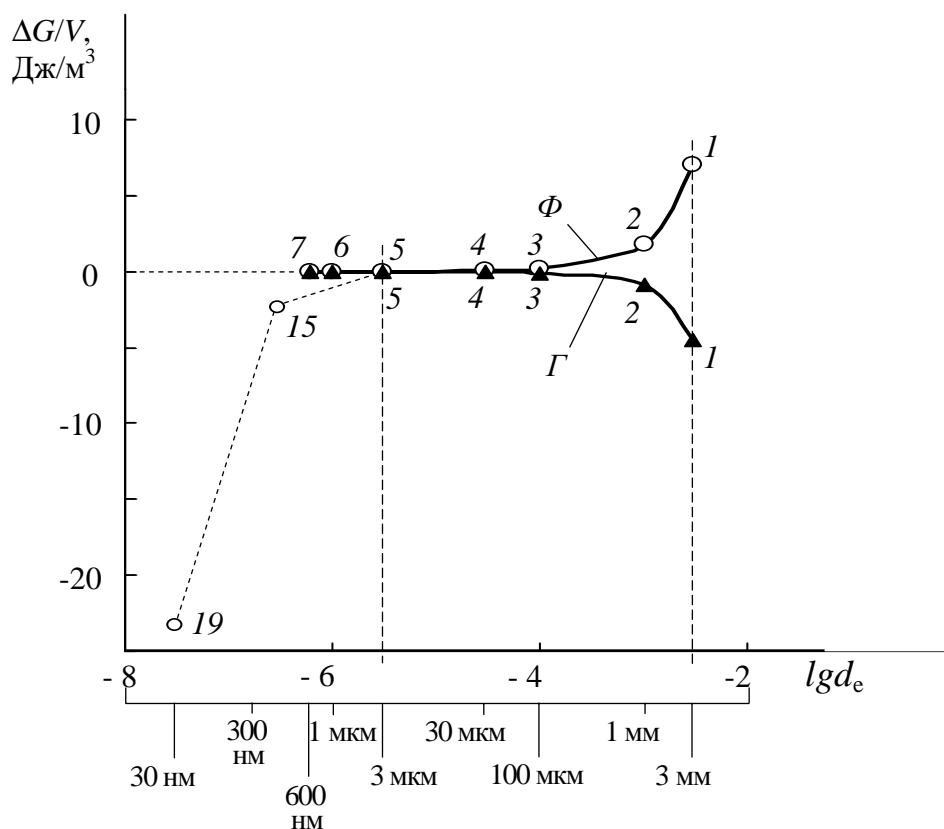


Рис. 2. Характер изменения удельной энергии $\Delta G/V$ от диаметра пузырьков при переходе $A \rightarrow M$ на гидрофобной (Γ) и гидрофильной (Φ) подложках. График построен по результатам расчетов на пузырьках диаметром от 3 мм до 600 нм. Треугольниками отмечены точки, соответствующие прилипанию пузырьков к подложке. Начиная с точки 6 (1 мкм), кривые (Γ) и (Φ) сливаются, т.е. пузырьки энергетически в равной мере могут прилипнуть как к гидрофобной, так и к гидрофильной поверхностям. Точки 15 и 19, заимствованные из [8, рис.2], ошибочны. Новая методика расчета перехода $A \rightarrow M$ изначально исключает такие погрешности

При переходе к пузырьку с $d_e = 1$ мм (графа 4) диапазон изменения $P_{кМ}$ сужается с 18,4 % до 1,78 %, а влияние $P_{кМ}$ на возможность прилипания сохраняется до пузырьков микронных размеров, когда они практически в равной мере могут энергетически прилипнуть, как к гидрофобной, так и к гидрофильной поверхности.

Из данных табл. 6 следует, что с уменьшением размера пузырька диапазон изменения $\Delta P_{кМ}$ сужается

практически до нуля, но величина $P_{кМ2}$ не выпадает из него. То есть, способ расчета капиллярного давления в пузырьке M , принятый для $P_{кМ2}$ (см.п.3.9), правильный. Небольшое отклонение от $P_{кМ2}$ в сторону $P_{кМ1}$ исключает прилипание, а снижение в сторону $P_{кМ3}$ способствует прилипанию. Отсюда следует, что $P_{кМ}$ является влиятельным фактором в процессе прилипания пузырька к подложке.

Возможно, что росту прилипаемости микронных пузырьков к твердой поверхности способствует уменьшение краевого угла θ_M до $0,02^\circ$ (см. строку 10), с которым он может закрепиться на твердой поверхности, и увеличение способности прилипшего пузырька к растеканию по твердой поверхности-частице (см. строку 11) [8].

На рис. 2 показан характер изменения удельной энергии $\Delta G/V$ от диаметра пузырьков при их переходе $A \rightarrow M$ на гидрофильной (Ф) и гидрофобной (Г) подложках.

Треугольниками отмечены точки, соответствующие прилипанию пузырьков к подложке. Начиная с точки 6 ($d_e = 1$ мкм), кривые (Г) и (Ф) сливаются, то есть, пузырьки энергетически могут прилипнуть в равной мере как к гидрофобной, так и к гидрофильной поверхностям.

Точки 15 и 19, рассчитанные ранее [8], ошибочны. Авторы сожалеют об этом. Ошибка произошла на стадии оценки величины капиллярного давления в пузырьке M и при оценке параметров пузырька A . Новая методика расчета (см. п.4) исключает такие погрешности.

Выводы


1. Установлено, что величина капиллярного давления газа в пузырьке является влиятельным фактором в процессе его прилипания к подложке-частице.

2. Найден способ расчета величины реального капиллярного давления в пузырьке M .

3. Энергетический барьер на пути перехода $A \rightarrow M$ к гидрофильным поверхностям заметно падает с уменьшением размера пузырька и достигает нуля в случае микронных пузырьков при $\sigma = 0,07$ Н/м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (продолжение)

8. Мелик-Гайказян В.И., Емельянов В.М., Емельянова Н.П., Емельянов В.В., Моисеев А.А., Юшина Т.И. К решению задач пенной

флотации на основе уравнений капиллярной физики // ГИАБ. — МГУ, 2011. — № 5. — С. 135—144. 

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Мелик-Гайказян Виген Иосифович – профессор, доктор химических наук,
Емельянова Нина Павловна – доцент, кандидат химических наук,
Юго-западный государственный университет, rector@swsu.ru,
Юшина Татьяна Ивановна – кандидат технических наук, доцент,
Московский государственный горный университет, ud@msmu.ru.

