

УДК 621.32

Г.М. Редькин, А.В. Коновалов, В.Ю. Александров

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДНЕЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ ОТДЕЛЬНОСТИ

На основе вектора частоты системы трещин разработана методика определения формы и ориентировки в пространстве средней естественной отдельности и блочности массива горных пород. Приведены примеры определения этих параметров по участку Коробковского месторождения.

Ключевые слова: системы трещин, трещиноватость, вектор системы трещин, средняя естественная отдельность, блочность.

Горные породы всех генетических типов (магматические, метаморфические, осадочные) характеризуются ориентированными закономерно разрывами сплошности, которые называют трещинами. Трещины, имеющие одинаковую (параллельную) или близкую ориентировку, объединяют в системы трещин, совокупность которых называют трещиноватостью [1, 2].

В массивах горных пород, как правило, развиваются три и более систем трещин, которые, пересекаясь, разделяют массив на структурные блоки различных форм и размеров. Эти монолитные блоки, оконтуренные естественными трещинами, называют отдельностями. Средней естественной отдельностью назовём условный блок горной породы, характеризующий совокупность отдельностей, составляющих массив горных пород, а блочностью назовём объём средней естественной отдельности.

Трещиноватость является одним из основных факторов, влияющих на прочностные деформационные параметры состояний массивов горных пород, разрушаемость горных пород, оптимизацию параметров буровзрывных работ, способы дробления и измельчения горных пород. В этих условиях важно и необходимо математическое моделирование средней естественной отдельности и блочности, которое является основным инструментом изучения трещинной тектоники.

Пусть в массиве горных пород развито три системы трещин. Если систем трещин более трёх, то их можно с некоторой погрешностью аппроксимировать тремя системами. Итак исходим из того, что массив горных пород характеризуется тремя системами.

В работе [3] было установлено, что математическими эквивалентами систем трещин являются векторы этих систем, которые перпендикулярны плоскостям систем, их модули равны частоте трещин и выражаются они через элементы залегания систем трещин следующим образом:

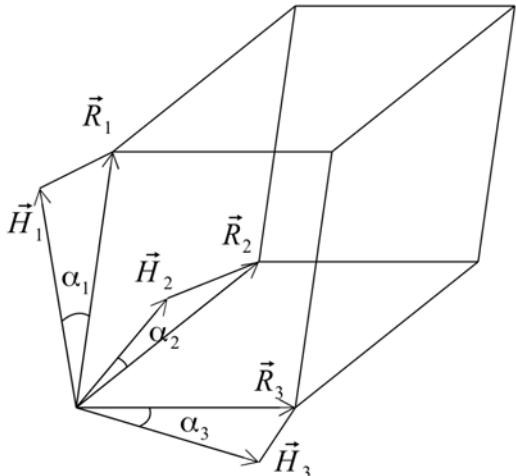


Рис. 1. Средняя естественная отдельность, образованная тремя системами трещин

$$\vec{\omega}_i = \omega_i \cdot \vec{n}_i = \\ = \omega_i (-\sin A_i \sin \delta_i; \cos A_i \sin \delta_i; \cos \delta_i), \quad (1) \\ i = 1, 2, 3,$$

где ω_i – частота трещин i -ой системы; $A_i \delta_i$ – соответственно азимут линии простираия и угол линии падения плоскости i -ой системы трещин; $|\vec{n}| = 1$.

Тогда, из векторного представления (1) следует, что обусловленная этими системами трещин интенсивность трещиноватости массива горных пород адекватно выражается суммой модулей проекций векторов (1) систем трещин на направление
 $\vec{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma); |\vec{e}| = 1$ [3].

$$L(\vec{e}) = \sum_{i=1}^3 | \vec{p}_i \omega_i | = \sum_{i=1}^3 | \omega_i \cdot \vec{e} | = \\ = \sum_{i=1}^3 \omega_i | -\sin A_i \sin \delta_i \cos \alpha + \cos A_i \sin \delta_i \cos \beta + \cos \delta_i \cos \gamma |. \quad (2)$$

Далее среднюю естественную отдельность и блочность моделируемого массива горных пород определим следующим образом.

Обозначим через \vec{H} – вектор перпендикулярной плоскости системы трещин ω , модуль которого равен среднему расстоянию между трещинами системы.

Тогда векторам систем трещин (1) будут соответствовать векторы $\vec{H}_i = \frac{\vec{n}_i}{\omega_i}, i = 1, 2, 3$, которые можно выразить через векторы (1)

$$\vec{H}_i = \frac{1}{|\vec{\omega}_i|} \vec{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Кроме того, векторам систем (1) и индуцированной ими трещиноватости (2) отвечает средняя естественная отдельность в форме параллелепипеда, высотами которого являются векторы (3) (см. рис. 1).

Требуется по данным высотам (3) найти образующие параллелепипеда, которые определяют его форму и ориентировку в пространстве, и объём параллелепипеда – блочность массива горных пород.

Векторные произведения векторов (3) определяют направления в пространстве рёбер, образующих параллелепипед

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= \frac{\vec{H}_2 \times \vec{H}_3}{|\vec{H}_2 \times \vec{H}_3|}, |\vec{r}_1| = 1, \\
 \vec{r}_2 &= \frac{\vec{H}_3 \times \vec{H}_1}{|\vec{H}_3 \times \vec{H}_1|}, |\vec{r}_2| = 1, \\
 \vec{r}_3 &= \frac{\vec{H}_1 \times \vec{H}_2}{|\vec{H}_1 \times \vec{H}_2|}, |\vec{r}_3| = 1.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Единичные векторы (4) рёбер параллелепипеда образуют углы с векторами его высот (3) $\alpha_i = (\vec{H}_i \cdot \vec{r}_i)$, $i = 1, 2, 3$, которые определяются по формулам

$$\cos \alpha_i = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{H}_i}{|\vec{H}_i|}, i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Обозначим через $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ – векторы, совпадающие с рёбрами параллелепипеда и образующие его. Тогда модули этих векторов можно выразить через модули векторов высот параллелепипеда (3)

$$|\vec{R}_i| = \frac{|\vec{H}_i|}{\cos \alpha_i} = \frac{|\vec{H}_i|^2}{|\vec{r}_i \cdot \vec{H}_i|}, i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Сами векторы \vec{R}_i ($i = 1, 2, 3$) получим, умножая их модули (6) на соответствующие направления (4)

$$\vec{R}_i = |\vec{R}_i| \cdot \vec{r}_i = \frac{|\vec{H}_i|^2 \cdot \vec{r}_i}{\vec{r}_i \cdot \vec{H}_i}, i = 1, 2, 3 \tag{7}$$

где единичные векторы \vec{r}_i определяются равенствами (4). Векторы (7) определяют форму и ориентировку в пространстве средней естественной отдельности.

Модуль же смешанного произведения векторов (7) определяет блочность моделируемого массива горных пород

$$V = (\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_3) = \frac{|\vec{H}_1|^2 \cdot |\vec{H}_2|^2 \cdot |\vec{H}_3|^2}{|(\vec{H}_1 \times \vec{H}_2 \cdot \vec{H}_3)|}. \tag{8}$$

Выразим в равенствах (4), (7), (8) векторы \vec{H}_i (3) через векторы систем трещин (1) и получим в зависимости от элементов залегания систем трещин: векторы, образующие среднюю естественную отдельность

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_1 &= \frac{\vec{n}_2 \times \vec{n}_3}{\omega_1 \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3)}, \\
 \vec{R}_2 &= \frac{\vec{n}_3 \times \vec{n}_1}{\omega_2 \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3)}, \\
 \vec{R}_3 &= \frac{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2}{\omega_3 \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3)}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

и объём средней естественной отдельности

$$V = \frac{1}{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot |(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3)|}, \tag{11}$$

$$\vec{n}_l \times \vec{n}_m = \begin{vmatrix} \vec{l} & & \vec{k} \\ -\sin A_l \sin \delta_l & \cos A_l \sin \delta_l & \cos \delta_l \\ -\sin A_m \sin \delta_m & \cos A_m \sin \delta_m & \cos \delta_m \end{vmatrix},$$

где

$$(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3) = \begin{vmatrix} -\sin A_1 \sin \delta_1 & \cos A_1 \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \\ -\sin A_2 \sin \delta_2 & \cos A_2 \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \\ -\sin A_3 \sin \delta_3 & \cos A_3 \sin \delta_3 & \cos \delta_3 \end{vmatrix},$$

причём индексы l и m принимают значения согласно формуле (10).

Для наглядности рассмотрим условный пример. Пусть есть 3 системы трещин, которые параллельны координатным плоскостям и расстояние между трещинами равно единице. Данным системам трещин отвечают: векторы систем трещин $\vec{\omega}_1 = \{1; 0; 0\}$, $\vec{\omega}_2 = \{0; 1; 0\}$, $\vec{\omega}_3 = \{0; 0; 1\}$; интенсивность трещиноватости в направлении единичного вектора \vec{e} по формуле (2) равна

$L(\vec{e}) = |\vec{e}_x| + |\vec{e}_y| + |\vec{e}_z|$ (рис. 2, а). Рассчитаем направляющие вектора и объём блока средней естественной отдельности: максимальные интенсивности трещиноватости систем $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$, направления векторов $\vec{n}_1 = \{1; 0; 0\}$, $\vec{n}_2 = \{0; 1; 0\}$, $\vec{n}_3 = \{0; 0; 1\}$, их смешанное произведение $(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3) = ((1; 0; 0) \times (0; 1; 0) \cdot (0; 0; 1)) = 1$.

Направляющие вектора блока средней отдельности по формуле (10) равны

$$\vec{R}_1 = \frac{\{0; 1; 0\} \times \{0; 0; 1\}}{1 \cdot 1} = \{1; 0; 0\}, \vec{R}_2 = \{0; 1; 0\}, \vec{R}_3 = \{0; 0; 1\} \tag{рис. 2, б}, \text{ объём блока по формуле (11) равен } V = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot |1|} = 1.$$

Приведём пример расчёта ориентировки и размера средней естественной отдельности для участка №402 Коробковского месторождения, где есть 3 системы трещин с векторами

$$\vec{\omega}_1 = \{8,53; 8,29; 0,72\}, \vec{\omega}_2 = \{2,34; -4,43; 0,36\}, \vec{\omega}_3 = \{1,47; 0,15; 4,67\} \quad [1].$$

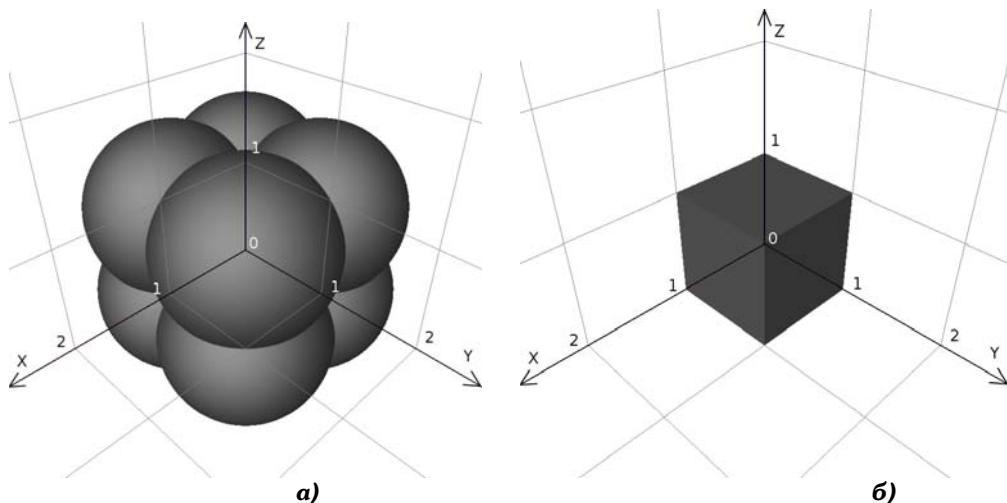


Рис. 2. Визуализация модели трещиноватости условного примера: а) интенсивность по направлениям; б) блок средней естественной отдельности

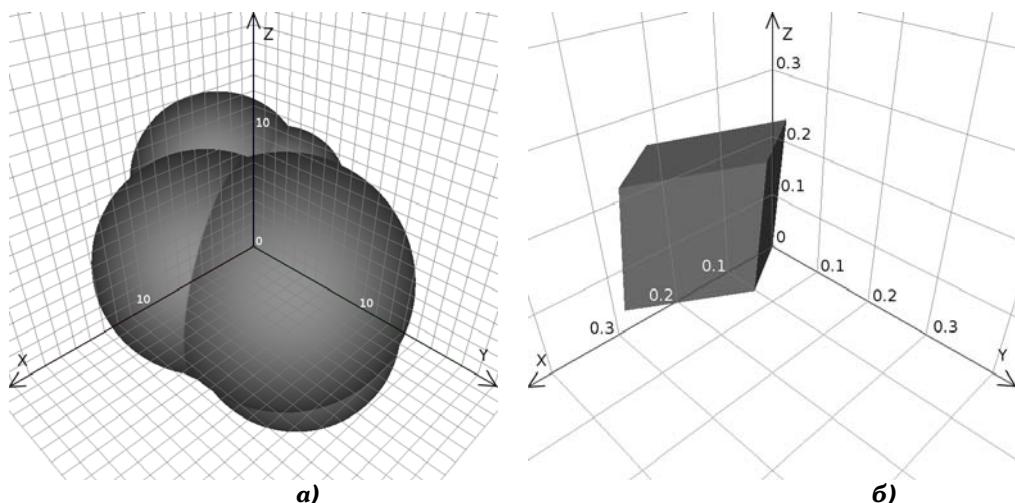


Рис. 3. Визуализация модели трещиноватости участка №402 Коробковского месторождения: а) интенсивность по направлениям; б) блок средней естественной отдельности

Разложим каждый вектор системы на его направление и интенсивность:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 11,917, & \vec{n}_1 &= \{0,716; 0,696; 0,060\}, \\ \omega_2 &= 5,023, & \vec{n}_2 &= \{0,466; -0,882; 0,072\}, \\ \omega_3 &= 4,898, & \vec{n}_3 &= \{0,300; 0,031; 0,953\}. \end{aligned}$$

Интенсивность трещиноватости в направлении единичного вектора \vec{e} по формуле (2) равна (рис. 3, а)

$$L(\vec{e}) = 11,916 \cdot |0,716 \cdot \vec{e}_x + 0,696 \cdot \vec{e}_y + 0,060 \cdot \vec{e}_z| + \\ + 5,023 \cdot |0,466 \cdot \vec{e}_x - 0,882 \cdot \vec{e}_y + 0,072 \cdot \vec{e}_z| + \\ + 4,898 \cdot |0,300 \cdot \vec{e}_x + 0,031 \cdot \vec{e}_y + 0,953 \cdot \vec{e}_z|.$$

Рассчитаем по формулам (10), (11) направляющие векторы и объём V блока средней естественной отдельности (рис. 3б):

$$\vec{R_1} = \frac{\{0,466; -0,882; 0,072\} \times \{0,300; 0,031; 0,953\}}{11,917 \cdot (\{0,716; 0,696; 0,060\} \times \{0,466; -0,882; 0,072\} \cdot \{0,300; 0,031; 0,953\})} =$$

$$\vec{R_2} = \{0,150; -0,150; -0,042\},$$

$$\vec{R_3} = \{-0,024; 0,005; 0,221\},$$

$$V = \frac{1}{11,917 \cdot 5,023 \cdot 4,898 \cdot |-\vec{0,881}|} = 0,00387.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейштадт Л. И. Методы инженерно-геологического изучения трещиноватости горных пород / Л. Н. Нейштадт, И. А. Пирогов. – М.: Энергия, 1969. - 248с.
2. Рац М. В. Трещиноватость и свойства трещиноватости горных пород / М. В. Рац, С. Н. Чернышев. – М.: Недра, 1970. - 160с.
3. Редькин Г. М. Нестационарное анизотропное математическое моделирование неоднородностей систем минерального сырья / Г. М. Редькин. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2007. – 500 с. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Редькин Г. М. – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, redking@email.ru
 Коновалов А. В. – аспирант кафедры прикладной математики, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, akon32@rambler.ru.

Алексанов В. Ю. – аспирант кафедры прикладной математики, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, v_alexanov@mail.ru.

