

А.М. Валуев**ЗАДАЧА ПАРЕТО-ОПТИМИЗАЦИИ
ТРАЕКТОРИИ НА СЕТИ КАК МЕТАМОДЕЛЬ
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА
ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ***

Рассмотрена проблема формализация модели принятия решений при выборе вариантов реализации проектов разработки твердых полезных ископаемых. Для представления взаимосвязи альтернативных вариантов качественно различных проектных решений (включая систему разработки, раскройку шахтного или карьерного поля на технологические зоны и схему вскрытия) предлагается форма дерева альтернатив, в котором полностью определенные альтернативные варианты проекта выражаются концевыми вершинами. Для представления реализации альтернативных вариантов во времени и пространстве вводится форма ориентированного бесконтурного графа состояний и переходов (ГСП). Предложены способы представления в форме ГСП динамики горных работ, состава и состояния парка оборудования и его распределения в динамике по участкам ведения горных и обеспечивающих работ. Задача выбора варианта реализации проекта представлена в виде задачи многокритериальной оптимизации траектории на ГСП. Обосновывается сведение задачи Парето-оптимизации траекторий на ГСП к задачам нахождения совокупности субоптимальных траекторий на ГСП и применения для решения последних модифицированного метода Дейкстры и метода ветвей и границ.

Ключевые слова: проектирование горных предприятий, твердые полезные ископаемые, порядок отработки месторождения, распределение оборудования по участкам, многокритериальная оптимизация, множество Парето, дерево альтернатив, граф переходов, субоптимальная маршрутизация на сети.

Графовое представление является наиболее употребительным для совокупности взаимосвязанных альтернатив и применяется достаточно часто к задачам выбора проектных решений в различных областях. Примером общего подхода, основанного на теоретико-графовых моделях, служит «Метод анализа иерархий» [1], который находит известное применение в задачах проектирования горного производства [2], но не в полной мере учитывает характер его взаимосвязей.

Принципиальной особенностью горного производства является сочетание в любом проектном варианте задач вы-

бора оборудования и развития горных работ. В случае использования малого количества единиц высокопроизводительного горного оборудования, такого, как роторные экскаваторы на карьерах, очистные комбайны на шахтах, на уровне проектирования возникает также динамическая задача «о назначениях», т.е. о распределении такого оборудования по обрабатываемым участкам месторождения, изменяющемся, как правило, при отработке очередного участка.

Что касается укрупненного разбиения месторождения на участки (которые, как для открытых, так и для под-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования науки РФ в рамках базовой части государственного задания № 2014/113 НИТУ «МИСиС».

земных работ чаще всего именуют панелями), оно выполняется также на альтернативной основе, в связи с выбором направления развития горных работ. Одновременно определяется система обеспечивающих выработок, служащих для вскрытия участков, транспортировки извлеченной горной массы, а также, при подземных работах, для вентиляции и передвижения работников.

В рамках укрупненной геометризации месторождения и выбора принципиального состава оборудования (технологического комплекса) состояние производственной системы на определенный момент времени характеризуется: 1) набором единиц основного оборудования и их состоянием (возрастом); 2) набором отработанных и обрабатываемых панелей и состоянием последних (извлеченным объемом для каждой); 3) состоянием обеспечивающих выработок, т.е. набором функционирующих и находящихся в процессе строительства выработок и длиной пройденных (построенных) участков последних.

По отдельности эти компоненты состояния используются в известных графовых моделях производственных процессов. Так, для известной задачи об оптимальной замене оборудования состояния – это возраст отдельных единиц оборудования [3, с. 30]. Переход из состояния на начало одного календарного периода в состояние на конец следующего означает эксплуатацию оборудования и, возможно замену некоторых единиц (допускается продажа имеющегося оборудования и приобретение взамен не только нового, но, возможно, и бывшего в употреблении). Экономический результат оценивается как сумма разницы в стоимости приобретаемого и реализуемого оборудования и стоимости эксплуатации имеющегося в течение одного периода. В то же время стоимость экс-

плуатации машин никак не связывается с условиями и интенсивностью их использования.

Таким образом, в процессе разработки месторождения ТПИ происходят следующие принципиальные изменения состояния производственной системы:

1. приобретение оборудования, его монтаж и наладка, изменение степени износа в результате эксплуатации и плановых ремонтов и замена;

2. вскрытие отдельных участков месторождения, что выражается в создании и использовании (возможно, с последующей ликвидацией) предназначенных для этого выработок (транспортных, вентиляционных и др.);

3. отработка отдельных участков (панелей) шахтного или карьерного поля, т.е. переход их из состояния нетронутого массива в состояние выполнения работ и далее в состояние погашения (для карьеров также, возможно, в состояние сначала отсыпаемого, затем отсыпанного участка внутреннего отвала); аналогично может быть представлено развитие внешних отвалов;

4. в процессе выполнения буровзрывных, горно-капитальных добычных, вскрышных и отвальных (для карьеров), проходческих и очистных работ (для шахт) изменяется распределение парка соответствующего оборудования по участкам ведения горных работ.

Переход из одного состояния в следующее (на начало следующего года или периода) определяется, прежде всего, интенсивностью работ по участкам и интенсивностью грузопотоков.

Все сказанное, хотя и в более сложном виде, может быть отнесено и к случаям комбинированного способа разработки, сочетающего открытые и подземные работы.

Важно, что нормативными документами, в частности, приказом Минприроды РФ [4], в обязательном порядке предусматривается отражение в тех-

нических проектах шахт и карьеров календарных планов отработки месторождения, которые должны быть привязаны не только ко времени, но и к пространству шахтного (карьерного) поля. Что касается вопросов о конкретном составе оборудования и тем более о его расстановке в процессе разработки, их детальная проработка является менее обязательной, а при длительном сроке разработке – проблематичной за пределами начального периода. Тем не менее, их решение является желательной для повышения обоснованности технических решений, т.к. параметры системы разработки и производственная мощность горного предприятия тесно связаны с характеристиками используемого оборудования.

Однако в связи с невозможностью или чрезмерной трудоемкостью такой детальной проработки следует допустить и представление календарной реализации проекта более укрупненно, не только без решения вопроса о конкретной расстановке оборудования, но даже рассматривая последнее не в виде набора конкретных машин, а в виде производственных мощностей по отдельным процессам горного производства. Излагаемый подход допускает разные степени детальности описания процесса разработки месторождения.

Принципиальные альтернативы, выражающиеся в выборе системы разработки и соответствующей ей раскройки шахтного (карьерного) поля с системой выработок, обеспечивающих вскрытие, нарезные работы (для шахт), транспортирование извлеченной горной массы и проветривание (для шахт), могут быть представлены как набор или, более детально, как дерево альтернатив (ДА). В последнем представлена взаимосвязь частных альтернативных проектных решений, а полные наборы проектных альтернатив, представляющие собой качественно различные проектные варианты, изобража-

ются в виде концевых вершин. Каждой концевой вершине ДА соответствует свой граф переходов в пространстве состояний, характеризующихся триадами (состояние парка оборудования, конфигурация набора отработанных/находящихся в работе/отработанных участков месторождения, конфигурация набора проведенных/находящихся в состоянии проведения/погашенных обеспечивающих выработок) или четверками (то же, с добавлением расстановки некоторых единиц оборудования по находящимся в работе выемочным участкам и строящимся обеспечивающим выработкам). Далее такие графы называются графами состояний и переходов (ГСП).

Принятие и последующая реализация принципиальных проектных решений по разработке месторождений полезного ископаемого многосторонне затрагивает интересы как компании-недропользователя, так и государства-недровладельца, население территории, на которой размещается проектируемое горное предприятие, потенциальных кредиторов, потенциальных потребителей минерального сырья, транспортные компании и проч. Поэтому задача принятия проектных решений является многокритериальной. В официальной практике используются три критерия – «для государства (бюджетный доход, полнота извлечения балансовых запасов твердых полезных ископаемых из недр) и для недропользователя (интегральный экономический эффект проекта)» [5].

Поиск наиболее эффективных траекторий может производиться как по отдельности на ГПС, соответствующих разным вершинам ДА, так и на объединенном графе альтернатив и переходов. Ориентированным графом является как дерево альтернатив, так и расширенное ДА результат присоединения к ДА в ее концевых вершинах деревьев переходов для каждой (пу-

тем отождествления начальной вершины дерева переходов с вершиной ДА, которой оно соответствует). Такая комбинированная конструкция может показаться чрезмерно громоздкой для того, чтобы на ней можно было бы решать какие-либо задачи направленного поиска эффективных траекторий. На самом деле, деревья переходов (и даже дерево альтернатив) в процессе поиска эффективных траекторий совершенно необязательно строить полностью! В процессе поиска, как показывает опыт решения некоторых задач оптимизации траекторий методом ветвей и границ [6], можно ограничиваться постепенным построением лишь небольшого фрагмента дерева переходов, отбрасывая все остальное на основе надлежащих оценок как бесперспективное.

Рассмотрим предлагаемую концепцию на простом примере. Пусть месторождение разделено на две одинаковых полосы, простирающихся в направлении ведения работ, а каждая полоса – на три панели (рис. 1). Будем предполагать, что горные работы (которые можно трактовать как очистные или добычные совместно с вскрышными) ведут две одинаковые выемочно-погрузочные машины; другое оборудование рассматривать не будем. Возможность замены горных машин будут рассмотрены ниже. Будем считать, что как затраты, так и доходы от отработки одной панели (в неизменных ценах) не зависят от того, обрабатывается ли она одной или двумя машинами. Такое предположение в русле традиционной модели оптимизации конечных границ карьера делается в иллюстративных целях. В рамках развиваемого здесь подхода оно может быть заменено более адекватными зависимостями, отражающими связь ценности выходного потока от ценности руды из отдельных панелей и пропорций, в которых они смешиваются. При сделанных предпо-

Полоса А	Полоса В
750	550
100	60
800	450
120	40
340	720
25	95

Рис. 1. Разбиение залежи на полосы и панели

ложениях не только доход и прибыль от отработки панели фиксирована, фиксированы и соответствующие слагаемые выплат в бюджет (налог на прибыль и на добычу полезных ископаемых). В силу сказанного каждая панель характеризуется двумя числами – чистой прибылью предприятия и выплатами в бюджет при ее полной отработке; эти числа надписаны на изображениях панелей на рис. 1.

Будем также считать, что обе машины могут работать либо в разных панелях, либо совместно в одной, но в обоих случаях их производительность одинакова, причем их переход из одной панели в другую происходит лишь при полной отработке панели. В данном примере предполагаем, что если работы в одной полосе опережают работы в другой, то не более, чем на одну панель. Из сделанных предположений вытекает, что период разработки делится на этапы, в течение каждого из которых обрабатывается либо одна панель (если обе машины работают в ней), либо две. В силу сказанного возможны восемь промежуточных положений горных работ (ПГР) на конец каждого этапа и одно конечное, показанные на рис. 2. Возможные переходы между ПГР, включая нулевое (начальное), изображены на рис. 3.

В более общих предположениях можно считать константами не доход от реализации руды, извлеченной из панели, а только количество руды и полезного компонента (для определен-

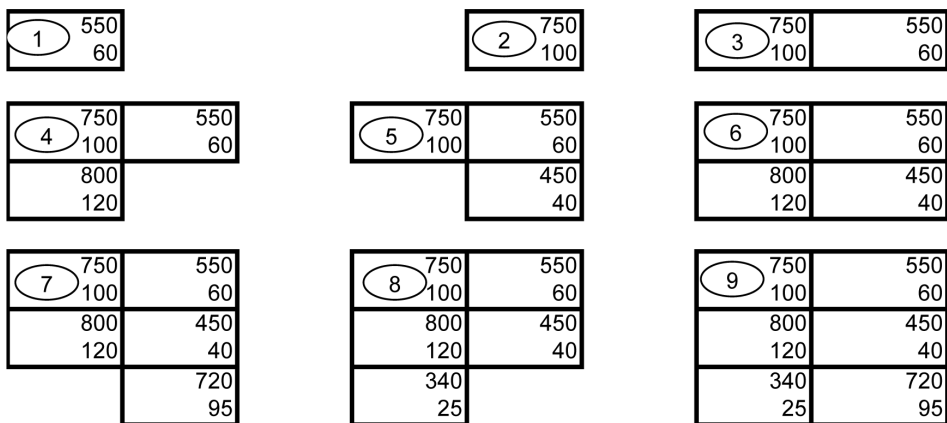


Рис. 2. Возможные положения горных работ

ности, металла) в ней. Известные зависимости доходов от реализации доходов от добытой руды от ее объема и содержания металла в ней должны применяться ко всему объему добытой руды. Можно допустить наличие ограничений на допустимое среднее (за этап) содержание металла в руде, в результате чего становятся невозможными некоторые технологически допустимые переходы между ПГР (соответствующие наборам извлекаемых панелей, а в более общем случае – и долей панелей), в результате чего граф переходов изменяется. В этом случае и для возможных переходов могут иначе вычисляться экономические показатели, но и в этом случае затраты, доходы и платежи в бюджет от основной деятельности однозначно характеризуют каждый переход при фиксированных прочих затратах в единицу времени. Будем считать, что для оценки эффек-

тивности проекта разработки месторождения используются два целевых показателя – дисконтированные чистая прибыль производителя и доход бюджета, причем для них установлены, вообще говоря, разные нормы дисконта (для бюджета она меньше). Ввиду того, что каждое состояние (ПГР) в графе перехода имеет определенное время начала T_0 и окончания T_1 , прибыль предприятия и бюджетный доход от каждого возможного перехода умножаются на соответствующие дисконтирующие множители для периода $[T_0, T_1]$. При сделанных предположениях задача выбора рационального способа реализации проекта разработки месторождения представляет собой задачу двухкритериальной оптимизации траектории перехода от начального состояния до конечного на ориентированном графе. Наиболее универсальным подходом к ее решению служит

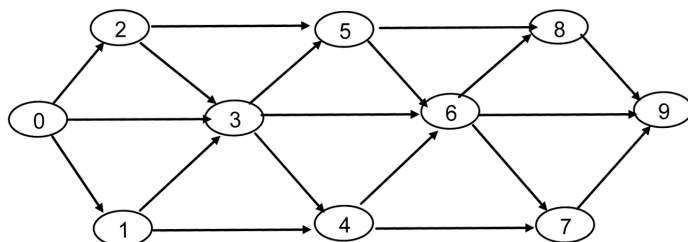


Рис. 3. Граф переходов между положениями горных работ

задача поиска совокупности Парето-оптимальных, т.е. недоминируемых траекторий. Решения, основанные на других подходах, т.е. оптимизации по комбинированному критерию (обычно аддитивной свертке критериев) или методе уступок, отличающиеся большим произволом, могут быть получены выбором из множества Парето в соответствии со значениями своих параметров. Отмечая, что оргграф переходов может выражать не только динамику горных работ и динамическую расстановку оборудования, но и динамику состава оборудования, мы получаем основание утверждать, что задача Парето-оптимизации траекторий на оргграфе (или мультиоргграфе) переходов действительно представляет собой общее представление задачи выбора совокупности проектных решений для горных предприятий.

Ввиду привязки вершин оргграфа к моментам времени и необратимости процессов горного производства оказывается, что данный граф не содержит контуров (направленных циклов), что позволяет использовать метод динамического программирования в довольно простой и универсальной форме. Методу ветвей и границ в рассматриваемой задаче (потенциально более эффективному), может также быть дана общая формулировка, однако его применение требует способов оценки вершин (достигнутых состояний), специфических для конкретной решаемой задачи.

Отметим следующий факт, на котором основано распространение известных методов на рассматриваемую задачу. Пусть оптимальное (максимальное) значение целевого показателя по первому критерию есть J_{11} , а соответствующее ему значение второго целевого показателя – J_{12} . Для оптимизации по второму критерию имеем пару значений целевых показателей (J_{21}, J_{22}) . Тогда любая Парето-

оптимальная траектория будет иметь значение первого показателя не ниже J_{21} , а второго – не ниже J_{12} . В самом деле, если для траектории $J_1 < J_{21}$, то одновременно, в силу оптимальности по второму критерию траектории с показателями (J_{21}, J_{22}) , справедливо неравенство $J_2 \leq J_{22}$, что и означает, что пара (J_1, J_2) доминируется парой (J_{21}, J_{22}) , т.е. не является Парето-оптимальной. Аналогично доказывается, что и траектория с $J_2 < J_{12}$ не является Парето-оптимальной. Данный факт обобщается и на большее количество критериев.

Назовем траекторию Δ -субоптимальными по критерию максимизации показателя J , если его значения для них больше $J^* - \Delta$, где J^* – максимальное значение J . Таким образом, все Парето-оптимальные траектории находятся в пересечении множеств (J_{11}, J_{21}) субоптимальных траекторий по первому критерию и (J_{22}, J_{12}) субоптимальных по второму. Метод решения задач определения множества всех Δ -субоптимальных траекторий по критерию минимизации аддитивного показателя на произвольном связанном графе – аналог алгоритма Дейкстры – предложен и обоснован в работе автора [7]. На основании полученных оценок вычислительной трудоемкости установлено, что он отличается значительно более высокой эффективностью по отношению к методам Йена и его последователей [8–10] и методу Ширы [11]. На задачу максимизации аддитивного показателя на произвольном связанном оргграфе без контуров метод [7] может быть перенесен путем ее представления в виде задачи минимизации с преобразованными весами дуг, вычисляемыми по простому универсальному алгоритму. Решение искомой задачи сводится к преобразованию критериев максимизации в критерии минимизации, решению задач построения совокупностей Δ -субоптимальных тра-

екторий по каждому критерию и выполнению операций пересечения и сортировки полученных множеств по значениям J_1 и J_2 .

Для рассмотренной задачи с конкретными данными по панелям и нормами дисконта 0,1 для предприятия и 0,04 для бюджета оказалось, что оптимальная последовательность разработки панелей одинакова по критерию максимизации и ЧДД предприятия, и дисконтированного бюджетного дохода и представляется последовательностью 0–1–3–6–8–9 и значениями целевых показателей соответственно 2757,64 и 397,63 условных единиц. Таким образом, данная траектория в задаче и является единственной Парето-оптимальной. Такая ситуация не может быть признана редкой, т.к. первоочередная добыча более богатых блоков увеличивает дисконтированный доход как предприятия, так и бюджета, а сравнительно короткий период разработки не позволяет в полной мере проявиться эффекту различия в нормах дисконта.

Совместное определение динамики работ и парка оборудования приводит к модификации и усложнению графа переходов. Структура графа переходов в обычной задаче об оптимальной замене оборудования показана на рис. 4. Показан граф для случая, когда оборудование сводится к одному автомобилю, срок службы которого не превышает четырех лет; вершины графа соответствуют определенному году и определенному возрасту автомобиля в начале года (эти числа показаны на представляющих вершины прямоу-

гольниках). Видно, что это многодольный граф. Применительно к включению в задачу оптимизации выполнения проекта состояния оборудования будем иметь:

- расщепление вершины для определенного ППР на несколько, соответствующих тому же ППР, но разному состоянию парка оборудования;
- превращение каждой дуги в двудольный граф, первая доля которого состоит из вершин, на которые расщепляется начальный узел дуги, а вторая – из вершин, на которые расщепляется конечный узел.

Таким же образом могут быть отражена в состояниях и переходах динамика строительства и погашения обеспечивающих выработок совместно с распределением оборудования на соответствующие работы.

Безусловно, чем полнее рассмотрение процесса реализации проекта, тем выше размерность ГСП, что может, несмотря на достаточную эффективность аналогов алгоритма Дейкстры, сделать точное решение задачи многокритериальной оптимизации траекторий вычислительно неэффективным. Видятся два способа преодоления данного положения, которые могут применяться как по отдельности, так и в совокупности:

- постепенная детализация вариантов: сначала рассматривается ограниченный набор частных проектных решений, ГСП строится и затем оптимизируется в усеченном виде. Затем происходит варьирование одной или нескольких полученных траекторий, т.е. построения вариантных ГСП во-

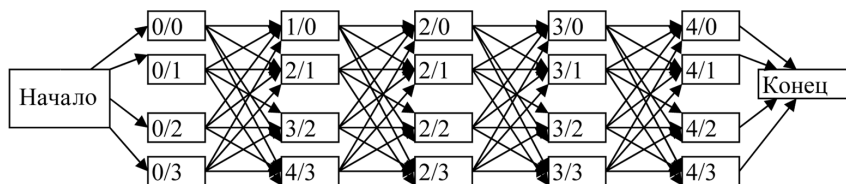


Рис. 4. Граф переходов в задаче о замене оборудования

круг построенных траекторий, на основе рассмотрения близких альтернатив для принятых и соответствующих каждой траектории частных проектных решений, и оптимизации траекторий на вариантных ГСП;

- использование метода ветвей и границ (МВГ) одновременно для постепенного построения ГСП, причем не полностью, а только перспективных фрагментов, и построения Парето-оптимальных траекторий на нем. В силу свойств МВГ первые же полученные траектории, если и не будут оптимальными, в большинстве случаев окажутся близкими к ним, что показывает обширная практика его применения к решению задач различной природы. Следует подчеркнуть, что фрагменты ГСП должны порождаться, как правило, программным способом.

На основе сказанного можно сделать следующие выводы. Предлагае-

мый подход охватывает различные виды горных предприятий и позволяет объединить в одной модели многопараметрические варианты реализации проекта разработки месторождения твердых полезных ископаемых. Описаны элементы таких моделей, позволяющие представить динамику горных работ, состава и состояния парка оборудования и его распределение в динамике по участкам ведения горных обеспечивающих работ. Описаны возможности применения известных методов для решения задач оптимизации траекторий на графе состояний и переходов технологической системы горного предприятия. Отмечается необходимость учета специфики используемых моделей для эффективной реализации описанных методов и необходимость разработки процедур автоматизированного построения ГСП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.
2. Bascetin A.A. Decision support system using analytical hierarchy process (AHP) for the optimal environmental reclamation of an open-pit mine // *Environmental Geology*. – 2007. – Vol. 52. – No. 4. – P. 663–672.
3. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984.
4. Приказ Минприроды РФ № 218 от 25.06.2010 «Об утверждении требований к структуре и оформлению проектной документации на разработку месторождений твердых полезных ископаемых, ликвидацию и консервацию горных выработок и первичную переработку минерального сырья».
5. Ашихмин А.А., Сытник Ю.В. Многокритериальная экономическая оценка и выбор вариантов реализации проектов на разработку месторождений твердых полезных ископаемых // *Рациональное освоение недр*. – 2013. – № 2. – С. 15–19.
6. Валуев А.М., Величенко В.В. О задаче планирования полета самолета гражданской авиации по свободному маршруту // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2002. – № 6. – С. 149–157.
7. Valuev A.M. On the Problem of Efficient Search of the Entire Set of Suboptimal Routes in a Transportation Network // *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE2012*. La Manga, Murcia, Spain, 2–5 July 2012. – Vol. 4. – P. 1560–1563.
8. Shier D.A. Iterative Methods for Determining the K Shortest Paths in a Network // *Networks*. – 1976. – Vol. 6. – P. 205–230.
9. Hershberger J., Maxel M., Suri S. Finding the k shortest simple paths: a new algorithm and its implementation // *ACM Transactions on Algorithms*. – 2007. – Vol. 3. – P. 4–45.
10. Gotthilf Z., Lewenstein M. Improved algorithms for the k shortest paths and the replacement paths problems // *Information Processing Letters*. – 2009. – P. 352–355.
11. Yen J.Y. Finding the k shortest loopless paths in a network // *Management Science*. – 1971. – Vol. 17. – P. 712–716. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Валуев Андрей Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, e-mail: valuev.online@gmail.com, НИТУ «МИСиС».

PROBLEM OF PARETO OPTIMIZATION OF A TRAJECTORY ON A NETWORK AS A METAMODEL OF MULTIOBJECTIVE CHOICE OF PROJECT PARAMETERS FOR MINING ENTERPRISES

Valuev A.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Professor, e-mail: valuev.online@gmail.com, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia.

The paper treats the problem of formalization of the decision-making model for selecting project options for development of solid minerals deposits. Multi-criteria nature of the decision stems from the need to balance the interests of a company – the subsoil users (represented by the integral economic effect of the project) and the state – the subsoil owner (expressed by the budget income and completeness of extraction of balance reserves of solid minerals from the subsoil). The developed approach is based on common features of the mining industry and its design, consisting in the binding of the majority of design decisions to the time and at the same time to the space, the specific character of the dynamics of the production process, including the dynamics of mining and providing works and equipment assignment to sites, the irreversibility of the changes of the entire natural-technological system state. To represent the relationships between qualitatively different alternatives of design decisions (including mining system, technological zoning of mine field and the opening scheme), the form of the tree of alternatives is proposed, end vertices whereof corresponding to fully defined project alternatives. To represent the implementation of alternatives in time and space the form of contourless oriented graph of states and transitions (GST) is introduced. The ways to represent mining operations dynamics, equipment fleet composition and its assignment to the areas of mining and providing jobs in the form of GST are proposed. The choice of the project variant is represented in the form of the problem of multi-objective optimization trajectory on GST. It is substantiated that the problem of Pareto-optimization of trajectories may be reduced to the problem of finding the entire set of suboptimal trajectories on GST which may be solved either by modified Dijkstra's method or the branch and bound method.

Key words and phrases: design of mining enterprises, solid minerals, the order of development of the deposit, distribution of equipment on sites, multicriteria optimization, Pareto set, tree of alternatives, transition graph, sub-optimal routing on a network.

ACKNOWLEDGEMENTS

The study was supported by the RF Ministry of Education and Science in the framework of the Government Task No. 2014/113 assigned to NUST MIS&S.

REFERENCES

1. Saati T.L. *Prinyatie resheniy pri zavisimostyakh i obratnykh svyazyakh: Analiticheskie seti* (Decision making with dependence and feedback links: Analytic network), Moscow, Izdatel'stvo LKI, 2008, 360 p.
2. Bascetin A.A. Decision support system using analytical hierarchy process (AHP) for the optimal environmental reclamation of an open-pit mine. *Environmental Geology*. 2007. Vol. 52. No. 4. P. 663–672.
3. Fillips D., Garsia-Dias A. *Metody analiza setey* (Methods of analysis of networks), Moscow, Mir, 1984.
4. Prikaz Minprirody RF № 218 ot 25.06.2010 «Ob utverzhdenii trebovaniy k strukture i oformleniyu proektnoy dokumentatsii na razrabotku mestorozhdeniy tverdykh poleznykh iskopaemykh, likvidatsiyu i konservatsiyu gornyykh vyrabotok i pervichnuyu pererabotku mineral'nogo syr'ya» (Order of Ministry of Natural Resources dated 25.06.2010 № 218 «On approval of requirements for the structure and design of the project documentation for the development of solid mineral deposits, liquidation and conservation of mining and primary processing of mineral raw materials»).
5. Ashikhmin A.A., Sytnik Yu.V. *Ratsional'noe osvoenie nedr*. 2013, no 2, pp. 15–19.
6. Valuev A.M., Velichenko V.V. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2002, no 6, pp. 149–157.
7. Valuev A.M. On the Problem of Efficient Search of the Entire Set of Suboptimal Routes in a Transportation Network. *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE2012*. La Manga, Murcia, Spain, 2–5 July 2012. Vol. 4. P. 1560–1563.
8. Shier D.A. Iterative Methods for Determining the K Shortest Paths in a Network. *Networks*. 1976. Vol. 6. P. 205–230.
9. Hershberger J., Maxel M., Suri S. Finding the k shortest simple paths: a new algorithm and its implementation. *ACM Transactions on Algorithms*. 2007. Vol. 3. P. 4–45.
10. Gotthilf Z., Lewenstein M. Improved algorithms for the k shortest paths and the replacement paths problems. *Information Processing Letters*. 2009. 109. P. 352–355.
11. Yen J.Y. Finding the k shortest loopless paths in a network. *Management Science*. 1971. Vol. 17. P. 712–716.