

## О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕЛИКОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

А.И. Чанышев<sup>1,2</sup>, И.М. Абдулин<sup>1</sup>, О.Е. Белоусова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет экономики и управления, Новосибирск, Россия,  
e-mail: a.i.chanyshhev@gmail.com

**Аннотация:** Решается задача о потере устойчивости целиков цилиндрической формы под действием сжимающей нагрузки. Предполагается, что материал целиков может как претерпевать упругие и пластические деформации, так и находиться в состоянии запредельного деформирования, когда сопротивление среды падает с ростом деформаций. Рассматривается только такая форма потери устойчивости, когда образуется «бочка», т.е. материал средней части целиков выпирается наружу больше, чем у краев. Задача решается в постановке Лейбензона-Ишлинского, предполагающей образование нового равновесного состояния конструкции, бесконечно близкого к основному, но с искаженной формой геометрии. Решается вопрос о возможном моменте зарождения «бочкообразования», т.е. об определении такой нагрузки (критической), при которой это явление может наступить в состоянии упругости, в состоянии пластичности или в состоянии запредельного деформирования. Для решения задачи используются уравнения механики деформируемого твердого тела в случае осевой симметрии. При этом сформулированы уравнения неупругого деформирования среды. Для расчетов принимается гипотеза о продолжающемся нагружении в момент потери устойчивости (гипотеза Ф. Шенли). Получено общее решение системы уравнений для дополнительных смещений, образующихся в момент потери устойчивости в осесимметричном случае. Решение записывается в рядах с использованием цилиндрических функций. Определяются условия с образованием одной полуволны вдоль образующей целика. С удовлетворением граничных условий задачи составлена система двух линейных однородных уравнений с определителем, равным нулю. Найдено выражение критической нагрузки в зависимости от исходного состояния среды и относительных размеров целика. Показано, что наиболее реалистичные значения нагрузок имеет место на ниспадающей ветви деформирования целиков. Определено влияние значений модуля спада на значения относительных размеров целика. Отмечается незначительное влияние коэффициента Пуассона на значения критических параметров.

**Ключевые слова:** устойчивость, продолжающееся догружение, пластичность, запредельное деформирование, цилиндрические функции комплексного аргумента

**Благодарность:** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А17-117121140065-7).

**Для цитирования:** Чанышев А. И., Абдулин И. М., Белоусова О. Е. О потере устойчивости целиков цилиндрической формы за пределом упругости // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – № 3. – С. 101–113. DOI: 10.25018/0236-1493-2021-3-0-101-113.

---

## Cylindrical pillar instability beyond elasticity limit

A.I. Chanyshv<sup>1,2</sup>, I.M. Abdulin<sup>1</sup>, O.E. Belousova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup> Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russia,  
e-mail: a.i.chanyshv@gmail.com

---

**Abstract:** In the article, the problem on instability of cylindrical pillars under compression is solved. It is assumed that pillars can experience elastic and plastic strains, as well as strains beyond the elastic limit, when the resistance drops with increasing strains. The analysis focuses only on a barreling-type instability, when pillars are heaved in the middle more than at the top and bottom. The problem is solved in the formulation by Leibenson–Ishlinsky, with assumption of a new equilibrium condition of the structure, which is infinitely close to the normal state but with distorted geometry. It is intended to determine the moment of the barrel distortion initiation, i.e., it is required to estimate the critical load such that barrel distortion takes place in the elastic state, in the plastic state or in the post-limit deformation. The problem is solved using equations of deformable solid mechanics in axial symmetry. The inelastic deformation equations are formulated. It also assumed that loading is continuous at the moment of instability—F. Shenley’s hypothesis. The general solution is obtained for the system of equations for additional displacements at the moment of instability in axial symmetry. The solution is written as rows of cylindrical functions. The conditions of one half-wave along generatrix of a pillar are defined. At the fulfilled boundary conditions in the problem, the system of two linearly uniform equations with the zero determinant is constructed. The expression of the critical load as function of the initial condition and relative dimension of a pillar is found. The most realistic values of loads belong to the descending branch of the deformation curve. The influence of the decline modulus on the values of relative dimension of pillars is determined. Poisson’s ratio has a minor effect on the critical values, too.

**Key words:** stability, continuous loading, plasticity, post-limit deformation, cylindrical functions of argument of complex number.

**Acknowledgements:** The work was carried out within framework of the state task of Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation, Theme No. AAAAA17-117121140065-7.

**For citation:** Chanyshv A.I., Abdulin I.M., Belousova O.E. Cylindrical pillar instability beyond elasticity limit. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2021;(3):101-113. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2021-3-0-101-113.

---

### Введение

Обеспечение безопасного ведения горных работ — важная проблема горного дела [1–3]. К ней примыкает задача о потере устойчивости целиков горных выработок. Отметим, что задача о потере остойчивости бесконечно длинной полосы, имитирующей слоистый материал в массиве горных пород, в рамках

теории упругости в условиях плоской деформации решалась в [4, 5]. Для случая выработки кругового сечения эта задача исследовалась в [6, 7]. Применение этого подхода к задаче об образовании шейки при растяжении цилиндрических образцов при упругопластических деформациях рассматривалось в [8]. В [9] исследовалась задача о потере устой-

чивости бесконечно длинной полосы за пределом упругости с применением соотношений упругопластических деформаций при сложном нагружении [10, 11].

В каждом из представленных случаев получены выражения критической нагрузки, при которой наряду с основным процессом деформирования конструкции возможно другое равновесное продолжение процесса: близкое, но не совпадающее с основным продолжением. Эта нагрузка в предельном случае совпадает с нагрузкой Эйлера, полученной для сжатия прямолинейного стержня. В то же время подход Лейбензона-Ишлинского позволяет исследовать устойчивость не только тонкостенных конструкций, но и массивных упругопластических.

В предлагаемой работе рассматривается устойчивость целиков шахтных выработок цилиндрической формы в случае осевого сжатия в условиях осесимметричной деформации. Докритическое состояние берется в виде идеальной пластичности, в виде пластичности с упрочнением, в виде запредельного деформирования. Описанию поведения материалов в различных условиях нагружения посвящено множество работ [12 – 18].

Потеря устойчивости происходит в рамках гипотезы Ф. Шенли [19] о продолжающемся нагружении в момент потери устойчивости, когда дополнительное догружение в каждой точке конструкции представляется суммой двух слагаемых — первое слагаемое соответствует однородному напряженному состоянию, второе связано с искривлениями поверхности конструкции в момент потери устойчивости, зависит от координат точек конструкции. При этом суммарное догружение направлено в область активной догрузки, что соответствует определению минимальных значений критической нагрузки [20].

### Постановка задачи

Пусть имеется конструкция в виде целика цилиндрической формы, сжимаемая в направлении образующих цилиндра нагрузкой  $\sigma_z = -P$ ,  $P > 0$ ,  $P = \text{const}$ .

Тензоры напряжений и деформаций для осесимметричной деформации имеют вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{pmatrix}, T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{rz} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Для формулировки соотношений неупругого деформирования среды введем в рассмотрение ортогональный и ортонормированный тензорный базис с тензорами-ортами

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Скалярное произведение тензоров второго ранга определяется здесь как свертка  $(T_\sigma, T_\varepsilon) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  по повторяющимся индексам [21].

Исходное напряженно-деформированное состояние сжимаемого целика имеет следующие тензоры напряжений и деформаций

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi) \quad (3)$$

и координаты этих тензоров в базисе (2) равны следующим значениям:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{\sigma_z}{\sqrt{3}}, S_2 = S_3 = 0, \\ \Omega_1 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi}{\sqrt{3}}, \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \Omega_4 = \frac{2(\varepsilon_z - \varepsilon_r)}{\sqrt{6}}, (\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi), \end{cases} \quad (4)$$

где  $S_i = (T_\sigma, T_i)$ ,  $\Omega_i = (T_\varepsilon, T_i)$  – координаты ( $i = 1, \dots, 4$ ).

Говоря о базисе (2), следует отметить, чтобы тензор  $T_1$  здесь соответствует шаровому тензору, в направлении которого в теориях упругости, пластичности, разрушения предполагается, что связь между координатами  $S_1$  и  $\Omega_1$  пропорциональная и не зависящая от состояния среды (упругость, пластичность, ползучесть, запредельное деформирование) [22]. Оставшиеся тензоры (2) определяют в совокупности девиаторное пространство [23], которое связано с касательными напряжениями и сдвигами. Оно порождает неупругую деформацию в направлениях тензоров  $T_2, T_3, T_4$ . В нашем случае в силу (4) нагружение до момента потери устойчивости происходило в направлении тензора  $T_4$ , по другим направлениям нагружение отсутствовало. Предполагается, что неупругое деформирование будет осуществляться вдоль  $T_4$ . Вводим следующие связи между приращениями напряжений и приращениями деформаций при неупругом деформировании материала вдоль тензора  $T_4$ :

$$\frac{\Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_z + \Delta\sigma_\varphi}{\sqrt{3}K}, \quad \text{где } K = E / (1 - 2\nu);$$

$$\sqrt{2}\Delta\varepsilon_{rz} = \sqrt{2}\Delta\tau_{rz} / 2\mu, \quad \frac{\Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi}{\sqrt{2} \cdot 2\mu_p}, \quad \frac{2\Delta\varepsilon_z - \Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_\varphi}{\sqrt{6}} = \frac{2\Delta\sigma_z - \Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi}{\sqrt{6} \cdot 2\mu_p},$$

где  $2\mu$  – модуль сдвига;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $2\mu_p$  – касательной модуль сдвига на диаграмме деформирования  $\sigma_z = f(\varepsilon_z - \varepsilon_\varphi)$ , полученной при одноосном сжатии образца горной породы вдоль оси (рис. 1), где  $f$  – функция переменной  $(\varepsilon_z - \varepsilon_\varphi)$ .

Определяющие соотношения (5) – (8) перепишем в виде, разрешенном относительно приращений напряжений  $\Delta\sigma_{ij}$ :

$$\begin{cases} \Delta\sigma_r = (K + 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_r / 3 + (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_z / 3 + (K - 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_\varphi / 3, \\ \Delta\sigma_z = (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_r / 3 + (K + 4\mu_p)\Delta\varepsilon_z / 3 + (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_\varphi / 3, \\ \Delta\sigma_\varphi = (K - 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_r / 3 + (K - 2\mu_p)\Delta\varepsilon_z / 3 + (K + 3\mu + \mu_p)\Delta\varepsilon_\varphi / 3, \\ \Delta\tau_{rz} = 2\mu\Delta\varepsilon_{rz}, \end{cases} \quad (9)$$

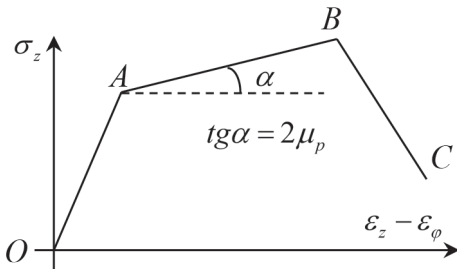


Рис. 1 Экспериментально устанавливаемая зависимость  $\sigma_z \sim \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi$ , получаемая при сжатии цилиндрических образцов горных пород;  $2\mu_p$  – касательный модуль сдвига,  $2\mu_p = 0$  для идеальнопластического деформирования,  $2\mu_p > 0$  для упрочняющегося материала,  $2\mu_p < 0$  для запредельного деформирования на участке BC

Fig. 1. Experimentally set dependence  $\sigma_z \sim \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi$ , obtained by compression of cylindrical rock samples;  $2\mu_p$  – tangent shear modulus,  $2\mu_p = 0$  for ideal plastic deformation,  $2\mu_p > 0$  for hardening material,  $2\mu_p < 0$  for out-limit deformation in BC

где

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\partial \Delta u}{\partial r}, \Delta \varepsilon_\varphi = \frac{\Delta u}{r}, \Delta \varepsilon_z = \frac{\partial \Delta \omega}{\partial z}, \Delta \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial z} + \frac{\partial \Delta \omega}{\partial r} \right), \quad (10)$$

$\Delta u, \Delta \omega$  — приращения смещений в направлениях осей цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$ .

Подстановка (9), (10) в уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \Delta \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta \sigma_r - \Delta \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \Delta \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\Delta \tau_{rz}}{z} + \frac{\partial \Delta \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

приводит к следующей системе уравнений для приращений смещений  $\Delta u, \Delta \omega$ :

$$\begin{cases} (K - 2\mu_p + 3\mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} \right] / 3 + \mu_p \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + (\mu - \mu_p) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \\ (K - 2\mu_p + 3\mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] / 3 + \mu \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] - 2(\mu - \mu_p) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где для упрощения записи символы приращений смещений убираются.

### Получение результатов

Решение системы (11) отыскиваем в виде

$$u = A(\alpha ch(pz) + \beta sh(pz))Z_1(\lambda r), \quad \omega = B(\beta ch(pz) + \alpha sh(pz))Z_0(\lambda r), \quad (12)$$

где  $A, B$  — произвольные постоянные;  $Z_1(\lambda r)$  — цилиндрическая функция первого порядка;  $Z_1(\lambda r) = MJ_1(\lambda r) + FN_1(\lambda r)$ ,  $J_1(\lambda r)$  — функция Бесселя;  $N_1(\lambda r)$  — функция Неймана;  $Z_0(\lambda r) = MJ_0(\lambda r) + FN_0(\lambda r)$ ,  $J_0(\lambda r)$  — функция Бесселя нулевого порядка;  $N_0(\lambda r)$  — функция Неймана нулевого порядка;  $M, F$  — константы.

Вычисляя производные от функции  $u, \omega$  по координате  $r$  на основании свойств цилиндрических функций [24]  $Z_1'(\lambda r) = -\frac{1}{\lambda r} Z_1(\lambda r) + Z_0(\lambda r)$ ,  $Z_0'(\lambda r) = -Z_1(\lambda r)$ , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = A(\alpha ch(pz) + \beta sh(pz))Z_1'(\lambda r) \cdot \lambda = A(\alpha ch(pz) + \beta sh(pz))(-Z_1(\lambda r)/r + \lambda Z_0(\lambda r)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = A(\alpha ch(pz) + \beta sh(pz))(2Z_1(\lambda r)/r^2 - \lambda Z_0(\lambda r)/r - \lambda^2 Z_1(\lambda r)),$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} = -B(\alpha ch(pz) + \beta sh(pz))p\lambda Z_1(\lambda r).$$

Подставляя эти производные в первое уравнение (11), выводим следующее уравнение для определения констант  $A$  и  $B$ :

$$(\mu p^2 - \lambda^2(K + \mu_p + 3\mu)/3)A - \lambda p B(K - 2\mu_p + 3\mu)/3 = 0. \quad (13)$$

Подстановка (12) во второе уравнение (11) приводит к другому уравнению для отыскания констант  $A$  и  $B$ :

$$\lambda p A(K - 2\mu_p + 3\mu)/3 + B(p^2(K + 4\mu_p)/3 - \mu\lambda^2) = 0. \quad (14)$$

Система (13), (14) является системой однородных линейных уравнений для нахождения неизвестных величин  $A$  и  $B$ .

Определитель ее для существования ненулевого решения должен быть равен нулю. Составляя определитель системы и приравнивая его нулю, после несложных преобразований получаем следующее характеристическое уравнение для определения отношения  $\lambda/\rho$ :

$$(K + \mu_p + 3\mu)\mu(\lambda / \rho)^4 - (3K\mu_p - K\mu + 8\mu\mu_p)(\lambda / \rho)^2 + (K + 4\mu_p)\mu = 0. \quad (15)$$

Данное уравнение является биквадратным. Если ввести обозначение

$$(\lambda / \rho)^2 = y, \quad (16)$$

то для  $y$  получаем квадратное уравнение

$$y^2 - (3K\mu_p - K\mu + 8\mu\mu_p)y / (\mu(K + \mu_p + 3\mu)) + (K + 4\mu_p) / (K + \mu_p + 3\mu) = 0. \quad (17)$$

Корнями (17) являются комплексные числа, которые имеют следующие выражения

$$y_{1,2} = \frac{3K\mu_p - K\mu + 8\mu\mu_p \pm i\sqrt{3(\mu - \mu_p)(K(\mu + 3\mu_p) + 4\mu\mu_p)(K + 4\mu)}}{2\mu(K + \mu_p + 3\mu)}. \quad (18)$$

Зная величину  $y$  из (18), можно найти затем из (16)  $x = \lambda/\rho$ . Выражения для  $x$  записываем в виде

$$x = (\tau + i\gamma) / s.$$

Из (16), (18), (17) следует, что

$$s = \sqrt{2\mu(K + \mu_p + 3\mu)},$$

$$\begin{cases} \frac{\tau}{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{K + 4\mu_p}{K + \mu_p + 3\mu}} + \frac{3K\mu_p - K\mu + 8\mu\mu_p}{4\mu(K + \mu_p + 3\mu)}, \\ \frac{\gamma}{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{K + 4\mu_p}{K + \mu_p + 3\mu}} - \frac{3K\mu_p - K\mu + 8\mu\mu_p}{4\mu(K + \mu_p + 3\mu)}. \end{cases} \quad (19)$$

Корни (15) после этого выражаются формулами:

$$\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)_1 = \frac{\tau}{s} + i\frac{\gamma}{s}, \quad \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)_2 = \frac{\tau}{s} - i\frac{\gamma}{s}, \quad \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)_3 = -\frac{\tau}{s} + i\frac{\gamma}{s}, \quad \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)_4 = -\frac{\tau}{s} - i\frac{\gamma}{s}. \quad (20)$$

Поскольку корней характеристического уравнения четыре и все они разные по величине ( $\mu \neq \mu_p$ ), то решение системы (11) представляется в виде

$$u = \sum_{i=1}^4 A_i Z_1(\lambda_i r) (\alpha ch(pz) + \beta sh(pz)), \quad \omega = \sum_{i=1}^4 B_i Z_0(\lambda_i r) (\beta ch(pz) + \alpha sh(pz)), \quad (21)$$

где между значениями констант  $A_i$  и  $B_i$  выполняется одно из условий (13) или (14) (определитель системы (13), (14) обращается в ноль).

Для определенности примем, что этим условием является (14), тогда

$$B_i = -\frac{\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)_i (K - 2\mu_p + 3\mu)}{K + 4\mu_p - 3\mu \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)_i^2} A_i, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (22)$$

Обратимся к характеру изменения величин по координатам  $r$  и  $z$ . Будем считать, что  $\omega$  — нечетная функция координаты  $z$ , где  $-H/2 \leq z \leq H/2$ ;  $H$  — высота целика. Это означает, что коэффициент  $\beta$  в (21) обращается нулю, а коэффициент  $\alpha$  при этом можно приравнять единице, т.е. присоединить его к коэффициентам  $A_i$  и  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Очевидно, что функция  $\omega$  должна быть четной функцией координаты  $r$ , т.е.  $\omega(r) = \omega(-r)$ . Поскольку  $Z_0(\lambda r)$  — четная функция аргумента  $\lambda r$ , то тогда в силу (20) должно быть  $B_1 = B_4, B_2 = B_3$ . Так как справедливо (22) и корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_4$  разных знаков, то тогда разных знаков должны быть коэффициенты  $A_1$  и  $A_4$ , точно так же разных знаков должны быть коэффициенты  $A_2$  и  $A_3$ . В итоге имеем следующее представление для функций  $u$  и  $\omega$ :

$$\begin{cases} u = 2[A_1 Z_1(\lambda_1 r) + A_2 Z_1(\lambda_2 r)] \operatorname{ch}(pz), \\ \omega = 2[B_1 Z_0(\lambda_1 r) + B_2 Z_0(\lambda_2 r)] \operatorname{sh}(pz). \end{cases} \quad (23)$$

Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  согласно (20) комплексно сопряжены, и функция  $u$  должна быть вещественной, по этой причине получаем  $A_1 = -\bar{A}_2, B_1 = -\bar{B}_2$ .

Применим (23) для решения задачи о потере устойчивости целика. Эти соотношения должны удовлетворять граничным условиям, следующим из [4, 5, 25]:

$$\begin{cases} \Delta \sigma_r|_{r=R} = 0, \\ \Delta \tau_{rz}|_{r=R} = -P_c \frac{\partial u}{\partial z}, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\sigma_z = -P_c$  — критическое значение осевой нагрузки, при которой может произойти потеря устойчивости целика.

Согласно (9), (23) находим приращения напряжений  $\Delta \sigma_r, \Delta \tau_{rz}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_r = & \left[ -2\mu \frac{Z_1(\lambda_1 r)}{r} + \frac{K + 3\mu + \mu_p}{3} \lambda_1 Z_0(\lambda_1 r) \right] \cdot A_1 + \\ & + \left[ -2\mu \frac{Z_1(\lambda_2 r)}{r} + \frac{K + 3\mu + \mu_p}{3} \lambda_2 Z_0(\lambda_2 r) \right] \cdot A_2 + \frac{K - 2\mu_p}{3} [B_1 Z_0(\lambda_1 r) + B_2 Z_0(\lambda_2 r)] \cdot p, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{rz} = & \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \mu [A_1 Z_1(\lambda_1 r) + A_2 Z_1(\lambda_2 r)] p \cdot \operatorname{sh}(pz) + \\ & + \mu [-B_1 \lambda_1 Z_1(\lambda_1 r) - B_2 \lambda_2 Z_1(\lambda_2 r)] \operatorname{sh}(pz). \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение для  $\partial u / \partial z$  получает вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = [A_1 Z_1(\lambda_1 r) + A_2 Z_1(\lambda_2 r)] p \cdot \operatorname{sh}(pz). \quad (27)$$

Подставляя (25) — (27) в (24), находим линейную систему уравнений при  $r = R$ , связывающую неизвестные константы  $A_1, A_2, B_1, B_2$ .

Положим в этой системе для ограниченности решения по координате  $z$

$$p = i \frac{\pi}{H}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p} = -i \frac{H}{\pi}, \quad \frac{1}{rp} = -i \frac{H}{r\pi}, \quad \operatorname{sh}(pz) = i \sin \frac{\pi z}{H}, \quad \operatorname{ch}(pz) = \cos \frac{\pi z}{H}.$$

Определитель системы уравнений (24) с учетом выражений (25), (26) относительно неизвестных констант  $A_1/\rho$ ,  $A_2/\rho$ , получает вид

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -2\mu Z_1 \left[ \left( -\frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{-i \operatorname{arctg} \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right] \cdot \left( -i \frac{H}{\pi r} \right) + \\ &+ \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_1 \frac{K + 3\mu + \mu_p}{3} Z_0 \left[ \left( -\frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{-i \operatorname{arctg} \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right] + \frac{K - 2\mu_p}{3} L_1 Z_0 \left[ \left( -\frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{-i \operatorname{arctg} \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right], \\ \alpha_{12} &= -2\mu Z_1 \left[ \left( \frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{i \operatorname{arctg} \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right] \cdot \left( -i \frac{H}{\pi r} \right) + \\ &+ \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_2 \frac{K + 3\mu + \mu_p}{3} Z_0 \left[ \left( \frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{i \operatorname{arctg} \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right] + \frac{K - 2\mu_p}{3} L_2 Z_0 \left[ \left( \frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{i \operatorname{arctg} \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right], \end{aligned}$$

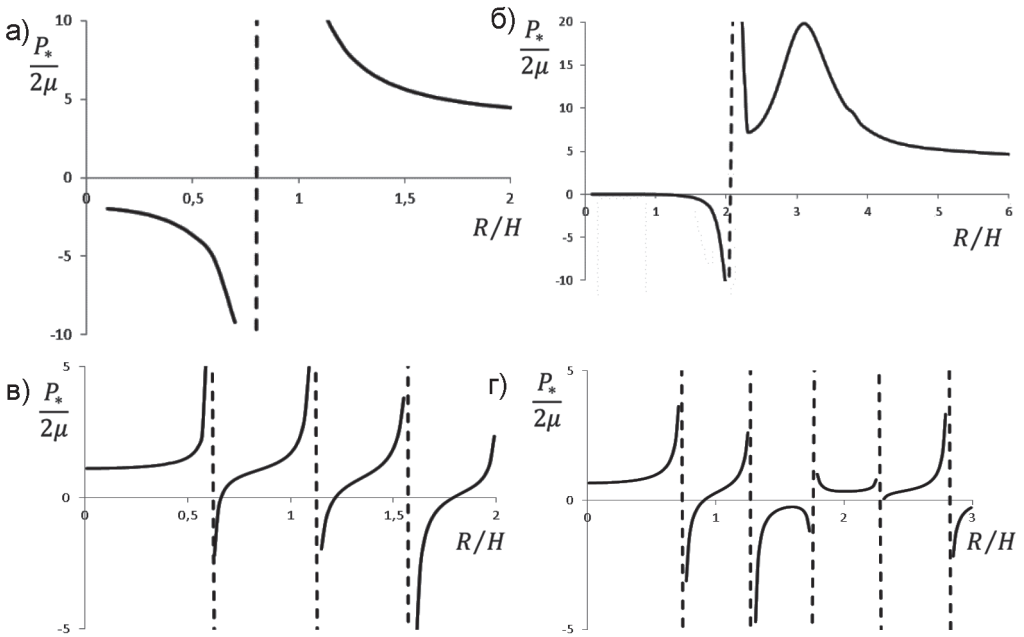


Рис. 2. Зависимость предельной нагрузки  $P_*/2\mu$  от безразмерного параметра, характеризующего форму образца. Пунктиром обозначена вертикальная асимптота. Модуль Юнга  $E = 6 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,35$ ;  $\mu_p = \mu$  (а),  $\mu_p = 0$  (б),  $\mu_p = -\mu$  (в),  $\mu_p = -0,5\mu$  (г)

Fig. 2. Dependence of the critical load  $P_*/2\mu$  on the dimensionless parameter characterizing the shape of the sample. The dotted line indicates the vertical asymptote. Young's modulus  $E = 6 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,35$ ;  $\mu_p = \mu$  (а),  $\mu_p = 0$  (б),  $\mu_p = -\mu$  (в),  $\mu_p = -0,5\mu$  (г)



$$\alpha_{21} = \left( \frac{P^*}{\mu} + 1 \right) Z_1 \left[ \left( -\frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{-i \arctg \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right] - L_1 \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_1 Z_1 \left[ \left( -\frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{-i \arctg \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right],$$

$$\alpha_{22} = \left( \frac{P^*}{\mu} + 1 \right) Z_1 \left[ \left( \frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{i \arctg \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right] - L_2 \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_2 Z_1 \left[ \left( \frac{r\pi}{H} \rho \right) e^{i \arctg \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)} \right],$$

где обозначено

$$\rho = \sqrt{\frac{K + 4\mu_p}{K + \mu_p + 3\mu}}, L_1 = -\frac{\left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_1 (K - 2\mu_p + 3\mu)}{K + 4\mu_p - 3\mu \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_1^2}, L_2 = -\frac{\left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_2 (K - 2\mu_p + 3\mu)}{K + 4\mu_p - 3\mu \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)_2^2}. \quad (28)$$

Последние две формулы (28) следуют из (22).

### Обсуждение результатов

На рис. 2 представлены зависимости предельной нагрузки  $P_u/2\mu$  от безразмерного параметра  $R/H$ , характеризующего форму целика, в случае упругости ( $\mu_p = 0,99\mu$  рис. 2, а), в случае идеальной пластичности ( $\mu_p = 0$  рис. 2, б), в случае запредельного деформирования ( $\mu_p = -\mu$  рис. 2, в,  $\mu_p = -0,5\mu$  рис. 2, г). Пунктиром на графиках обозначены вертикальные асимптоты. Модуль Юнга  $E = 6 \cdot 10^{10}$ ,  $\nu = 0,35$ . Из этого рисунка следует, что критические нагрузки как

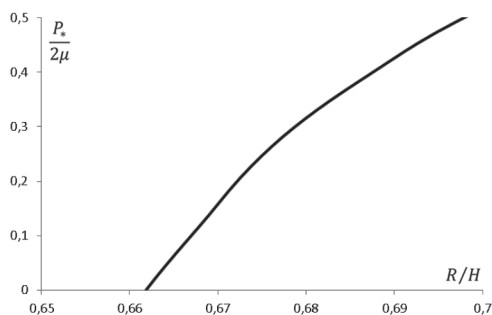


Рис. 3. Зависимость предельной нагрузки  $P_u / 2\mu$  от безразмерного параметра, характеризующего форму образца для рис. 2, в на интервале от 0,65 до 0,7  $R/H$

Fig. 3. Dependence of the ultimate load  $P_u / 2\mu$  on the dimensionless parameter characterizing the shape of the sample on Fig. 2, b in the interval from 0,65 to 0,7  $R/H$

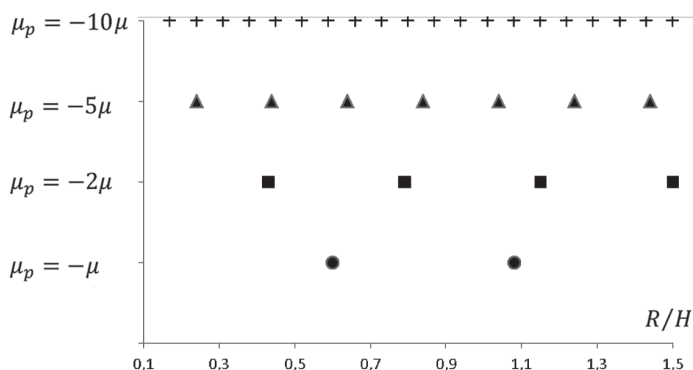


Рис. 4. Значения безразмерного параметра  $R/H$ , при которых происходит потеря устойчивости целиков в момент их полного разрушения с образованием «бочки», для разных отрицательных значений модуля  $\mu_p$  (модуля спада)

Fig. 4. Value of the dimensionless parameter  $R/H$ , at which there is a stability loss of the pillars at the moment of their complete destruction and the «barrel» formation, for different negative values of the modulus  $\mu_p$  (decay module)

в случае упругости, так и в случае пластичности принимают завышенные значения (больше значений  $2\mu$ ). Нагрузки, близкие к реальным, получаются только в случае запредельного деформирования. Это означает, что процесс «бочкообразования» может наблюдаться только на стадии запредельного деформирования.

Для данного значения модуля спада, сопоставляя рис. 1, рис. 2 и рис. 3, находим определенные размеры целика, когда наступит потеря устойчивости.

На рис. 4 показаны безразмерные параметры целиков в виде отношения  $R/H$  и указаны значения модуля спада, когда будет происходить потеря устойчивости целиков в момент их полного разрушения. Видно, что с уменьшением абсолютного значения модуля спада, количество целиков с «бочкообразованием» уменьшается.

Математические расчеты не показали существенно влияния коэффициента

Пуассона на характер зависимости предельной нагрузки в случае пластического и запредельного деформирования.

### **Заключение**

1. Построено решение задачи о потере устойчивости целика цилиндрической формы при упругопластическом деформировании и в случае запредельного деформирования с применением критерия Лейбензона – Ишлинского. При этом используется гипотеза о продолжающемся нагружении в момент потери устойчивости (гипотеза Шенли).

2. Показано, что приемлемые значения критической нагрузки получаются на стадии запредельного деформирования целиков, когда сопротивление среды падает с ростом деформации. Указаны относительные размеры целиков в зависимости от модуля спада и сжимаемой нагрузки, когда произойдет их потеря устойчивости в виде образования «бочки».

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Феофанов Г. Л., Бянкин В. Г., Шванкин М. В., Бондарев А. В.* Геомеханическое обоснование устойчивости подготовительных выработок при совместном влиянии очистных работ и природного поля напряжений // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2018. – № 548. – С. 103–112. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-11-48-103-112.

2. *Зубков А. В., Сентябов С. В.* Новые подходы к оценке устойчивости скальных массивов горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2020. – № 3-1. – С. 68–77. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-31-0-68-77.

3. *Лебедев М. О.* Обоснование выбора метода расчета напряженно-деформированного состояния крепей и обделок транспортных тоннелей // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2020. – № 1. – С. 47–60. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-1-0-47-60.

4. *Лейбензон Л. С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собрание трудов. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 115 с.

5. *Ишлинский А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Украинский математический журнал. – 1954. – Т. 4. – № 2. – С. 140–146.

6. *Алимжанов М. Т.* Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1982. – 270 с.

7. *Ершов Л. В.* Об устойчивости упруго-пластического равновесия в задачах горного давления: автореф. дис. ... докт. техн. наук. – М.: МИРГЭМ, 1964. – 15 с.

8. Жуков А. М. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении // Инженерный журнал. — 1949. — Т. 5. — № 2. — С. 34–51.

9. Чанышев А. И., Белоусова О. Е., Игонина Е. А. Применение критерия Лейбензона-Ишлинского к определению потери устойчивости ленточных целиков // Современные проблемы механики сплошных сред. — 2011. — № 13. — С. 229–240.

10. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1969. — № 5. — С. 138–148.

11. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1974. — № 2. — С. 148–174.

12. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Терауд В. В., Басалов Ю. Г., Агабабян В. С. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. — 2020. — Т. 24. — № 2. — С. 275–318. DOI: 10.14498/vsgtu1765.

13. Bukowska M. Post-peak failure modulus in problems of mining geo-mechanics // Journal of Mining Science. 2013. Vol. 49. No 5. Pp. 731–740. DOI: 10.1134/S1062739149050067.

14. Kerbati N. R., Gadri L., Hadji R., Hamad A., Boukelloul M. L. Graphical and numerical methods for stability analysis in surrounding rock of underground excavations, example of Boukhadra Iron Mine NE Algeria // Geotechnical and Geological Engineering. 2020. Vol. 38. No 3. Pp. 2725–2733. DOI: 10.1007/s10706-019-01181-9.

15. Saeidi A., Heidarzadeh S., Lalancette S., Rouleau A. The effects of in situ stress uncertainties on the assessment of open stope stability: Case study at the Niobec Mine, Quebec (Canada) // Geomechanics for Energy and the Environment. 2021. Vol. 25. Article 100194. DOI: 10.1016/j.gete.2020.100194.

16. Sun B., Hou S., Xie J., Zeng S. Failure Prediction of two types of rocks based on acoustic emission characteristics // Advances in Civil Engineering. 2019. Vol. 2019. Article 5028489. DOI: 10.1155/2019/5028489.

17. Liu J.-P., Xu S.-D., Li Y.-H., Lei G. Analysis of rock mass stability based on mining-induced seismicity: a case study at the Hongtoushan Copper Mine in China // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2019. Vol. 52. No 1. Pp. 265–276. DOI: 10.1007/s00603-018-1541-y.

18. Wang F., Kaunda R. Assessment of rockburst hazard by quantifying the consequence with plastic strain work and released energy in numerical models // International Journal of Mining Science and Technology. 2019. Vol. 29. No 1. Pp. 93–97. DOI: 10.1016/j.ijmst.2018.11.023.

19. Шенли Ф. Теория неупругой колонны / Механика. — 1951. — № 2. — С. 88–98.


20. Чанышев А. И. О потере устойчивости крепей цилиндрической формы капитальных горных выработок // ФТПРПИ. — 1978. — № 3. — С. 12–19.

21. Новожилов В. В. О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикладная математика и механика. — 1963. — Т. 27. — № 5. — С. 794–812.

22. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.

23. Ильющин А. А. Пластичность основы общей математической теории. 2-е изд. — М., 2015. — 270 с.

24. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1963. — 1100 с.

25. Чанышев А. И. Определение оптимальных форм целиков горных выработок с применением критерия устойчивости Лейбензона-Ишлинского // ФТПРПИ. — 2020. — № 5. — С. 41–48. DOI: 10.15372/FTPRPI20200505. 

## REFERENCES

1. Feofanov G. L., Byankin V. G., Shvankin M. V., Bondarev A. V. Geomechanical rationale for the sustainability of preparatory developments under the joint impact of purification works and the natural stress field. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2018, no S48, pp. 103–112. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-11-48-103-112.
2. Zubkov A. V., Sentyabov S. V. New approaches to the assessment of stability of rock arrays. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020, no 3-1, pp. 68–77. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-31-0-68-77.
3. Lebedev M. O. Validation of choice of stress–strain analysis method for support and lining in traffic tunnels. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020, no 1, pp. 47–60. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-1-0-47-60.
4. Leybenzon L. S. *O primeneniі garmonicheskikh funktsiy k voprosu ob ustoychivosti sfericheskoy i tsilindricheskoy obolochek*. *Sobranie trudov*. T. 1 [Application of harmonic functions to the problem of stability of spherical and cylindrical shells. Selected Works, Vol. 1], Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1951, 115 p.
5. Ishlinsky A. Yu. Analysis of problems of equilibrium of elastic solids from the point of view of the theory of elasticity. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*. 1954, vol. 4, no 2, pp. 140–146. [In Russ].
6. Alimzhanov M. T. *Ustoychivost' ravnovesiya tel i zadachi mekhaniki gornyykh porod* [Equilibrium stability issues in the problems of mechanics of rocks], Alma-Ata, Nauka, 1982, 270 p.
7. Ershov L. V. *Ob ustoychivosti uprugo-plasticheskogo ravnovesiya v zadachakh gornogo davleniya* [About stability of elastic-plastic equilibrium in the problems of rock pressure], Doctor's thesis, Moscow, MIRGEM, 1964, 15 p.
8. Zhukov A. M. On the question of necking occurrence in a specimen under tension. *Inzhenernyy zhurnal*. 1949, vol. 5, no 2, pp. 34–51. [In Russ].
9. Chanyshv A. I., Belousova O. E., Igonina E. A. Application of the Leibenson – Ishlinsky criterion in determining the loss of stability of tape pillars. *Sovremennyye problemy mekhaniki splotnykh sred*. 2011, no 13, pp. 229–240. [In Russ].
10. Khristianovich S. A., Shemyakin E. I. Plane deformation of plastic material under complex loading. *Mechanics of Solids*. 1969, no 5, pp. 138–148. [In Russ].
11. Khristianovich S. A. Deformation of a hardening plastic material. *Mechanics of Solids*. 1974, no 2, pp. 148–174. [In Russ].
12. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Teraud W. V., Basalov Y. G., Agababyan, V. S. Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (review). *Vestnik Samar'skogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2020, vol. 24, no 2, pp. 275–318. [In Russ]. DOI: 10.14498/vsgtu1765.
13. Bukowska M. Post-peak failure modulus in problems of mining geo-mechanics. *Journal of Mining Science*. 2013. Vol. 49. No 5. Pp. 731–740. DOI: 10.1134/S1062739149050067.
14. Kerbati N. R., Gadri L., Hadji R., Hamad A., Boukelloul M. L. Graphical and numerical methods for stability analysis in surrounding rock of underground excavations, example of Boukhadra Iron Mine NE Algeria. *Geotechnical and Geological Engineering*. 2020. Vol. 38. No 3. Pp. 2725–2733. DOI: 10.1007/s10706-019-01181-9.
15. Saeidi A., Heidarzadeh S., Lalancette S., Rouleau A. The effects of in situ stress uncertainties on the assessment of open stope stability: Case study at the Niobec Mine, Quebec (Canada). *Geomechanics for Energy and the Environment*. 2021. Vol. 25. Article 100194. DOI: 10.1016/j.gete.2020.100194.
16. Sun B., Hou S., Xie J., Zeng S. Failure Prediction of two types of rocks based on acoustic emission characteristics. *Advances in Civil Engineering*. 2019. 2019. Article 5028489. DOI: 10.1155/2019/5028489.

17. Liu J.-P., Xu S.-D., Li Y.-H., Lei G. Analysis of rock mass stability based on mining-induced seismicity: a case study at the Hongtoushan Copper Mine in China. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2019. Vol. 52. No 1. Pp. 265 – 276. DOI: 10.1007/s00603-018-1541-y.
18. Wang F., Kaunda R. Assessment of rockburst hazard by quantifying the consequence with plastic strain work and released energy in numerical models. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2019. Vol. 29. No 1. Pp. 93 – 97. DOI: 10.1016/j.ijmst.2018.11.023.
19. Shanley F.R. Inelastic column theory. *Mechanics*. 1951, no 2, pp. 88 – 98.
20. Chanyshev A.I. Stability loss of cylindrical supports of permanent mining workings. *Fiziko-tekhnicheskiye problemy razrabotki poleznykh iskopayemykh*. 1978, no 3, pp. 12 – 19. [In Russ].
21. Novozhilov V.V. Forms of Connection between Stresses and Strains in the Initially Isotropic Inelastic Bodies (Geometrical Issue). *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1963, vol. 27, no 5, pp. 794 – 812. [In Russ].
22. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids], Moscow, Nauka, 1988, 712 p.
23. Il'yushin A.A. *Plastichnost' osnovy obshchey matematicheskoy teorii*. 2-e izd [Foundations of the general mathematical theory, 2nd edition], Moscow, 2015, 270 p.
24. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Table of integrals, series, and products], Moscow, 1963, 1100 p.
25. Chanyshev A. I. Optimization of pillar shape using the Leibenson-Ishlinsky stability criterion. *Journal of Mining Science*. 2020, no 5, pp. 41 – 48. [In Russ]. DOI: 10.15372/FTPR-PI20200505.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Чанышев Анвар Исмагилович<sup>1</sup> – д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Новосибирский государственный университет экономики и управления, Абдулин Ильгизар Маратович<sup>1</sup> – научный сотрудник, Белоусова Ольга Евгеньевна<sup>1</sup> – канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник,

<sup>1</sup> Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН.

**Для контактов:** Чанышев А.И., e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

A.I. Chanyshev<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Phys. Mathem.), Professor, Chief Researcher, Novosibirsk State University of Economics and Management, 630099, Novosibirsk, Russia, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,

I.M. Abdulin<sup>1</sup>, Researcher, O.E. Belousova<sup>1</sup>, Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor, Senior Researcher,

<sup>1</sup> Chinakal Institute of Mining Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 630091, Novosibirsk, Russia.

**Corresponding author:** A.I. Chanyshev, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com.

Получена редакцией 28.10.2020; получена после рецензии 14.12.2020; принята к печати 10.02.2021.  
Received by the editors 28.10.2020; received after the review 14.12.2020; accepted for printing 10.02.2021.

