© А.В. Плотников, В.Е. Трушников, 2016

УДК 681.5

А.В. Плотников, В.Е. Трушников

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАЛЕЖИ ПРИРОДНОГО ГАЗА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Приведен процесс и результаты дискретизации математической модели объекта с распределенными параметрами – газовой залежи. В качестве объекта исследования избрана абстрактная залежь природного газа, представляющая собой газоносный пласт в форме параллелепипеда с эксплуатационными скважинами. Нижняя часть пласта заполнена пластовыми водами. Так как в основе процессов протекающих в залежи природного газа лежит изменение поля пластового давления, необходимо создание трехмерной модели. Модель представлена в виде соотношений характеризующих изменение пластового давления во всех точках пространства залежи, граничных и начальных условий, уравнения скорости фильтрации газа, уравнения газо-водяного контакта, функции входного воздействия системы и уравнения дебита залежи. Проведен вычислительный эксперимент по воспроизведению газового режима эксплуатации залежи на основе разработанной модели с некоторыми допущениями.

Ключевые слова: математическая модель, распределенная система, газовая залежь, дискретизация.

Ранее [3] было рассмотрено представление залежи природного газа как объекта с распределенными параметрами [4, 5]. В результате математического моделирования, был сделан вывод, что газовое месторождение [1, 2, 6] подходит под определение объекта с пространственно-распределенными параметрами. Также был сделан вывод, что разработка распределенной системы управления пластовым давлением при эксплуатации газового месторождения позволит повысить эффективность добычи газа.

Для анализа объекта с целью разработки автоматической системы управления добычей природного газа необходимо привести математическую модель объекта в дискретный вид. Для

простоты ограничим моделируемое пространство газовой залежи рамками параллелепипеда, в котором равномерно расположены одинаковые эксплуатационные скважины.

Как показано на рис. 1, объект делится на две различных среды: заводненная часть коллектора и часть коллектора, наполненная газом.

Основой модели является дифференциальное уравнение отображающее изменение давления в пространстве. Так как в нашем случае одна часть коллектора заполнена водой, а вторая часть газом, необходимо два таких уравнения – по одному для каждой среды.

Уравнение (1) отражает динамику изменения давления, в произвольной точке коллектора наполненного газом [3].

$$\frac{D}{p}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \tag{1}$$

$$0 < x < x_L; 0 < y < y_L; z_d < z < z_L;$$

$$D = \frac{m\mu_1}{nk}, \tag{2}$$

$$P = p^{\frac{n+1}{n}}, \tag{3}$$

где $p = p(x, y, z, t)$ – пластовое давление в определенной точке залежи в момент времени t, t – время, m – пористость пласта, μ_1 – абсолютная вязкость газа, k – проницаемость пласта, n – показатель политропы.

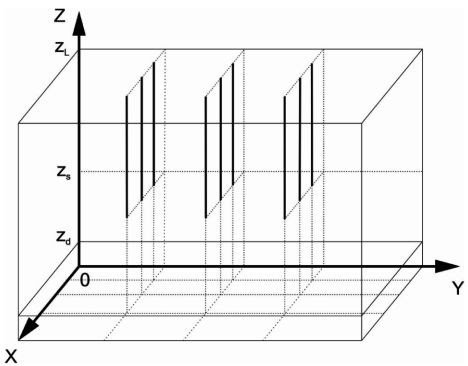

Рис. 1. Условная схема залежи с эксплуатационными скважинами: z_d – координата Z-плоскости газо-водяного контакта, z_s – координата Z-уровня расположения забоев скважин, z_L – кровля залежи

Предположим, что коллектор формирующий залежь недеформируемый, а давление в заводненной части будем считать постоянным для рассматриваемого уровня. В таком случае динамика давления воды в произвольной точке заводненного пространства объекта будет описываться следующим уравнением [3]:

$$0 = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \tag{4}$$

$$0 < x < x_L, 0 < y < y_L, 0 < z < z_d$$

Так как математическая модель пласта, составленная из дифференциальных уравнений, не имеет аналитического решения, то для оценки динамических характеристики создания соответствующего программного обеспечения модель приводится в дискретный вид с помощью метода конечных разностей. Когда данные дискретизированы, всегда есть некоторая сумма ошибки дискретизации. Цель состоит в том, чтобы уменьшить сумму ошибки до уровня, который рассматривают. При этом количество точек дискретизации по оси X равно H, по оси Y равно J, по оси Z равно V.

$$\frac{\Delta P_{h,j,v}}{\Delta t} = \frac{p}{D}\left(\frac{P_{h-1,j,v} - 2P_{h,j,v} + P_{h+1,j,v}}{\Delta x^2} + \right.$$
$$\left.\frac{P_{h,j-1,v} - 2P_{h,j,v} + P_{h,j+1,v}}{\Delta y^2} + \frac{P_{h,j,v-1} - 2P_{h,j,v} + P_{h,j,v+1}}{\Delta z^2}\right) \tag{5}$$
$$\left(h = \overline{1,H}, j = \overline{1,J}, v = \overline{v_d, V}\right)$$

где Δx, Δy, Δz – шаги дискретизации по осям X, Y и Z соответственно, $h_{s,1}$, $j_{s,1}$ и $h_{s,2}$, $j_{s,2}$ – координаты по осям X и Y первой и второй скважин соответственно, v_d – координата плоскости газо-водяного контакта по оси Z, Δt – шаг дискретизации по времени.

Аналогичным образом, приводим уравнение (3) для заводненной части к дискретному виду:

$$0 = \frac{P_{h-1,j,v} - 2P_{h,j,v} + P_{h+1,j,v}}{\Delta x^2} + \frac{P_{h,j-1,v} - 2P_{h,j,v} + P_{h,j+1,v}}{\Delta y^2} +$$
$$+ \frac{P_{h,j,v-1} - 2P_{h,j,v} + P_{h,j,k+v}}{\Delta z^2} \tag{6}$$
$$\left(h = \overline{1,H}, j = \overline{1,J}, v = \overline{1,v_d}\right)$$

Необходимо задать граничные условия, описывающие поведение объекта на его границах:

$$\begin{gathered} p(0, j, v, t) = p(1, j, v, t); \\ p(H+1, j, v, t) = p(H, j, v, t); \\ p(h, 0, v, t) = p(h, 1, v, t); \\ p(h, J+1, v, t) = p(h, J, v, t); \\ p(h, j, 0, t) = p(h, j, 1, t); \\ p(h, j, V+1, t) = p(h, j, V, t); \end{gathered} \tag{7}$$

Предположим, что до начала эксплуатации залежи природного газа, давлении по всему ее объему одинаково (8).

$$p(h, j, v, 0) = p_0 \tag{8}$$

$$\left(h = \overline{1, H}, j = \overline{1, J}, v = \overline{1, V}\right)$$

где p_0 – начальное пластовое давление в залежи.

Так как фильтрация газа в пласте происходит в результате перепада давления, то скорость и направление его движения представлены системой уравнений:

$$\begin{gathered} \rho u = -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu_1}\frac{\Delta P(h, j, v, t)}{\Delta x} \\ \rho \upsilon = -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu_1}\frac{\Delta P(h, j, v, t)}{\Delta y} \\ \rho w = -\frac{kn}{\beta(n+1)\mu_1}\frac{\Delta P(h, j, v, t)}{\Delta z} \end{gathered} \tag{9}$$

$$\left(h = \overline{1, H}, j = \overline{1, J}, v = \overline{1, v_d}\right)$$

$$\beta\rho = P^{\frac{1}{n+1}}, \tag{10}$$

где u, υ, w – компоненты вектора скорости фильтрации по координатным осям x, y, z соответственно, ρ – плотность газа в данной точке пространства, β – газовая постоянная.

Аналогичным образом получаем уравнения для определения скорости и направления движения воды:

$$\begin{gathered} u = -\frac{k}{\mu_2}\frac{\Delta P(h, j, v, t)}{\Delta x}; \ \upsilon = -\frac{k}{\mu_2}\frac{\Delta P(h, j, v, t)}{\Delta y}; \\ w = -\frac{k}{\mu_2}\frac{\Delta P(h, j, v, t)}{\Delta z} \end{gathered} \tag{11}$$

где μ_2 – абсолютная вязкость воды.

Во время эксплуатации залежи в газовом режиме плоскость газо-водяного контакта остается практически неподвижной. Но когда депрессия давления доходит до данной плоскости, вода начинает продвигаться в сторону скважин. Таким образом, газовый режим эксплуатации месторождения сменяется водонапорным. Для отражения движения элементов плоскости газо-водяного контакта вводим следующие выражения:

$$-m\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)=\frac{kn}{\mu_1(n+1)}P^{-\frac{1}{n+1}}\left(\frac{\Delta p(h,j,v,t)}{\Delta z}\right), \qquad (12)$$

$$-m\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)=\frac{kn}{\mu_2}\left(\frac{\Delta p(h,j,v,t)}{\Delta z}\right), \qquad (13)$$

где Δp – изменение пластового давления.

Дебит залежи является его наиболее важной, с точки зрения продуктивности, характеристикой. Весовой дебит эксплуатируемой с помощью f скважин залежи определяется из следующего соотношения:

$$G_z=\sum_{i=1}^{f}G_i \qquad (14)$$

где G_i – весовой дебит i-ой скважины рассматриваемой залежи.

Дебитом конкретной скважины будем считать количество газа, проникшее в ствол скважины. Дебит i-ой определяется из соотношения:

$$G_i(r,z)=\frac{k\cdot n\cdot g\cdot F}{\beta\cdot(n+1)\cdot\mu_1}\frac{\partial P}{\partial z_{s,i}}+\frac{k\cdot n\cdot g}{\beta\cdot(n+1)\cdot\mu_1}\int_{z_{s,i}}^{z_{L,i}}\oint\frac{\partial P}{\partial r}dsdz \qquad (15)$$

где F – площадь сечения скважины, $z_{s,i}$, $z_{L,i}$ – координаты ствола i-ой скважины в залежи, g – ускорение свободного падения, r – радиус – вектор, проведенный из центра скважины, ds – элемент окружности.

Так как дискретная модель построена в декартовых координатах, круговой интеграл изменений давления аппроксимируем к сумме изменений давления из нескольких выбранных точек вокруг окружности скважины. В результате получим следующее:

$$G_i=G_{b,i}+G_{s,i} \qquad (16)$$

$$G_{b,i}=B\cdot F\cdot\frac{\Delta P_{h_{s,i},j_{s,i},v_{s,i}-1}}{\Delta z} \qquad (17)$$

$$G_{s,i}=B\cdot\sum_{v=v_{s,i}}^{V_i}\left(\frac{\Delta P_{h_{s,i}+1,j_{s,i},v}}{\Delta x}+\frac{\Delta P_{h_{s,i}-1,j_{s,i},v}}{\Delta x}+\frac{\Delta P_{h_{s,i},j_{s,i}+1,v}}{\Delta y}+\frac{\Delta P_{h_{s,i},j_{s,i}-1,v}}{\Delta y}\right) \qquad (18)$$

$$B = \frac{k \cdot n \cdot g}{\beta \cdot (n+1)\mu_1} \tag{19}$$

где $G_{b,i}$ – весовой дебит газа через дно i-ой скважины, $G_{s,i}$ –весовой дебит газа через боковую поверхность i-ой скважины.

При эксплуатации газодобывающих скважин можно управлять темпом снижения и распределением пластового давления в залежи с помощью ограничения давления в скважинах.

В качестве входного воздействия распределенной системы выступает давление в точках расположения эксплуатационных скважин.

$$p_{s,i}(h_{s,i}, j_{s,i}, v_i, t) = U(x, y), \tag{20}$$

$$v_{s,i} < v_i < V_i$$

$$U(x, y) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \xi}{L_x} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \gamma}{L_y} \cdot y\right) \tag{21}$$

где $h_{s,i}$, $j_{s,i}$, v_i – координаты ствола i-ой скважины в залежи, $p_{s,i}$ – заданное давление i-ой скважины, A – амплитуда входного воздействия, ξ и γ – номера пространственных мод по x и y соответственно, L_x и L_y – размеры объекта по осям x и y соответственно.

Функцией выхода служит распределение давления в заданных (контрольных) точках пласта. Таким образом, математическая модель газовой залежи теперь пригодна к дальнейшему компьютерному моделированию и частотному анализу.

В качестве объекта компьютерного моделирования выступает абстрактная залежь размером 1×1×0,2 км, эксплуатируемая в газовом режиме. В эксплуатации залежи задействовано 9 равномерно расположенных скважин.

В рамках эксперимента, параметры газоносного пласта считались неизменными по всему объему и имеют следующие значения: $m = 0{,}15$; $k = 0{,}8$ мД; $\mu_1 = 11{,}2$ мкПа/с.

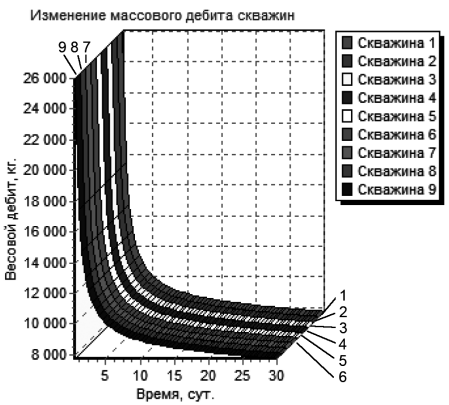

Рис. 2. График изменения весового дебита скважин в течении 30 суток непрерывной работы

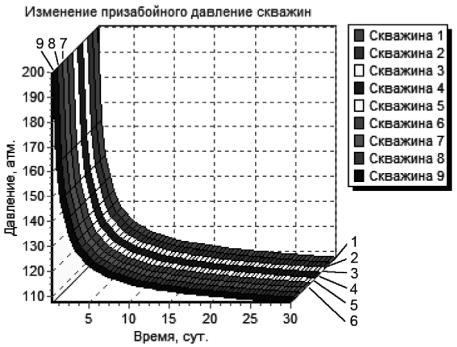

Рис. 3. График изменения призабойного давления скважин в течении 30 суток непрерывной работы

Начальное пластовое давление залежи имело следующее значение: $\rho_0 = 200$ атм.

На вход системы было приложено распределенное воздействие (21) со следующими условиями: $\xi = 3$; $\gamma = 3$; $L_x = 1000$ м; $L_y = 1000$ м; $A = 20$ атм.

В результате вычислительного эксперимента были получены следующие данные (рис. 2, 3).

В связи с тем, что в ходе эксперимента значения пористости и проницаемости были приняты едиными для всего объема залежи, динамика изменения давления и дебита для всех скважин получилась почти одинаковой.

В результаты исследования получены:

• дискретная модель залежи природного газа как объекта с распределенными параметрами;

• компьютерная модель залежи природного газа с применением распределенного входного воздействия;

• приведенная модель отражает динамику процессов, происходящих при эксплуатации газовой залежи, и позволит получить данные необходимые для проведения частотного анализа объекта с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коршак А. А.*, *Шаммазов А. М.* Основы нефтегазового дела. Учебник для вузов. – Уфа: ООО «Дизайн Полиграф Сервис», 2001. – 544 с.

2. *Лейбензон Л. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М., 1947. – 244 с.

3. *Плотников А. В.*, *Пономарчук П. А.*, *Трушников В. Е.* Моделирование месторождений природного газа как систем с пространственно распределенными параметрами // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2015. – № 6. – С. 326–331.

4. *Першин И. М.* Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. Учебное пособие по системам с распределенными параметрами – Пятигорск, 2007.

5. *Рапопорт Э. Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами – М.: Высшая школа, 2005. – 292 с., ил.

6. *Стрижов И. Н.*, *Ходанович И. Е.* Добыча газа. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 376 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Плотников А.В. – ассистент, e-mail: apvitarlaeda@gmail.com,
Трушников Вячеслав Евстафьевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: tvye@yandex.ru,
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный».

UDC 681.5

A.V. Plotnikov, V.E. Trushnikov

DISCRETIZATION OF DISTRIBUTED MATHEMATICAL MODEL OF NATURAL GAS DEPOSIT FINITE DIFFERENCE METHOD

The article presents the process of discretization of mathematical model of distributed object – natural gas deposit. As the research object the abstract gas deposit was chosen and represented as gas-bearing stratum of parallelepiped form with production wells. The lower part of the deposit filled with formation water. So as the alteration of a strata pressure lies in the core of deposits geological processes, three dimensional model is necessary. Model is represented by the equations characterizing the alteration of a strata pressure in each point of deposit space, border and initial conditions, equations for gas filtration speed, equation for gas-water contact, input function and deposit gas output. The computational experiment of gas drive based on developed model with some assumptions had been conducted.

Key words: mathematical model, distributed system, gas deposit, discretization.

AUTHORS

Plotnikov A.V.[1], Assistant, e-mail: apvitarlaeda@gmail.com,
Trushnikov V.E.[1], Doctor of Technical Sciences, Professor,
e-mail: tvye@yandex.ru,
[1] National Mineral Resource University «University of Mines»,
199106, Saint-Petersburg, Russia.

REFERENCES

1. Korshak A. A., Shammazov A. M. *Osnovy neftegazovogo dela*. Uchebnik dlya vuzov (Fundamentals of oil and gas business. Textbook for high schools), Ufa, OOO «Dizayn Poligraf Servis», 2001, 544 p.

2. Leybenzon L. S. *Dvizhenie prirodnykh zhidkostey i gazov v poristoy srede* (Movement of natural liquids and gases in a porous medium), Moscow, 1947, 244 p.

3. Plotnikov A. V., Ponomarchuk P. A., Trushnikov V. E. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2015, no 6, pp. 326–331.

4. Pershin I. M. *Analiz i sintez sistem s raspredelennymi parametrami. Uchebnoe posobie po sistemam s raspredelennymi parametrami* (Analysis and synthesis of systems with distributed parameters. Educational aid), Pyatigorsk, 2007.

5. Rapoport E. Ya. *Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s raspredelennymi parametrami* (Analysis and synthesis of automatic control systems with distributed parameters), Moscow, Vysshaya shkola, 2005, 292 p.

6. Strizhov I. N., Khodanovich I. E. *Dobycha gaza* (Gas production), Moscow-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2003, 376 p.