

УДК 622.831:539.3

В.Е. Миренков, А.А. Красновский
ДЕФОРМИРОВАНИЕ БЛОКА ПОРОД,
ОСЛАБЛЕННОГО ТРЕЩИНОЙ*

Рассмотрена задача расклинивания блока пород, ослабленного трещиной, выходящей на границу. Получены сингулярные интегральные уравнения по определению нормальных и касательных напряжений на продолжении разреза, моделирующего трещину. Обсуждаются результаты численного счета.

Ключевые слова: блок пород, трещина, берега, напряжения, смещения, сингулярные уравнения, граница, контакт, расклинивание.

Численный эксперимент при рассмотрении сложных задач приобрел в настоящее время практически равные права с традиционным физическим экспериментом. Среди достаточно общих численных методов нужно отметить такие как: вариационный метод, метод конечного элемента, разностные методы, метод разделения переменных, метод интегральных преобразований. При всей важности и определенной эффективности таких подходов им присущи разного рода недостатки, значительно ограничивающие области их эффективного применения. Значительные успехи, достигнутые в применении численных методов к решению задач для конечных областей, не снимают проблему разработки эффективных методик, сочетающих строгость аналитических методов и мощь современных вычислительных машин. Верно и обратное, эти методики и полученные с их помощью результаты важны для развития численных методов, так как позволяют создать наборы специальных тестов для отладки и подтверждения достоверности алгоритмов и программ, основанных на численных методах. Свои нюансы, связанные с точностью решения, имеются всегда и при любой численной реализации.

В механике разрушения интересно проследить за процессом деформирования при разделении целого на неравные части. Предлагается рассматривать расклинивание блока пород с трещиной, выходящей на границу, на несимметричные части. Этот случай принципиально отличается от случая разделения тела на равные части, так как необходимо учитывать еще и касательные напряжения, возникающие на продолжении разреза. Известные аналитические подходы при исследовании тел с трещинами [1—4] предполагают простейший вариант поведения напряжений на продолжении разреза — условие равенства нулю касательных напряжений, т.е. $\tau = 0$.

Рассмотрим расчетную схему, приведенную на рис. 1. Составляющие блок пород части Ω_1 и Ω_2 ограничены, соответственно, контурами $\Gamma_1 = \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{13} + \Gamma_{14}$ и $\Gamma_2 = \Gamma_{21} + \Gamma_{22} + \Gamma_{23} + \Gamma_{24}$. Величины, имеющие размерность длины, отнесены к характерной длине $\Omega_1 + \Omega_2$, а раз-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-05-00133).

мерность напряжений к характерной величине расклинивающих напряжений. Возникает проблема связать все четыре компоненты нормальных и касательных напряжений и смещений, отвечающих всем трем основным задачам единой системой уравнений, которая в общем случае имеет вид [5]

$$f(t_0) + 2\mu g(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt,$$

$$k\overline{f(t_0)} - 2\mu\overline{g(t_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{k\overline{f(t)} - 2\mu\overline{g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_m} (f(t) + 2\mu g(t)) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}, \quad (1)$$

где k , μ — механические характеристики материала; $g = u + i v$; u , v — компоненты смещений границы рассматриваемой области в направлении осей x и y , соответственно;

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + i Y_n) ds = Re(f) + i Im(f), \quad (2)$$

X_n , Y_n — усилия на $\Gamma = \Gamma_i$, $i = 1, 2$ в направлении осей x и y ; $t \in \Gamma = \Gamma_i$, $i = 1, 2$, t_0 — аффикс точки границы; черточка над функцией обозначает комплексно сопряженное значение; i — мнимая единица.

Граничные условия задачи сформулируем в виде

$$\sigma_x(y) = \sigma_0(y), \quad \tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_{12} \text{ и } \Gamma_{24} \text{ для } h_1 \leq y \leq h;$$

$$\sigma_x(y) = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_{12} \text{ и } \Gamma_{24} \text{ для } h_2 \leq y \leq h_1; \quad (3)$$

$$\sigma_n = \tau_n = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 - \Gamma_{12} \text{ и } \Gamma_2 - \Gamma_{24}.$$

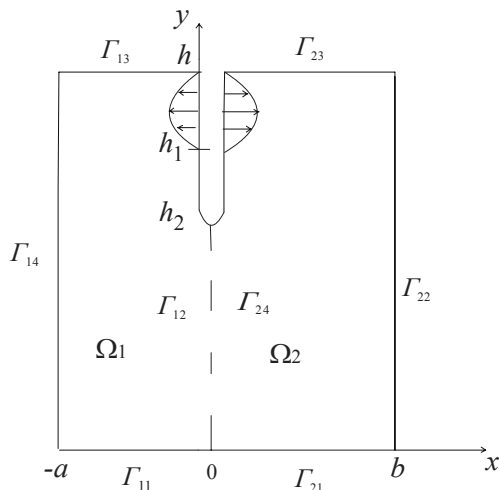


Рис. 1. Расчетная схема блока пород с трещиной

Здесь σ_n , τ_n — нормальные и касательные напряжения на границе. Решение задачи (1) — (3) однозначно определяет компоненты смещений на границе области $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, которые вычисляются аналогично тому, как это сделано в [3].

Основной интерес представляют компоненты смещений и напряжений на продолжении разреза, которые непрерывны при переходе из области \mathcal{U}_1 в \mathcal{U}_2 для $0 \leq y \leq h_2$. Рассмотрим части \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 по отдельности и для общей части контуров Γ_{12} и Γ_{24} выпишем, исходя из (1) — (3) компоненты смещений в виде

$$\begin{aligned}
u_{12}(y) = & \frac{k-1}{4\mu} f_{121}(y) + \frac{k+1}{4\mu} \int_0^h \frac{f_{122}(s)}{s-y} ds + \frac{1}{\pi} \left\{ y \int_{-a}^0 \frac{u_{11}(s)}{s^2+y^2} ds - a \int_0^h \frac{u_{14}(s)}{a^2+(s-y)^2} ds - \right. \\
& -(h-y) \int_0^{-a} \frac{u_{13}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds + y \int_{-a}^0 \frac{(s^2-y^2)u_{11}(s) - 2ysu_{11}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds - \\
& \left. - 2a \int_0^h \frac{[a^2-(s-y)^2] u_{14}(s) - 2\mathfrak{A}(s-y)u_{14}(s)}{[a^2+(s-y)^2]^2} ds - (h-y) \int_0^{-a} \frac{[s^2-(h-y)^2] u_{13}(s) + 2\mathfrak{A}(h-y)u_{13}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds \right\}, \quad (4) \\
u_{12}(y) = & \frac{k-1}{4\mu} f_{122}(y) - \frac{k+1}{4\mu} \int_0^h \frac{f_{121}(s)}{s-y} ds + \frac{1}{\pi} \left\{ y \int_{-a}^0 \frac{u_{11}(s)}{s^2+y^2} ds - a \int_0^h \frac{u_{14}(s)}{a^2+(s-y)^2} ds - \right. \\
& -(h-y) \int_0^{-a} \frac{u_{13}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds - y \int_{-a}^0 \frac{2ysu_{11}(s) + (s^2-y^2)u_{11}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds + \\
& \left. + 2a \int_0^h \frac{2\mathfrak{A}(s-y)u_{14}(s) + [a^2-(s-y)^2]u_{14}(s)}{[a^2+(s-y)^2]^2} ds - (h-y) \int_0^{-a} \frac{2\mathfrak{A}(h-y)u_{13}(s) - [s^2-(h-y)^2]u_{13}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds \right\},
\end{aligned}$$

где $0 \leq y \leq h$;

$$\begin{aligned}
u_{24}(y) = & \frac{k-1}{4\mu} f_{241}(y) + \frac{k+1}{4\mu} \int_h^0 \frac{f_{242}(s)}{s-y} ds + \frac{1}{\pi} \left\{ y \int_0^b \frac{u_{21}(s)}{s^2+y^2} ds + b \int_0^h \frac{u_{22}(s)}{b^2+(s-y)^2} ds - \right. \\
& -(h-y) \int_b^0 \frac{u_{23}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds + y \int_0^b \frac{(s^2-y^2)u_{21}(s) - 2ysu_{21}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds + \\
& \left. + 2b \int_0^h \frac{[b^2-(s-y)^2] u_{22}(s) + 2\mathfrak{A}(s-y)u_{22}(s)}{[b^2+(s-y)^2]^2} ds - (h-y) \int_b^0 \frac{[s^2-(h-y)^2] u_{23}(s) + 2\mathfrak{A}(h-y)u_{23}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds \right\}, \quad (5) \\
u_{24}(y) = & \frac{k-1}{4\mu} f_{242}(y) - \frac{k+1}{4\mu} \int_h^0 \frac{f_{241}(s)}{s-y} ds + \frac{1}{\pi} \left\{ y \int_0^b \frac{u_{21}(s)}{s^2+y^2} ds + b \int_0^h \frac{u_{22}(s)}{b^2+(s-y)^2} ds - \right. \\
& -(h-y) \int_b^0 \frac{u_{23}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds - y \int_0^b \frac{2ysu_{21}(s) + (s^2-y^2)u_{21}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds + \\
& \left. + 2b \int_0^h \frac{2\mathfrak{A}(s-y)u_{22}(s) - [b^2-(s-y)^2]u_{22}(s)}{[b^2+(s-y)^2]^2} ds - (h-y) \int_b^0 \frac{2\mathfrak{A}(h-y)u_{23}(s) - [s^2-(h-y)^2]u_{23}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

где $0 \leq y \leq h$.

В силу непрерывности компонент смещений при переходе из \mathcal{H}_1 в \mathcal{H}_2 через отрезок $x = 0$, $0 \leq y \leq h_2$, т.е.

$$u_{12}(y) = u_{24}(y), \quad u_{12}(y) = u_{24}(y), \quad 0 \leq y \leq h_2,$$

из (4) и (5) получим

$$\begin{aligned} & \frac{k+1}{2\mu} \int_0^h \frac{f_{122}(s)}{s-y} ds = y \left[\int_0^b \frac{u_{21}(s)}{s^2+y^2} ds - \int_{-a}^0 \frac{u_{11}(s)}{s^2+y^2} ds \right] + a \int_0^b \frac{u_{14}(s)}{s^2+y^2} ds + b \int_0^h \frac{u_{22}(s)}{b^2+(s-y)^2} ds + \\ & + (h-y) \left[\int_0^{-a} \frac{u_{13}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds + \int_b^0 \frac{u_{23}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds \right] + y \int_0^b \frac{(s^2-y^2)u_{21}(s) - 2ysu_{21}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds - \\ & - \int_0^b \frac{(s^2-y^2)u_{11}(s) - 2ysu_{11}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds + 2a \int_h^0 \frac{[a^2-(s-y)^2]u_{12}(s) - 2s(s-y)u_{12}(s)}{[a^2+(s-y)^2]^2} ds + \\ & + 2b \int_0^h \frac{[b^2-(s-y)^2]u_{22}(s) + 2s(s-y)u_{22}(s)}{[b^2+(s-y)^2]^2} ds + (h-y) \int_b^0 \frac{[s^2-(h-y)^2]u_{23}(s) + 2s(h-y)u_{23}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds + \\ & + \int_0^{-a} \frac{[s^2-(h-y)^2]u_{13}(s) + 2s(h-y)u_{13}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds, \quad (6) \\ & \frac{k+1}{2\mu} \int_0^h \frac{f_{121}(s)}{s-y} ds = -y \left[\int_0^b \frac{u_{21}(s)}{s^2+y^2} ds - \int_{-a}^0 \frac{u_{11}(s)}{s^2+y^2} ds \right] - b \int_0^h \frac{u_{22}(s)}{b^2+(s-y)^2} ds - a \int_0^h \frac{u_{12}(s)}{a^2+(s-y)^2} ds + \\ & + (h-y) \left[\int_b^0 \frac{u_{23}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds - \int_0^{-a} \frac{u_{23}(s)}{s^2+(h-y)^2} ds \right] + y \int_0^b \frac{2ysu_{21}(s) + (s^2-y^2)u_{21}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds - \\ & - \int_{-a}^0 \frac{2ysu_{11}(s) + (s^2-y^2)u_{11}(s)}{[s^2+y^2]^2} ds - 2b \int_0^h \frac{2(s-y)u_{22}(s) - [b^2-(s-y)^2]u_{22}(s)}{[b^2+(s-y)^2]^2} ds + \\ & + 2a \int_h^0 \frac{2(s-y)u_{12}(s) + [a^2-(s-y)^2]u_{12}(s)}{[a^2+(s-y)^2]^2} ds + (h-y) \int_b^0 \frac{2s(h-y)u_{23}(s) - [s^2-(h-y)^2]u_{23}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds - \\ & - \int_0^{-a} \frac{2s(h-y)u_{13}(s) - [s^2-(h-y)^2]u_{13}(s)}{[s^2+(h-y)^2]^2} ds. \end{aligned}$$

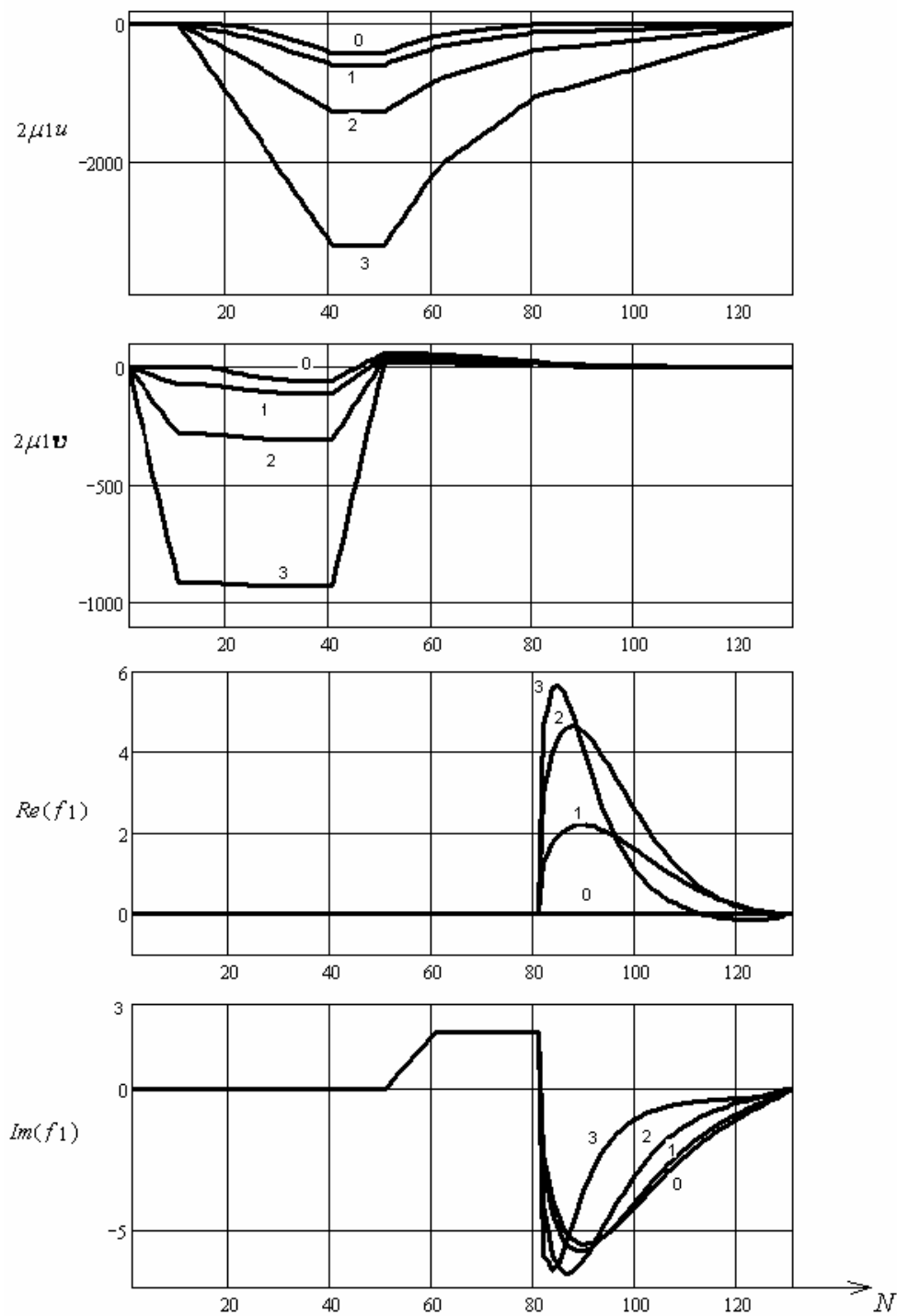


Рис. 2. Деформирование части \parallel_1 блока пород с трещиной

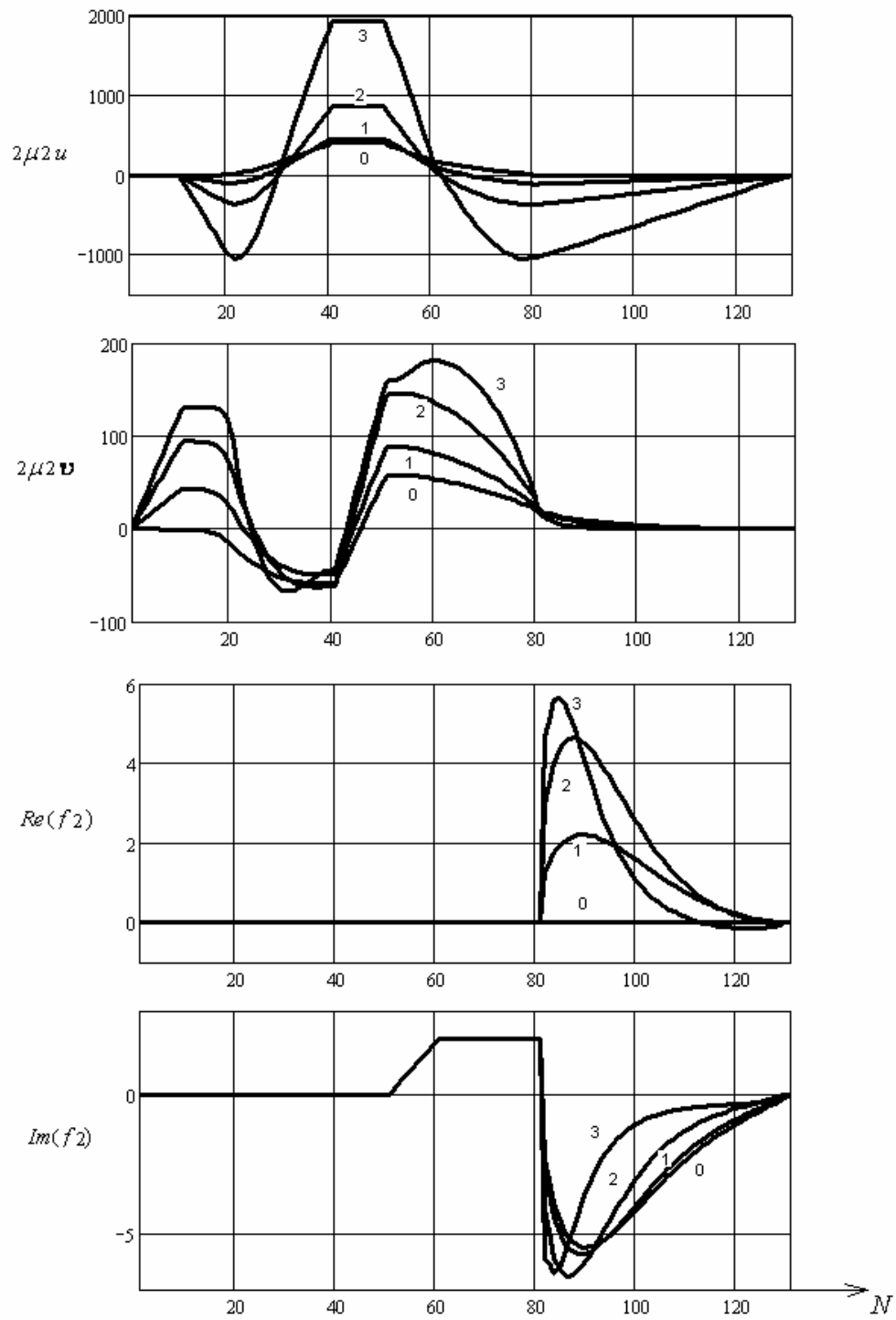


Рис. 3. Деформирование части λ_2 блока пород с трещиной

Система (6) связывает искомые действительные ($Re f$) и мнимые ($Im f$) значения $f(y)$ на продолжении разреза ($0 \leq y \leq h_2$) через компоненты смещений на $\Gamma_1 - \Gamma_{12}$, $\Gamma_2 - \Gamma_{24}$, т.е. на части периметра $\not\parallel$ вне разреза. Не будем дифференцировать полученные из (6) значения

$$f_{121}(y) = Re f, \quad f_{122}(y) = Im f, \quad 0 \leq y \leq h_2,$$

так как теряется точность вычисления $X_n = \sigma_x(y)$ и $Y_n = \tau(y)$ при численном дифференцировании (2).

Продифференцировав уравнения (6) по y , получим

$$\frac{k+1}{2\mu} \int_0^{h_2} \frac{\sigma_x(s)}{s-y} ds = \frac{d}{dy} \left[F_1(y) - \frac{k+1}{2\mu} \int_{h_2}^h \frac{f_{121}(s)}{s-y} ds \right], \quad (7)$$

$$\frac{k+1}{2\mu} \int_0^{h_2} \frac{\tau(s)}{s-y} ds = -\frac{d}{dy} F_2(y).$$

где $F_1(y)$, $F_2(y)$ — соответственно, правые части уравнений (6).

Таким образом, исходная задача о деформировании блока пород с трещиной (рис. 1) сводится к решению системы (1), (3) для всего блока пород, т.е. определяются компоненты смещений контура в целом. Для вычисления функций f_{41} и f_{42} используется система (6), а для нахождения нормальных и касательных напряжений на участке $x=0$, $0 \leq y \leq h_2$ необходимо воспользоваться системой (7).

На рис. 2 представлены значения компонент смещений, а также действительных и мнимых частей функции $f(y)$ для части блока пород один (рис. 1). Смещения для части два иллюстрирует рис. 3. В расчетах принималось $k=2.077$, $\mu=1.923 \cdot 10^5$, $h=6$, $h_1=5$, $h_2=2$, $a=1$, $\sigma_0=1$. Кривые на рис. 2 – 3 отвечают случаям: 0 – $b=a$; 1 – $b=0.6a$; 2 – $b=0.25a$; 3 – $b=0.125$. Границы Γ_1 и Γ_2 развернуты в прямую линию так, что Γ_{11} (Γ_{21}) отвечают точки от 1 до 11, Γ_{12} (Γ_{22}) — от 11 до 41, Γ_{13} (Γ_{23}) — от 41 до 51, Γ_{14} (Γ_{24}) — от 51 до 130. Уменьшение величины “ b ” приводит к росту компонент смещений.

Как следует из рис. 2, нормальные и касательные напряжения $\sigma_x(y)$, $\tau(y)$ на продолжении разреза имеют переменную знака. Существенно, что координата обращения напряжений $\sigma_x(y)$, $\tau(y)$ в ноль, с уменьшением величины “ b ” растет, приближаясь к вершине трещины. При этом наблюдается высокая концентрация растягивающих напряжений в окрестности вершины, приближаясь к критической, после чего, для данной геометрии образца и граничных условий, происходит рост трещины.

Используя результаты, представленные на рис. 2—3, и граничные условия (3) можно полностью определить правые части уравнений (7). Обратить уравнения (7), относительно $\sigma_x(y)$, $\tau(y)$, согласно [6] невозможно. Учитывая, что наибольший интерес представляет аналитическое нахождение напряжений в окрестности вершины, то метод определения их сводится к следующему. Разбиваем интегралы в левых частях (6) на два — от нуля до значений y_1 и y_2 (координаты обращения в ноль σ_x и τ) и от y_1 и y_2 до h_2 . Оставляя эти последние интегралы слева, перенесем первые в левые части так, что к $F_1(y)$ и $F_2(y)$ добавятся, соответственно, известные величины $\Delta_1(y)$ и $\Delta_2(y)$.

Окончательно получим

$$\frac{k+1}{2\mu} \int_{y_1}^{h_2} \frac{\sigma_x(s)}{s-y} ds = \frac{d}{dy} \left[F_1(y) + \Delta_1(y) - \frac{k+1}{2\mu} \int_{h_2}^y \frac{f_{121}(s)}{s-y} ds \right] = N_1, \quad (8)$$

$$\frac{k+1}{2\mu} \int_{y_2}^{h_2} \frac{\tau(s)}{s-y} ds = -\frac{d}{dy} [F_2(y) + \Delta_2(y)] = N_2.$$

Вот теперь, следуя [6], обратим уравнение (8), получим

$$\frac{k+1}{2\mu} \sigma_x(y) = -\frac{\sqrt{(h_2-y)(y-y_1)}}{\pi} \int_{y_1}^{h_2} \frac{N_1(s)}{\sqrt{(h_2-s)(s-y_1)}} \frac{ds}{s-y}, \quad (9)$$

$$\frac{k+1}{2\mu} \tau(y) = -\frac{\sqrt{(h_2-y)(y-y_1)}}{\pi} \int_{y_2}^{h_2} \frac{N_2(s)}{\sqrt{(h_2-s)(s-y_1)}} \frac{ds}{s-y},$$

при выполнении условий

$$\int_{y_1}^{h_2} \frac{N_1(y)}{\sqrt{(h_2-y)(y-y_1)}} dy = 0, \quad \int_{y_2}^{h_2} \frac{N_2(y)}{\sqrt{(h_2-y)(y-y_2)}} dy = 0. \quad (10)$$

Если условия (10) не выполняются, то решение для σ_x и τ имеет корневую особенность при $y = h_2$.

Таким образом, получены уравнения, допускающие численную реализацию по определению компонент напряжений и смещений всюду на границе блока пород и внутри на продолжении трещины. Это позволяет использовать как силовой так и деформационный критерии для определения момента страгивания трещины. Условность всех таких критериев очевидна, если посмотреть на кривую 3 (рис. 2, 3). Действительно, смещения достигают больших величин в окрестности приложения внешней нагрузки и очень неустойчивы к любому возмущению в перпендикулярном плоскости xy направлении. Это приводит к периодическому процессу перекачки энергии, подводимой к участку $h_1 \leq y \leq h$, и колебанию образца в целом или более неустойчивой его части (рис. 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И., Христианович С.А. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 11. — с. 73—86.
2. Михлин С.Г. О напряжениях в породе над угольным пластом // Изв. АН СССР, ОТН. — 1942 — № 7—8. с. 13—28.
3. Керштейн И.М., Ключников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А. Основы экспериментальной механики разрушения // М.: Изд-во Московского университета. — 1989. — 140 с.
4. Нотт Дж. Ф. Основы механики разрушения // М.: Metallurgia. — 1978. — 250 с.
5. Красновский А.А., Миренков В.Е., Шутов В.А. К вопросу о разрушении блоков пород // ФТПРПИ. — Новосибирск: Наука — 2006. — № 2. — с. 10—17.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения // М.: Наука. — 1967. — 607 с. **ИДБ**

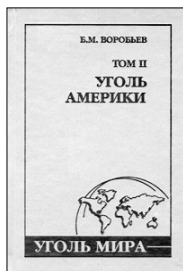
КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Миренков В.Е. — доктор технических наук, главный научный сотрудник,
mirenkov@misd.nsc.ru,

Красновский А.А. — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт горного дела СО РАН.



ГОРНАЯ КНИГА



Уголь мира. Том II. Уголь Америки

Б.М. Воробьев

2012 г.

486 с.

ISBN: 978-5-98672-171-2

UDK: 622.33

Настоящее издание — том II монографического сериала «Уголь Мира», в котором рассмотрены вопросы, связанные с добычей, переработкой и использованием угля в странах Западного полушария. Описаны состояние и перспективы развития угольной промышленности стран Северной и Южной Америки. Освещены технические, экономические, экологические и социальные проблемы угледобычи и углепользования. Уделено внимание ресурсной базе угольной промышленности, охране окружающей среды в связи с добычей и использованием угля, а также международной торговле углем. Представлены новые концепции углеэнергетических предприятий будущего на базе чистых угольных технологий.

Для широкого круга научных и практических работников, студентов, слушателей и аспирантов, интересующихся проблемами угольной промышленности и углеэнергетики.