

УДК 622:519.635.4

А.Б. Цветков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЯВЛЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА В ГЕОМАССИВЕ*

Представлена математическая модель учета проявлений давления газа в геомассиве, которая реализована на основе комплекса проблемно-ориентированных программ, построенного на концепции синтеза математической модели кусочно-однородного геомассива из блоков.

Ключевые слова: Математическая модель, геомассив, структурный блок, угольный пласт, выработка, вмещающие породы, геологический разлом, метод конечных разностей, краевая задача теории упругости, синтез, гравитация, газ.

В работе представлена математическая модель учета проявлений давления газа в геомассиве. Приведены результаты суперпозиции напряжений в горном массиве, вызванные воздействием сжатого газа и гравитацией. В реальных горных массивах помимо гравитации на распределение напряжений оказывает влияние давление газа сконцентрированного в пластах угля. При проведении горных работ необходимо учитывать, что суперпозиция воздействий газа и гравитации может приводить к формированию в окрестности выработки опасных областей по выбросам угля и газа. Поэтому для обеспечения безопасности горных работ на сложных участках требуется прогнозировать такие ситуации и вовремя предусматривать меры по предотвращению аварий на горных предприятиях. В этой связи актуальна разработка системы компьютерного моделирования, которая основана на модели, учитывающей интегральные гравитационные и газовые проявления в горном массиве.

При решении поставленной задачи была получена обобщенная система дифференциальных уравнений для нахождения величин перемещений, напряжений и деформаций вызванных силами гравитации и давления газа.

Согласно закону Дюгамеля-Неймана деформации в упругом изотропном теле пропорциональны температуре. Аналогично, если в каждой точке упругого тела действует давление $p(x, y)$, то деформации также можно считать пропорциональными давлению $p = p(x, y)$

$$\varepsilon_x^p = \alpha p, \quad \varepsilon_y^p = \alpha p, \quad \varepsilon_z^p = \alpha p, \quad \gamma_{xy}^p = \gamma_{xz}^p = \gamma_{yz}^p = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, \varepsilon_z^p, \gamma_{xy}^p, \gamma_{xz}^p, \gamma_{yz}^p$ - деформации, $p = p(x, y)$ - давление, α - коэффициент пропорциональности.

Если в геомассиве действует гравитация, то совместные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, вызванные давлением газа и гравитацией представимы в виде:

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки по контракту №5.3832.2011.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= E^{-1}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) + \alpha p; & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}\mu^{-1}; \\ \varepsilon_y &= E^{-1}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) + \alpha p; & \gamma_{xz} &= \tau_{xz}\mu^{-1}; \\ \varepsilon_z &= E^{-1}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha p; & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}\mu^{-1};\end{aligned}\tag{2}$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ - компоненты тензора напряжений, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, μ, λ - параметры Ламе.

После нахождения из данной системы напряжений зависимости для их вычисления имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - (3\lambda + 2\mu)\alpha p; & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2\mu\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - (3\lambda + 2\mu)\alpha p; & \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - (3\lambda + 2\mu)\alpha p; & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz};\end{aligned}\tag{3}$$

где $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$
 u, v, w - перемещения, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1-\nu)}.$

Данные напряжения (3) были подставлены в уравнения равновесия [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

где F_x, F_y, F_z - массовые силы.

После подстановки (3) в (4) получилась система уравнений Ламе в перемещениях с учетом давления газа.

$$\begin{cases} \mu(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) + (\lambda + \mu)(u''_{xx} + v''_{xy} + w''_{xz})' - (3\lambda + 2\mu)\alpha p'_x + F_x = 0 \\ \mu(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) + (\lambda + \mu)(u''_{xy} + v''_{yy} + w''_{yz})' - (3\lambda + 2\mu)\alpha p'_y + F_y = 0 \\ \mu(w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}) + (\lambda + \mu)(u''_{xz} + v''_{yz} + w''_{zz})' - (3\lambda + 2\mu)\alpha p'_z + F_z = 0 \end{cases}\tag{5}$$

Система уравнений Ламе в перемещениях с учетом давления газа и воздействия гравитации для плоскости ХОY имеет вид:

$$\begin{cases} \mu(u''_{xx} + u''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xx} + v''_{xy})' - (3\lambda + 2\mu)\alpha p'_x = 0 \\ \mu(v''_{xx} + v''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xy} + v''_{yy})' - (3\lambda + 2\mu)\alpha p'_y + \rho g = 0 \end{cases}\tag{6}$$

где ρ - плотность, g - гравитационная постоянная.

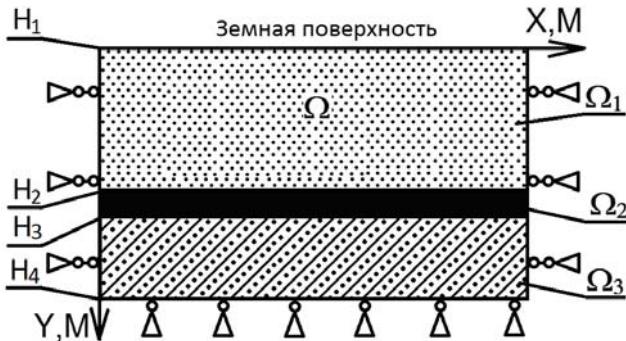


Рис. 1. Расчетная область Ω

угольной формы длиной 360 метров и глубиной 240 метров. Вмешающая толща на глубине 200 метров включала пласт угля прямоугольной формы мощностью 4 метра насыщенный газом под давлением p . Расчетная область представлена на рис. 1.

Расчетная область состояла из трех подобластей Ω_i , $\Omega = \sum \Omega_i$, $i=1..3$. Каждая из подобластей Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 характеризует породы определенного типа. При моделировании было принято, что область Ω_1 , это песчаник, Ω_3 – алевролит, Ω_2 – уголь. В подобласти Ω_2 задано давления газа величиной p , которое распределено равномерно.

В статье применялись следующие обозначения: $u(x,y)$, $v(x,y)$, σ_x , σ_y – горизонтальные, вертикальные перемещения и напряжения соответственно. Физико-механические свойства подобластей определялись величинами: λ_i , μ_i , ρ_i , где λ_i , μ_i – постоянные Ламе и ρ_i – плотность Ω_i . Горизонтальные границы задавались уравнениями: $y=H_j$, $j=1..4$.

Давление газа в каждом блоке моделировалось функцией $p(y) = Ay + B$, которая является решением уравнения Лапласа $\Delta p = 0$, где A и B заданные постоянные. С учетом граничных условий $p(H_k) = p_k$, $k = 1..4$ функция $p(y)$ имеет вид:

$$p(y) = \begin{cases} p_1 + (p_2 - p_1)(y - H_1)/(H_2 - H_1), & H_1 \leq y < H_2, \\ p_2 + (p_3 - p_2)(y - H_2)/(H_3 - H_2), & H_2 \leq y \leq H_3, \\ p_3 + (p_4 - p_3)(y - H_3)/(H_4 - H_3), & H_3 < y \leq H_4. \end{cases} \quad (7)$$

где p_i – давление газа, заданное на границе H_i , $p_2 = p_3 = p$.

Построение модели проводилось следующим образом. Для каждого блока прямоугольной формы Ω_i рассматривалась краевая задача теории упругости с учетом давления газа, заданного функцией (7). Краевая задача была сформулирована в следующей постановке. Найти вектор перемещений $U = (u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, удовлетворяющий внутри Ω_i системе дифференциальных уравнений (6) и граничным условиям: $u(a, y) = 0$, $u(b, y) = 0$, $u(x, c) = 0$, $u(x, d) = 0$, $v'_x(a, y) = 0$, $v'_x(b, y) = 0$; $\sigma_y(x, c) = 0$; $v(x, d) = 0$. Задача решалась при условии, что массовые силы направлены вдоль оси ОУ и создавались собственным весом

Алгоритм исследования разработанной модели для плоского случая реализован в виде комплекса проблемно-ориентированных программ. В пакете программ для исследования математической модели применен метод конечных разностей [2].

В качестве примера рассмотрен массив горных пород, который представлял собой область Ω прямо-

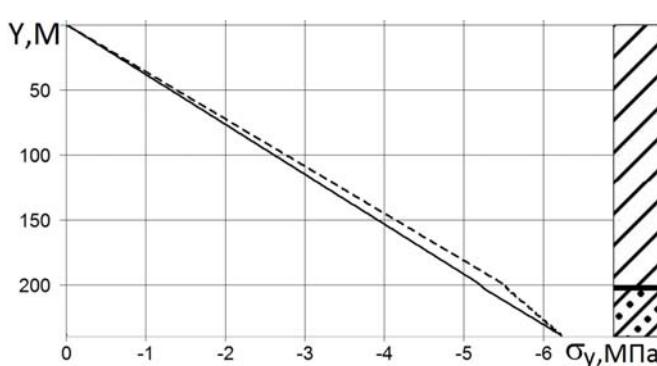
пород. На внутренних границах H_2 , H_3 согласовывались напряжения и перемещения. При проведении вычислительного эксперимента выбраны следующие структурные параметры модели в метрах:

$a=0$, $b=300$, $c=0$, $d=240$, $H_1 = 0$, $H_2 = 200$, $H_3 = 204$, $H_4 = 240$. Физико-механические свойства задавались такие: $\rho_1=2600 \text{ кг}/\text{м}^3$, $E_1=5,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $v_1=0,17$, $\rho_2=1380 \text{ кг}/\text{м}^3$, $E_2=0,3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $v_2=0,34$, $\rho_3=2700 \text{ кг}/\text{м}^3$, $E_3=2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $v_3=0,27$, $p=0,2 \text{ МПа}$, $p_1=0$, $p_2=p_3=p$, $p_4=0$.

Разработаны программные модули для решения задачи (6), которые стали частью пакета проблемно-ориентированных программ. Вычислительный эксперимент проводился при 98640 узлах сетки. Результаты численного решения приведены на рис. 2. На вертикальной оси отложена глубина, а по горизонтали вертикальная компонента тензора напряжений. Сплошная тонкая линия соответствует напряжениям, вызванным только гравитацией, пунктирная – суперпозицией давления газа в пласте угля и гравитацией. Знак минус соответствует сжимающим напряжениям.

На первом этапе исследований был проведен расчет напряженно-деформированного состояния массива под действием гравитации – сплошная линия на рис. 2. Из графика видно, что в массиве Ω действуют только сжимающие напряжения. Следовательно, моделируемый ненарушенный горный массив при действии гравитации представляет собой область сжатия и сжимающие напряжения возрастают с увеличением глубины. Полученные результаты соответствуют распределению Динника [1,4]. На графике наблюдаются скачки напряжений σ_y на границах слоев пород и пласта угля. Величины сжимающих напряжений в кровле пласта составляли - 5,2 МПа.

На следующем этапе рассмотрено состояние ненарушенного геомассива при наличии газа в пласте угля под давлением 0,2 МПа – пунктирная линия на рисунке 2. Поле напряжений вызвано суперпозицией двух видов сил: гравитацией и давлением газа. В окрестности пласта наблюдается возрастание величин сжимающих напряжений по отношению к геостатическому распределению. При удалении от пласта влияние давления газа ослабевает, и поле напряжений определяется гравитацией. Это вызвано суперпозицией величин сжимающих напряжений, вызванных гравитацией и уменьшением воздействия газа при удалении от пласта.



Величины сжимающих напряжений в окрестности пласта составляют -5,4 МПа, что соответствует совместному воздействию гравитации и газа.

Рис. 2. Вертикальные напряжения МПа

Возможность учета в математической модели аддитивной газовой составляющей в окрестности пласта позволит исследовать распределение напряжений в геомассиве при наличии в нем газовых ловушек и областей аномального давления.

Практическое значение комплекса проблемно-ориентированных программ состоит в возможности прогноза выбросов угля и газа при разработке паспортов креплений выработок.

Выводы

В статье предложена унитарная математическая модель, которая в отличие от известных позволяет одновременно помимо гравитационной учитывать газовую составляющую сил в геомассиве, для исследования которой разработан комплекс проблемно-ориентированных программ.

В отличие известных определяющих соотношений в предложенной модели, возможно распределение давления газа в геомассиве задать с помощью функции, отличной от решения уравнения Лапласа с целью моделирования областей аномального давления.

Проведенное исследование относится к одному из этапов разработки системы компьютерного моделирования на основе комплекса проблемно-ориентированных программ, предназначенный для синтеза математических моделей-кандидатов и адаптации их параметров к реальным условиям на основе данных натурных наблюдений с целью исследования взаимодействия геомеханических процессов в массиве горных пород с системой выработок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динник А.Н. Статьи по горному делу. [Текст] / А.Н. Динник - М.: Углехиздат, 1957. – 193 с.
2. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач. [Текст] / Р. Рихтмайер, К. Мортон - М.: Мир, 1972. – 414 с.
3. Ершов Л.В. Математические основы физики горных пород. [Текст] / Л.В. Ершов, В.А. Максимов - М.: МГИ, 1968. – 293 с.
4. Цветков А.Б. Синтез краевой задачи теории упругости и статического давления для математического моделирования напряженно-деформированного состояния в многослойном кусочно-однородном массиве при действии гравитации [Текст] / А.Б. Цветков, В.Н. Фрянов //Горный информационно-аналитический бюллетень. - М.: Горная книга, 2013. – №2. – С. 141-146.
ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Цветков Андрей Борисович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики, «Сибирский государственный индустриальный университет», atsvet@mail.ru

