

УДК 622.831.3.001.5

Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев, Ю.М. Ус, А.А. Потапенко
РАСЧЕТ ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ПРИ ТРЕХОСНОМ
СЖАТИИ ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД
И ПОСТОЯННОМ ЗНАЧЕНИИ КОНТАКТНЫХ
КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

*Метод расчета основан на критерии прочности материалов Кулона и теории линейной скольжения с учетом внешнего и внутреннего трения. Получена удовлетворительная сходимость расчетных результатов с экспериментальными данными.
Ключевые слова: порода, прочность, нормальные и касательные напряжения.*

В работе [1] разработан метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при линейной связи между контактными касательными τ_k и нормальными напряжениями σ_y согласно закону Кулона-Амонтона

$$\tau_k = f \sigma_y, \quad (1)$$

где f — коэффициент внешнего (контактного) трения.

При использовании этого закона возникают непреодолимые трудности точного интегрирования двух известных дифференциальных уравнений совместно с алгебраическим уравнением равновесия. Разработанные методы расчета предела прочности материала, основанные на этом принципе, не позволяют определять напряжения внутри материала [2].

Решение имеет место только в частном случае, когда поперечные напряжения σ_x равны продольным нормальным напряжениям σ_y и $d\sigma_y = d\sigma_x$, что и было использовано в работе [1].

В работах [3, 4] нами ранее была предпринята попытка использовать другой, более обоснованный подход к определению связи между напряжениями. В основу расчета распре-

деления нормальных напряжений был положен метод Грандтля, разработанный для широкой полосы. Доказано, что точное решение задачи с использованием двух дифференциальных и одного алгебраического уравнения равновесия обеспечивается при постоянном значении контактного касательного напряжения τ_{xy} . Принимаем, что касательное напряжение изменяется вдоль действия нормального сжимающего напряжения по зависимости

$$\tau_{xy} = \tau_k \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h}\right). \quad (2)$$

Принято считать [1], что при этом подходе достоверность обеспечивается вдали от боковых обнаженных граней, так как в граничные условия заложено сохранение их прямолинейности, что не позволяет соблюсти закон парности касательных напряжений.

В реальных условиях вследствие деформирования боковые грани приобретают выпуклую форму в силу выпучивания свободных, обнаженных (бочкообразных) поверхностей с углом ψ между касательной к бочке и исходной свободной поверхности (рис. 1).

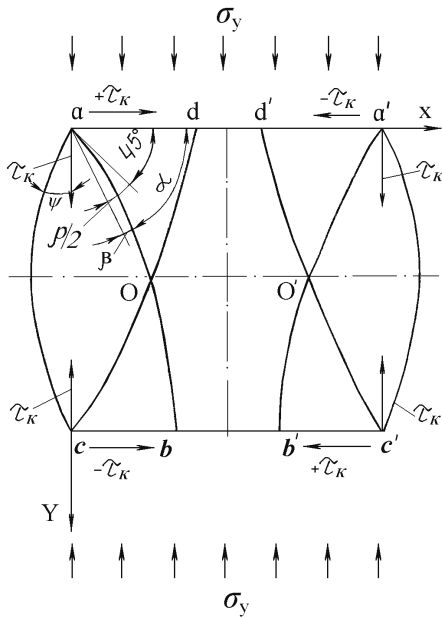


Рис. 1. Схема контактных нагрузок в образце горной породы при наличии внешнего трения

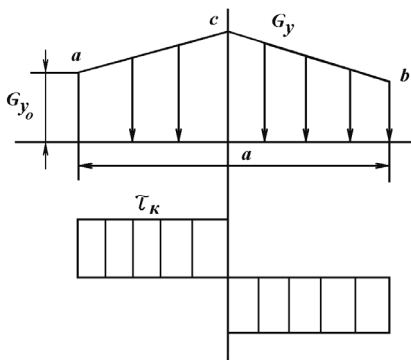


Рис. 2. Эпюры контактных нормальных σ_y и касательных τ_k напряжений

Это дает нам основание для применения закона парности касательных напряжений в приконтурной области образца. Получено, что теоретическое распределение нормальных напряжений при постоянном значении касательных напряжений имеет вид выпуклого треугольника (рис. 2), что

подтверждено многочисленными экспериментальными данными [2].

Распределение нормальных напряжений σ_y на контрактной поверхности описывается простой формулой

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{2f \cdot x}{h} \right), \quad (3)$$

где σ_{y0} — предел прочности в угловой точке а.

Сила контактного давления на единицу длины образца равна

$$P = 2 \int_0^{a/2} \sigma_{y0} \cdot \left(1 + \frac{2f \cdot x}{h} \right) dx = \sigma_{y0} \cdot a \cdot \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h} \right). \quad (4)$$

Удельное давление

$$p = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h} \right). \quad (5)$$

Теперь с учетом этих положений в данной статье предстоит разработать метод расчета предела прочности образцов горных пород при объемном нагружении, когда имеет место боковое внешнее нагружение $\sigma_2 = \sigma_3$ (контактное трение на боковых гранях отсутствует) при постоянном значении касательных напряжений на горизонтальной плоскости. Для разработки метода используем, как и раньше [1], критерий предельного состояния материалов с внутренним трением, по которому эффективные касательные напряжения по Кулону

$$\tau_s = \tau_\alpha - \mu \sigma_\alpha, \quad (6)$$

где τ_α и σ_α — активные касательные и нормальные напряжения на наклонной плоскости, μ — коэффициент внутреннего трения.

Учтем внешнее трение между контактируемыми поверхностями.

Направление элементарных сил трения на контактной поверхности образца, и, следовательно, касательных напряжений, примем против деформаций. Оговорим правило знаков касательных напряжений. Касательные напряжения принимаются положительными, если они направлены вдоль одной из осей координат, а нормальные сжимающие напряжения — вдоль другой оси. Из этого следует, что на верхней левой половине образца касательные напряжения имеют положительный знак, а нижней — отрицательный. На правой половине — наоборот.

Значения τ_α и σ_α определяются из известных выражений [1, 5]

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_\kappa \cos 2\alpha, \quad (7)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \cos 2\alpha - \tau_\kappa \sin 2\alpha. \quad (8)$$

Подставив выражения (7) и (8) в формулу (6) и продифференцировав по α , находим выражение для определения наклона траектории максимальных касательных напряжений (линии скольжения), на которой эффективные касательные напряжения имеют максимальные значения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y) - 2\mu\tau_\kappa}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) + 2\tau_\kappa}. \quad (9)$$

Используя выражение (9), находим тригонометрические функции $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, после подстановки которых в выражение (7), имеем

$$\tau_\alpha = \frac{\operatorname{Cosp}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_\kappa^2}. \quad (10)$$

Далее продифференцируем по α выражение (8). После подстановки в полученную формулу тригонометрических функций получаем

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\operatorname{Cosp} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_\kappa^2}. \quad (11)$$

Из сравнения выражений (10) и (11) вытекает, что

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha. \quad (12)$$

По закону Кулона активные касательные напряжения τ_α равны сопротивлению материала сдвигу с учетом внутреннего трения с обратным знаком. С учетом этого, подставив значение из уравнения (6) в (12), имеем важное дифференциальное уравнение равновесного состояния на линии ξ

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2(k + \mu\sigma_\alpha), \quad (13)$$

где k — текущее значение сопротивления материала внешнему касательному напряжению на линии скольжения.

Аналогично поступим с выражениями на линии скольжения η , угол наклона которой равен $\pi - \alpha$. Получим уравнение (13) со знаком минус множителя $(k + \mu\sigma_\alpha)$.

Решение уравнения (13) сводится к решению интеграла на линии скольжения ξ между точками a и b

$$\int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} \frac{d(k + \mu\sigma_\alpha)}{\mu} = 2 \int_{\alpha_b}^{\alpha_a} d\alpha. \quad (14)$$

Как видно, для решения этого уравнения нужно знать значения касательных напряжений k , нормальных напряжений σ_α и углов α наклона линий скольжения в точках a и b .

На основании тригонометрических функций из уравнения (8) имеем

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\operatorname{Sinp}}{2} \times \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_\kappa^2}. \quad (15)$$

Для определения суммы и подрадикального выражения найдем уравнение равновесия путем подстановки тригонометрических функций в выражение (6) получим:

$$\tau_y = k = \frac{\text{Cosp}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2} - \mu \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \quad (16)$$

Откуда радикальное выражение имеет вид

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2} = \frac{2k + \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{\text{Cosp}} \quad (17)$$

Для определения суммы $(\sigma_x + \sigma_y)$ используем соотношение между поперечными и продольными нормальными напряжениями из работы [6]. На основании чего имеем

$$\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} = \frac{(k + \mu\sigma_y)}{\text{Cosp}} (\text{Sinp} - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y, \quad (18)$$

$$\text{где } b = \frac{\tau_k}{k + \mu\sigma_y} \quad (19)$$

С учетом формул (17) и (18) преобразуем уравнение (15) к виду

$$\sigma_a = \sigma_y (1 - \text{Sinp} \sqrt{1 - b^2}) - k \cdot \text{Cosp} \cdot \sqrt{1 - b^2}.$$

Тогда нормальное напряжение в точке b на линии ξ

$$\sigma_{\alpha_b} = \sigma_y (1 - \text{Sinp} \cdot \sqrt{1 - b_b^2}) - k \cdot \text{Cosp} \cdot \sqrt{1 - b_b^2}. \quad (20)$$

Теперь, в отличие от одноосной нагрузки [4], учтем внешнюю нагрузку σ_2 .

Тогда нормальное напряжение в точке a на линии ξ составит

$$\sigma_{\alpha_a} = \sigma_2 (1 + \text{Sinp} \cdot \sqrt{1 - b_a^2}) + k_a \cdot \text{Cosp} \cdot \sqrt{1 - b_a^2}. \quad (21)$$

Теперь предстоит найти углы наклона α_a и α_b из выражения (9).

Преобразуем его к виду

$$\text{tg} 2\alpha = - \frac{1 - \frac{2\mu\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}}{\mu + \frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}} \quad (22)$$

Обозначим составляющую $\frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}$ через $\text{tg} 2\beta$.

$$\text{Тогда, } \beta = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (23)$$

Как видно, для расчета угла β нужно знать разность $\sigma_x - \sigma_y$, которая определяется из уравнения (18)

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2(k + \mu\sigma_y)}{\text{Cosp}} \times (\text{Sinp} - \sqrt{1 - b^2}). \quad (24)$$

Тогда, с учетом (19) угол

$$\beta = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{b \cdot \text{Cosp}}{\text{Sinp} - \sqrt{1 - b^2}}. \quad (25)$$

Угол поворота линии скольжения в точке b от касательных напряжений

$$\beta_b = \frac{1}{2} \text{arctg} \times \frac{-\tau_k \cdot \text{Cosp}}{(k_b + \mu\sigma_y)(\text{Sinp} - \sqrt{1 - b_b^2})}, \quad (26)$$

а в точке a –

$$\beta_a = \frac{1}{2} \text{arctg} \times$$

$$\times \frac{\tau_x \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h}\right) \text{Cosp}}{(k_n + \mu\sigma_y) (\text{Sin}p - \sqrt{1 - b_a^2})}. \quad (27)$$

Преобразуя выражение (22), находим α :

$$\alpha = 45 + \frac{\rho}{2} + \beta. \quad (28)$$

Угол наклона линии скольжения в точке a составит:

$$\alpha_a = 45 + \frac{\rho}{2} - \beta_a. \quad (29)$$

Угол β_a имеет отрицательный знак при $\sqrt{1 - b_a^2} > \text{Sin}p$. Угол β_b имеет положительный знак.

Поэтому угол α_b наклона линии скольжения в точке b

$$\alpha_b = 45 + \frac{\rho}{2} + \beta_b. \quad (30)$$

Тогда имеем общий угол поворота линии скольжения между точками b и a с учетом знаков β_b и β_a за счет разности α_b и α_a

$$\alpha_{ba} = \beta_b + \beta_a. \quad (31)$$

Тогда из решения интеграла (14) с учетом (20), (21) и (31) имеем

$$\frac{k_b + \mu\sigma_y \cdot \left(1 - \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_b^2}\right) + k_a + \mu\sigma_2 \cdot \left(1 + \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_a^2}\right) + k_b \cdot \text{Cosp} \cdot \sqrt{1 - b_b^2}}{k_a \cdot \text{Cosp} \cdot \sqrt{1 - b_a^2}} = e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)} \quad (32)$$

Используя выражения (14, 32), и опуская громоздкие преобразования, получим систему уравнений для расчета нормального сжимающего напряжения в угловой точке a образца горных пород на линии ξ при трехосном сжатии

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{y0} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{(k_n + \mu\sigma_2) (1 + \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_a^2})}{(1 - \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_a^2})} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{2\mu(\beta_b + \beta_a) - k_b} \right] \\ k_b &= \frac{(k_n + \mu\sigma_y) (1 - \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_a^2})}{(1 + \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_a^2})} \cdot e^{4\mu\beta_b} - \mu\sigma_2 \end{aligned} \right. \quad (33)$$

В зависимости от направления образования трещины, например, в направлении от точки a в точку b , в вершине трещины $k_a = k_n$ — пределу сопротивления материала чистому сдвигу, в точке b — $k_b < k_n$.

С учетом распределения нормальных напряжений на контактной плоскости находим удельное давление, фиксируемое на прессе при раздавливании образцов горных пород при трехосном нагружении согласно (5)

$$p = \frac{1}{\mu} \left[\frac{(k_n + \mu\sigma_2) (1 + \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_a^2})}{(1 - \text{Sin}p \cdot \sqrt{1 - b_a^2})} \times \right. \\ \left. \times e^{2\mu(\beta_b + \beta_a) - k_b} \cdot \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h}\right) \right]. \quad (34)$$

Для определения предельного напряжения в точке d для линии скольжения η показатель экспоненты имеет знак минус.

Теперь определим достоверность расчетных значений с экспериментальными данными [7]. Поскольку характеристик физико-механических свойств автором не приведено, подберем их из условий согласования значений теоретического расчета с экспериментальными значениями при одноосном сжатии ($\sigma_2 = 0$). Так для

Таблица

Сравнение расчетных значений предела прочности с экспериментальными данными

σ_2 — боковое напряжение, МПа	P — расчетное продольное напряжение, МПа	$\sigma_{сж}$, экспериментальное значение предела прочности, МПа	Литература	Ошибка расчета, %	Средняя ошибка расчета, %
0	194	165	Рис. 73 [7]	7,57	9,00
0,5	197	210		6,19	
10	248	240		3,33	
25	329	315		4,44	
50	464	440		5,45	
100	733	600		22,16	
150	1002	880		13,86	
0	136	141	Рис. 74 [7]	3,54	11,09
5	162	175		7,42	
10	187	190		1,57	
25	262	265		1,13	
50	388	355		9,29	
100	639	445		43,59	

рис. 73 [7] принято $k_n = 35.0$ МПа, $\mu = 1$, $f=0,35$, а для рис. 74 [7] $k_n = 30.0$ МПа, $\mu = 1$, $f=0,35$.

Результаты расчета сведем в таблицу.

Сопоставление расчетных значений предела прочности с экспериментальными при объемном сжатии образцов двух типов пород свидетельствует, что средняя ошибка составила 9,96 %, что подтверждает высокую сходимость с экспериментальными данными разработанного метода.

Вывод

Разработан метод расчета предела прочности образцов горных пород при трехосном сжатии и постоянном контактом касательном напряжении от внешнего трения с использованием двух дифференциальных и одного алгебраического уравнения. При предельном значении сжимающего на-

пряжения в точках а или б при $\tau_3 = k\mu$ возникает трещина. В других областях материал деформируется упруго.

Применение разработанного метода расчета предела прочности горных пород при объемном сжатии при практических расчетах позволит повысить достоверность расчетных результатов с экспериментальными данными по сравнению с ранее разработанными методами. Сходимость составила около 90 %.

В перспективе покажем, что трещина может развиваться только при увеличении продольной деформации, что позволяет рассчитать нормальные напряжения σ_u внутри материала в вершине трещины по мере ее движения и построить диаграммы «напряжение-продольная деформация» при трехосном сжатии образца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. АСУ на промышленном предприятии: *Васильев Л.М., Васильев Д.Л.* Метод расчета предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями // *Геотехническая механика*. Выпуск 42, Днепропетровск, 2003. — С 42–48.
2. *Сторожев М.В., Попов Е.А.* Теория обработки металлов давлением. —М.: Машиностроение, 1977. — 423 с.
3. *Васильев Д.Л.* Метод расчета распределения нормальных контактных напряжений в образцах горных пород при постоянном значении контактного трения // *Геотехническая механика*. Выпуск 44, Днепропетровск, 2003, — С 37–44.
4. *Васильев Д.Л.* Метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при постоянстве контактного касательного напряжения // *Збірник наукових праць НГУ № 33* — Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2009, — С 111–117.
5. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.
6. *Васильев Д.Л.* Метод расчета горизонтальных напряжений в массивах горных пород // *Геотехническая механика*. Выпуск 29, Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2002, — С 161–165.
7. *Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г.* Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. М.: Недра, 1985.—271 с. **ГЛАС**

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Васильев Л.М. — доктор технических наук, профессор, зав. отделом проблем разрушения горных пород,
Васильев Д.Л. — кандидат технических наук, научный сотрудник,
Ус Ю.М. — инженер,
Потапенко А.А. — аспирант,
Институт геотехнической механики НАНУ, г. Днепропетровск.



РУКОПИСИ, ДЕПОНИРОВАННЫЕ В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «ГОРНАЯ КНИГА»

**АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ОПЕРАЦИЕЙ ЧЕРПАНИЯ КАРЬЕРНОГО
ЭКСКАВАТОРА-МЕХЛОПАТЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ**
(№920/09-12 от 01.06.12, 11 с.)

Певзнер Л.Д. — доктор технических наук, профессор,
Бабаков С.Е. — аспирант,
Московский государственный горный университет.

**CONTROL ALGORITHM OF QARRY POWER SHOVEL DIGGING OPERATION
BASED ON FUZZY LOGIC**

Pevzner L.D., Babakov S.E.