

УДК 622.6:621.867

**Н.В. Кислов**

## **ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕОДНОРОДНОСТИ ПО РАЗМЕРАМ ЧАСТИЦ ИЗМЕЛЬЧЕННОЙ ГОРНОЙ ПОРОДЫ**

*Приведены результаты описания характеристик распределения частиц по фракции измельченных материалов, дается математическая оценка этих распределений с помощью параметров, характеризующих условный средний размер частиц их полидисперсных смесей и неоднородность фракционных составов по размерам частиц. Установлена взаимосвязь между показателями неоднородности по размерам частиц измельченных горных пород.*

*Ключевые слова:* горная порода, измельчение, фракции частиц.

### **Введение**

**Г**ранулометрический состав измельченных горных пород и его неоднородность по размерам частиц являются важными показателями физических свойств и структуры.

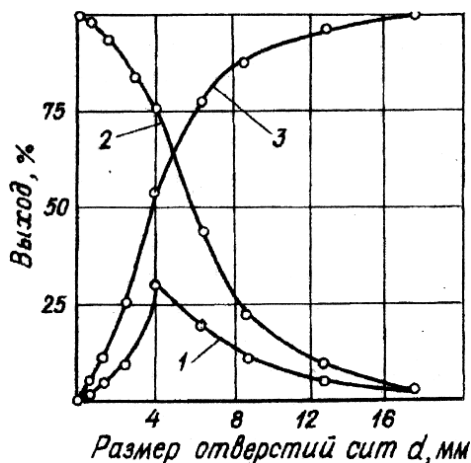
Общепринятой классификации гранулометрического состава измельченных горных пород не существует. Это связано с различием целей и объектов, для которых производится опре-

деление гранулометрического состава. В горном деле гранулометрический состав горной массы, отделенной от массива, используется для оценки буровзрывных работ, качества продуктов обогащения, его учитывают при выборе типа и параметров технологического оборудования в карьерах, на шахтах, дробильно-сортировочных и обогатительных фабриках [1].

Таблица 1

### **Интерпретация фракционного состава**

№	Крайние размеры фракции в мм	Средний размер фракции d, мм	Процентное содержание фракции p, %	Суммарный выход P, %		Выход на 1 мм p/Δ d, %/мм
				по плюсу	по минусу	
1	20–15	17,5	3,9	3,9	100	0,78
2	15–10	12,5	6,2	10,1	96,1	1,24
3	10–7	8,5	13,4	23,5	89,9	4,47
4	7–5	6,0	21,2	44,7	76,5	10,60
5	5–3	4,0	30,0	74,7	55,3	15,00
6	3–2	2,5	12,1	86,8	25,3	12,10
7	2–1	1,5	7,0	93,8	13,2	7,00
8	1–0,5	0,75	4,2	98,0	6,2	8,40
9	< 0,5	0,25	2,0	100	2,0	4,00



**Рис. 1. Характеристика крупности:**  
 1 - частная  $p = f(d)$ ; 2 - суммарная по плюсу  $P = f(d)$ ; 3 - суммарная по минусу  $P_1 = f(d)$

Результаты анализа гранулометрического состава различных измельченных материалов, представленные в виде таблиц, где приводятся массовые выходы различных фракций в долях единицы или в процентах, хотя и полно характеризуют этот состав, но вызывают трудности при сравнении различных смесей и количественной оценке их неоднородности по фракциям. Для наглядности табличные данные (табл. 1) сопровождаются графиками зависимости выходов от размера частиц [2, 3]. Такие графики называются *частными характеристиками крупности* и строятся в равномерном масштабе. При этом по оси абсцисс откладываются средние размеры  $d$  частиц, а по оси ординат — массовые выходы  $p$  отдельных фракций в процентах (рис. 1, кривая 1).

При обработке опытных данных помимо выходов в процентах к общей массе пробы могут быть определены суммарные (*кумулятивные*) выходы  $P_i$ . Суммарным выходом по плюсу  $P$  на-

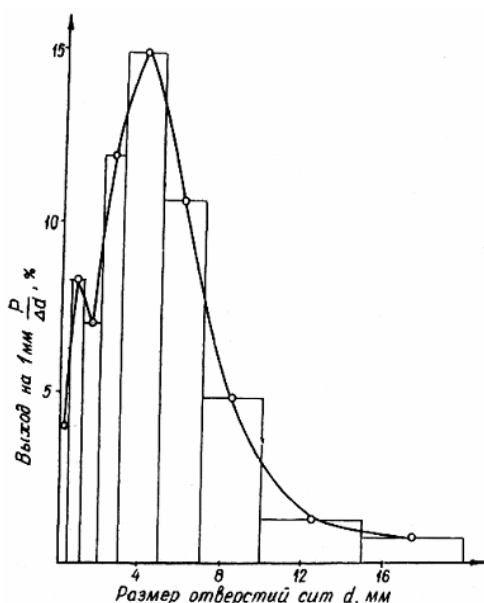
зывается выход частиц крупнее данного размера. Он может быть получен сложением относительных выходов частиц, размеры которого больше заданного (рис. 1, кривая 2). Если сложить выходы частиц меньше данного размера, то получим *суммарный выход по минусу*  $P_1$  (рис. 1, кривая 3). Зависимость суммарного выхода от размера фракции, изображенная на графике в равномерном масштабе, носит название *суммарной характеристики крупности* [2, 3]. Следовательно, связь между суммарными характеристиками выразится следующим образом:  $P = 100 - P_1(d)$ .

### Результаты исследования

С точки зрения математической статистики образец измельченного материала можно рассматривать как статистический коллектив, который состоит из членов, варьирующих по величине  $d$  частиц и выходам  $p$  отдельных фракций. При этом аргументом коллектива является размер частиц. Масса отдельной фракции представляет *частоту* или *численность* класса. Общая масса образца носит название *объема статистического коллектива*.

Для определения фракционного состава сыпучих сред применяются сита с разными интервалами размеров отверстий, и, следовательно, интервалы крупности  $\Delta d$  отдельных классов статистической совокупности получаются тоже неодинаковыми. Поэтому *частота берется на единицу длины интервала*, т.е.  $p/\Delta d$  (табл. 1).

Применение методов математической статистики для обработки опытных данных фракционного состава позволяет также изобразить изменчивость изучаемого показателя в виде *гистограммы* и *кривой распределения* (рис. 2).



**Рис. 2. Гистограмма и кривая распределения выходов на единицу длины интервала крупности**

При построении кривой распределения  $P'(d)$  фракционного состава в прямоугольной системе координат на ось абсцисс наносятся значения крупностей  $d$ , а на ось ординат — выходы  $p$  классов, отнесенные к единице изменения длины  $\Delta d$  интервала (рис. 2).

Здесь уместно заметить, что суммарная характеристика  $P(d)$  по отношению к кривой распределения  $P'(d)$  представляет собой *интегральную кривую*.

Наиболее простым способом сравнения различных кривых распределения фракционного состава измельченных материалов можно считать широко применяемое в математической статистике выравнивание подобных кривых с последующим подбором аналитического выражения для закономерностей изменения фракционного состава.

В результате применения методов

математической статистики оказалось, что зависимость суммарных выходов по плюсу  $P$  от размера  $d$  частиц для широкого класса измельченных материалов, в том числе для горных пород и продуктов их переработки, представляет собой прямую линию в координатах  $\lg(2 - \lg P) - \lg d$  практически во всем диапазоне изменения переменных  $P$  и  $d$  (рис. 3). В этом случае *угловой коэффициент*  $n$  этой прямой, является характеристикой неоднородности по размерам частиц их полидисперсной смеси. Его можно определить по двум точкам, которые соответствуют некоторым суммарным выходам по плюсу  $P_1$  и  $P_2$  на ситах с размерами отверстий  $d_1$  и  $d_2$  [4].

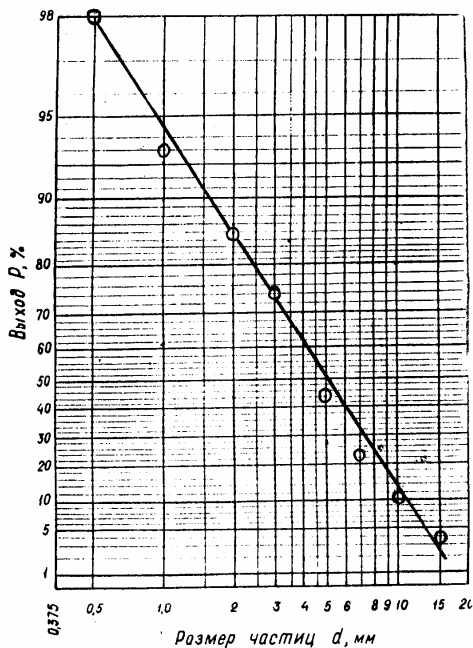
Тогда

$$n = \frac{\lg(2 - \lg P_1) - \lg(2 - \lg P_2)}{\lg d_1 - \lg d_2}. \quad (1)$$

В качестве одной из выбранных точек на рис. 3 может быть размер частиц  $d_m$ , при котором суммарный выход  $P_m = 50\%$ , т.е.  $d_m$  является *медианным размером*, так как делит всю совокупность фракций полидисперсной смеси поровну. Следовательно, суммарная масса всех частиц размером более  $d_m$  равна суммарной массе всех частиц размером меньше  $d_m$ . В этом случае формула (1) принимает вид:

$$n = \frac{\lg(2 - \lg P_1) - \lg(2 - \lg P_m)}{\lg d - \lg d_m}, \quad (2)$$

где  $P$  и  $d$  — текущие значения суммарных выходов по плюсу в % и соответствующие им размеры частиц в мм;  $d_m$  — медианный средний размер частиц полидисперсной смеси, мм;  $P_m = 50\%$  — суммарный выход частиц, размер которых равен  $d_m$ .



**Рис. 3. Изображение зависимости  $P = f(d)$  в координатах  $\lg(2 - \lg P) - \lg d$**

После преобразований и потенцирования зависимость (2) принимает вид

$$P = 100 \cdot 2^{-\left(\frac{d}{d_m}\right)^n} \quad (3)$$

Заметим, что параметры  $n$  и  $d_m$  этой формулы имеют вполне конкретный физический смысл. Они характеризуют соответственно неоднородность полидисперсной смеси частиц по фракциям и ее среднегеометрический размер.

Параметр  $d_m$  в рассматриваемом случае определяется по формуле

$$d_m = d_i \sqrt[n]{\frac{\lg 2}{2 - \lg P_i}}, \quad (4)$$

где  $P_i$  — принятое значение суммарного выхода по плюсу частиц размером больше  $d_i$  (см. формулу 1).

Формула (3) представляет собой интегральную кривую распределения

частиц по фракциям. Продифференцировав ее, получим выражение для дифференциальной кривой распределения:

$$P'(d) = \frac{P_i}{\Delta d} = 100n d_i^{-n} d_i^{n-1} 2^{-\left(\frac{d}{d_i}\right)^n} \ln 2 \quad (5)$$

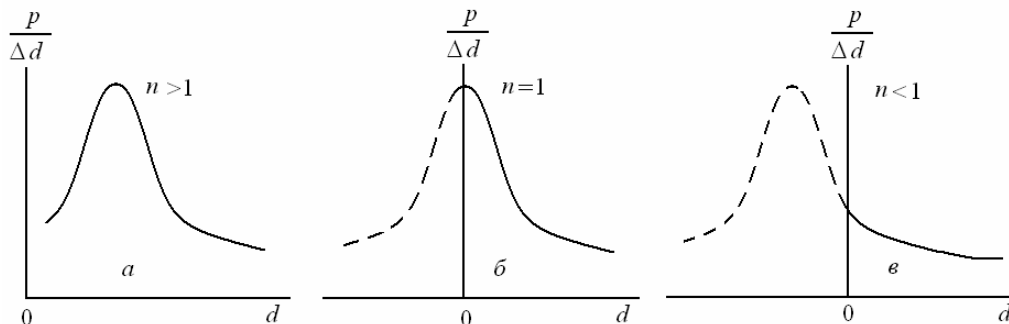
Размер частиц, соответствующий наибольшему выходу  $p$  на единицу длины интервала  $\Delta d$  определяется по формуле

$$d_{p=\max} = d_m \sqrt[n]{\frac{n-1}{n \cdot \ln 2}} \quad (6)$$

Покажем, что параметр  $n$  формулы (3) действительно характеризует неоднородность полидисперсной смеси частиц по фракциям. Для этого представим кривые распределения частиц по фракциям (формула 5) в виде графиков при различных значениях параметра  $n$  формулы (3) (рис. 4).

Если в формуле (5) параметр  $n > 1$ , то больше частиц от общей массы их полидисперсной смеси содержится в узком диапазоне фракций  $d_i$  (рис. 4, а), то есть чем больше  $n$ , тем смесь более однородна по своему фракционному составу. По мере уменьшения параметра  $n$  максимум на кривой распределения частиц смещается ближе к оси ординат и при  $n = 1$  располагается на этой оси (рис. 4, б). В случае  $n < 1$  теоретически максимум расположен в области отрицательных значений аргумента (рис. 4, в). Это означает, что массовые содержания отдельных фракций рассредоточены по диапазону их размеров, то есть не группируются в области условного среднего размера, например, вокруг их медианного среднего  $d_m$ .

В качестве примера представим результаты математической обработки



**Рис. 4. Дифференциальные кривые распределения частиц по фракциям  $P(d) = p/\Delta d$  для различных значений параметра  $n$**

опытных по фракционному составу хлоркалия и сульфата калия. В этом случае формула (3) принимает вид:

для хлоркалия

$$P = 100 \cdot 2^{-(d/3,25)^{4,3}}; \quad (7)$$

для сульфата калия при  $d = 0,315 - 5,0$  мм

$$P = 100 \cdot 2^{-(d/0,2)^{0,52}}; \quad (8)$$

и при  $d < 0,315$  мм

$$P = 100 \cdot 2^{-(d/0,23)^{5,7}} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right); \quad (9)$$

Из формулы (8) следует, что смесь частиц сульфата калия весьма неоднородна в случае  $d = 0,315 \div 5,0$  мм. Кроме этого, медиану  $d_m = 0,2$  мм нерационально использовать в качестве условной средней величины этой совокупности частиц, т.к. ее значение находится за пределами изменения  $d$ .

В ряде отраслей промышленности (строительные материалы, химическая переработка измельченных сред, сельскохозяйственное производство, пищевая промышленность и др.) для оценки неоднородности полидисперсных сред используют понятие «средневзвешенного» размера частиц и определяют его по формуле

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^N d_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^N p_i}, \quad (10)$$

где  $d_i$  — средний размер частиц отдельной фракции;  $p_i$  — массовый выход фракции размером  $d_i$ , выраженный в %;  $N$  — количество отдельных фракций.

В этом случае исчисление  $\bar{d}$  учитывает влияние массовых выходов отдельных фракций, средние размеры которых существенно разнятся друг от друга.

Среднее квадратическое отклонение «средневзвешенного» размера смеси частиц, найденного по массовым выходам отдельных фракций, определяют по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i (d_i - \bar{d})^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N p_i}}. \quad (11)$$

При сравнении различных образцов измельченных материалов обычно используют так называемый коэффициент изменчивости  $\eta$ , представляющий собой среднее квадратическое отклонение, выраженное в долях или в процентах от «средневзвешенного»

размера полидисперсной смеси частиц. В рассматриваемом случае

$$\eta = \frac{100 \sigma}{\bar{d}}, \%, \quad (12)$$

Следовательно, коэффициент  $\eta$  можно рассматривать как показатель, характеризующий неоднородность фракционного состава полидисперсной смеси частиц. В математической статистике  $\eta$  называют вариационным коэффициентом. Он является отвлеченным числом и позволяет путем сравнения значений выходов фракций в отдельной их совокупности устанавливать различия между ними.

*Коэффициент неоднородности рыхлой или измельченной породы* оценивается в горном деле также отношением размера частиц  $\bar{d}_{60}$ , которых содержится в породе в сумме со всеми меньшими размерами 60% (суммарный выход по минусу  $P_1 = 60\%$ ), к размеру частиц  $\bar{d}_{10}$ , которых содержится в сумме со всеми меньшими размерами 10% (суммарный выход по минусу  $P_1 = 10\%$ ), т.е.

$$k_n = \bar{d}_{60} / \bar{d}_{10}. \quad (13)$$

Если в основу расчета коэффициента  $k_n$  положить суммарную характеристику по плюсу  $P = f(d)$ , то в общем случае характеристика по минусу будет иметь вид:

$$P_1 = 100 - P = 100 - 100 \cdot 2^{-(d/d_m)^n}. \quad (14)$$

Тогда в случае  $P_1 = 60\%$  выход  $P = 40\%$  и ему соответствует размер частиц  $d = d_{40}$ . Для  $P_1 = 10\%$  выход  $P = 90\%$ , а диаметр  $d = d_{90}$ . Тогда коэффициент неоднородности измельченной породы

$$k_n = d_{40} / d_{90}. \quad (15)$$

В этом случае текущее значение размеров частиц при использовании суммарной характеристики по плюсу  $P = f(d)$

$$d_i = d_m \cdot \sqrt[n]{\frac{2 - \lg P_i}{\lg 2}}. \quad (16)$$

Отсюда  $d_{40} = d_m \cdot \sqrt[n]{1,322}$  и  $d_{90} = d_m \cdot \sqrt[n]{0,152}$ . Если же использовать суммарную характеристику по минусу  $P_1 = 100 - P$ , то искомые размеры частиц  $\bar{d}_{60} = d_{40}$  и  $\bar{d}_{10} = d_{90}$ .

Тогда взаимосвязь между коэффициентом  $k_n$  неоднородности измельченной горной породы и параметром  $n$  суммарной характеристики по плюсу, оценивающим неоднородность выходов фракций полидисперсной смеси, выразится следующим образом:

$$k_n = \frac{\bar{d}_{60}}{\bar{d}_{10}} = \frac{d_{40}}{d_{90}} = \sqrt[n]{8,7}$$

или  $n = \frac{0,9395}{\lg k_n}. \quad (17)$

Численный анализ значений  $n$  и  $k_n$ , выполненный по этим формулам, показывает, что параметр  $n$ , который характеризует неоднородность фракций по размерам частиц измельченных пород, при изменении в пределах от 0,1 до 5,0 соответствует коэффициенту  $k_n = 2,5 \cdot 10^9 \div 1,54$ . Причем значения  $k_n$  интенсивно уменьшаются до величины 1,54 при  $n = 5,0$ . В случае  $n > 1$  максимум на кривых распределения частиц по фракциям  $P(d)$  располагается в области реальных размеров частиц ( $d > 0$ ) и по мере увеличения  $n$  до 5,0 смещается все дальше от оси ординат (рис. 4). Это свидетельствует о концентрации частиц в более узком интервале размеров фракций. Значения  $k_n$  в этом случае уменьшаются от 8,7 до 1,54, однако по ним не представляется

возможным оценить выходы отдельных фракций и сосредоточение размеров частиц в их узком интервале. Преимущество параметра  $n$  по сравнению с коэффициентом  $k_n$  заключается в том, что его значение, найденное по двум суммарным выходам фракций, обеспечивает определение медианного среднего размера частиц  $d_m$  и описание суммарных выходов по плюсу  $P$  формулой (3), на основании которой можно вычислять выходы отдельных фракций полидисперсной смеси частиц не прибегая к детальному анализу результатов определения фракционного состава.

#### **Заключение**

Числовые значения расчетных параметров  $\bar{d}$ ,  $\sigma$  и  $\eta$  (формулы 10—12) и коэффициента  $k_n$  (формула 17) обеспечивают только общую оценку фракционного состава сыпучих сред.

В то время как метод математического описания полидисперсных смесей с помощью суммарных характеристик по плюсу  $P = f(d)$  (формула 3) и дифференциальных кривых распределения частиц по фракциям  $P' = f(d)$  (формула 5) позволяет определять всего лишь по выходам двух фракций (формулы 1 и 4) медианное среднее  $d_m$  всей совокупности частиц, выходы  $p_i$  каждой фракции смеси и неоднородность  $n$  по размерам частиц.

В итоге для оценки крупности и неоднородности смеси частиц рыхлой или измельченной горной породы необходимо и достаточно располагать сведениями о величине  $d_m$  полидисперсной смеси и параметра  $n$  суммарной характеристики по плюсу  $P = f(d)$ .

---

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Горная энциклопедия* / гл. ред. Е.А. Козновский. – М.: Энциклопедия. – Т. 2. – 1985. – 575 с.
2. *Андреев С.Е.* Закономерности измельчения и исчисление характеристик гранулометрического состава / С.Е. Андреев, В.В. Товаров, В.А. Петров. – М.: Недра, 1959. – 433 с.
3. *Коузов П.А.* Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов / П.А. Коузов. – Л.: Химия, 1987. – 264 с.
4. *Кислов Н.В.* Исчисление параметров гранулометрических характеристик продуктов переработки калийной руды / Н.В. Кислов, П.В. Цыбуленко // *Горная механика*. – 2009. № 3. – С. 33–46. **VIAS**

---

#### **КОРОТКО ОБ АВТОРЕ**

*Кислов Н.В.* – Белорусский национальный технический университет, e-mail: bntu@bntu.by



**INTERRELATION OF HETEROGENEITY INDICATORS ACCORDING TO THE SIZE OF PARTICLES OF THE CRUSHED ROCK**

*Kislov N.V.*, e-mail: bntu@bntu.by  
Belarusian national technical university, Minsk, Belarus.

*The results of characteristics of particles distribution according to the crushed material fractions are given. Mathematical estimation of these distributions by means of the parametres characterising the conditional average particle size of their polydisperse mixes and heterogeneity of fractional structures according to the size of particles is considered. Interrelation of heterogeneity indicators according to the sizes of particles of the crushed rocks is established.*

*Key words: rock, crushing, fractions of particles.*

**REFERENCES**

1. *Koznovsky E.A. (Ed.). Mining Encyclopedia, Vol. 2. Moscow: Entsiklopedia, 1985. 575 p.*
2. *Andreev S.V., Tovarov V.V., Petrov V.A. Grinding Patterns and Calculation of Grain-Size Composition Characteristics. Moscow: Nedra, 1959. 433 p.*
3. *Kousov P.A. Basis of the Analysis of Industrial Dust and Ground Material Compositions. Leningrad: Khimia, 1987.*
4. *Kislov N.V., Tsybulenko P.V. Calculating Parameters of Granulometric Characteristics of Potash Derivatives, Gornaya mekhanika—Mining Mechanics Journal, 2009, No. 3, pp. 33–46.*



---

**ОТДЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ  
ГОРНОГО ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО БЮЛЛЕТЕНЯ  
(ПРЕПРИНТ)**

**ПОВЫШЕНИЕ СТОЙКОСТИ БУРОВЫХ КОРОНОК**

*Сухорукова Софья Евгеньевна, аспирант, преподаватель, кафедры «Технология машиностроения и ремонт горных машин», sofya\_suhorukova@mail.ru  
Московский государственный горный университет.*

*Установлен критерий для оценки износостойкости буровых коронок. Произведена оценка величины энергии, необходимой для изменения структуры и свойств твёрдого сплава буровых коронок. Приведены результаты экспериментальной работы по обработке буровых коронок высокоэнергетическими воздействиями. Сделаны выводы о их влиянии на стойкость инструмента и качество соединения корпус коронки – твёрдосплавный зубок.*

*Ключевые слова: горные машины, породоразрушающий инструмент, буровой инструмент, буровые коронки, твердые сплавы, абразивное изнашивание, износостойкость, твёрдосплавные зубки, карбид вольфрама, высокоэнергетические воздействия*

**INCREASED RESISTANCE OF DRILL BITS**

*Sukhorukova S.E.*

*A criterion for assessing the wear resistance of drill bits. The estimation of the amount of energy needed to change the structure and properties of solid carbide drill bits. The results of experimental work on the processing of drill bits with high-energy impacts. The conclusions about their impact on the tool life and the quality of the connection body bits - carbide tooth.*

*Key words: mining machinery, rock cutting tools, drilling tools, hard alloys, abrasion, wear resistance, carbide teeth, tungsten carbide, high-energy impact.*