ГИАБ. Горный информационно-аналитический бюллетень /
MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin, 2021;(8):93-103
ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ / ORIGINAL PAPER

УДК 550.31, 69.04 DOI: 10.25018/0236_1493_2021_8_0_93

МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НАРУШЕННОГО ПОРОДНОГО МАССИВА С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ И НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

А.Э. Адигамов[1], А.В. Юденков[2]

[1] НИТУ «МИСиС», Москва, Россия, e-mail: arckad.adigamow@yandex.ru
[2] Смоленская государственная академия физической культуры, спорта и туризма, Смоленск, Россия

Аннотация: При проектировании горных работ актуальной задачей является оценка прочности планируемых подземных сооружений. Важную роль в таких расчетах играет математическое моделирование. Разработана математическая модель для расчета напряженно-деформированного состояния нарушенного породного массива, которая учитывает анизотропные свойства среды. Модель работает в случае, когда в породе имеются сравнительно небольшие неоднородности и внутренние напряжения. Для построения работы использовалась стохастическая теория потенциала и математическая теория упругости. Построен комплексный стохастический потенциал напряженно-деформированного состояния анизотропной среды. С его помощью поставлены краевые задачи для определения неизвестных напряжений и деформаций. Разработан алгоритм их решения. Отличием указанных краевых задач от используемых краевых задач классической теории упругости является то, что детерминированные краевые условия заменяются на стохастические. Это позволяет расширить область применения модели на породы, которые не являются абсолютно однородными. Предложенная форма стохастического комплексного потенциала позволяет учитывать внутренние напряжения породы. Расширяются возможности применения численных методов. Для иллюстрации работы алгоритма приведено решение основной задачи теории упругости для анизотропной среды, ослабленной отверстием, близким к эллиптическому.

Ключевые слова: теория упругости, разрушение горных пород, краевая задача, комплексный потенциал, анизотропное тело, напряженно-деформированное состояние, нарушенный породный массив.

Для цитирования: *Адигамов А. Э., Юденков А. В.* Модель напряженно-деформированного состояния нарушенного породного массива с учетом анизотропии и неоднородностей // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – № 8. – С. 93–103. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_8_0_93.

Stress–strain behavior model of disturbed rock mass with regard to anisotropy and discontinuities

A.E. Adigamov[1], A.V. Yudenkov[2]

[1] National University of Science and Technology «MISiS», Moscow, Russia, e-mail: arckad.adigamow@yandex.ru
[2] Smolensk State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism, Smolensk, Russia

© А.Э. Адигамов, А.В. Юденков. 2021.

Abstract: Strength estimation of underground structures is an important problem in mine planning. Such computation involves mathematical modeling. This article proposes the mathematical model of the stress–strain behavior of disturbed rock mass with regard to its anisotropic properties. The model is also effective in rock mass with comparatively small discontinuities and internal stresses. The modeling uses the stochastic theory of potential and the mathematical theory of elasticity. An integrated stochastic potential of the stress–strain behavior of the anisotropic medium is constructed and used to formulate the boundary problems to find stresses and strains. The algorithm of the problem solution is developed. Unlike the boundary problems in classical elasticity, the determinate boundary conditions in the newly formulated problems are replaced by the stochastic conditions. As a result, it is possible to extend the model application range to rocks which are not absolutely uniform. Furthermore, the proposed integrated stochastic potential allows including the internal stresses of rocks in the solution. The capabilities of numerical methods grow. Efficiency of the algorithm is illustrated by solving the basic problem of elasticity for an anisotropic medium with a weakening in the form of an elliptical hole.

Key words: theory of elasticity, rock failure, boundary problem, integrated potential, anisotropic body, stress–strain behavior, disturbed rock mass.

For citation: Adigamov A. E., Yudenkov A. V. Stress–strain behavior model of disturbed rock mass with regard to anisotropy and discontinuities. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2021;(8):93-103. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_8_0_93.

Введение

В результате извлечения полезных ископаемых в недрах образуются значительные по объему пустоты и происходит образование различных нарушений, которые приводят к значительному ослаблению породного массива в зоне ведения горных работ. Степень воздействия горного производства и классификация нарушений приведена в работе [1]. Применение технологии с закладкой выработанного пространства значительно уменьшает количество образующихся пустот [2], но не приводит к их полной ликвидации. Образовавшиеся пустоты и ослабленный породный массив приводят к изменению напряженно-деформационного состояния массива горных пород, что существенно влияет на прочность подземных сооружений и безопасность ведения горных работ [3, 4]. В этой связи одной из важнейших задач при проектировании подземных горных работ является оценка прочности и безопасности подземных сооружений. Для этого эффективно применяются методы математического [5 — 8] или компьютерного [9] моделирования. Достаточно часто при этом возникают задачи по определению напряженно-деформированного состояния неоднородного массива [10] или однородной упругой среды, ослабленной различными пустотами и нарушениями, образующимися в ходе проведения горных работ и извлечения полезного ископаемого [11, 12]. В работах Г.В. Колосова и Н.И. Мусхелишвили [13] было показано, что в случае упругой деформации изотропного тела основные задачи теории упругости сводятся к краевым задачам для аналитических компонент бигармонической функции. К настоящему времени теория классических краевых задач для бианалитических функций достаточно развита [14 — 16]. Разработаны методы

применения краевых задач для бианалитических функций для решения задач изотропной теории упругости.

В то же время, горные породы лишь приближенно можно считать изотропными. Для более точного описания напряженного состояния, особенно при предельных нагрузках, приводящих к образованию трещин, необходимо учитывать анизотропные свойства породы [11, 17]. Наиболее полный разбор основных классических задач анизотропной теории упругости и их приложений к решению практических задач дан в работе [18].

В основе исследований упругих свойств анизотропных сред лежит использование функции комплексного потенциала. В отличие от изотропного случая, анизотропный комплексный потенциал и краевые условия для его определения имеют достаточно сложную структуру [19, 20], что существенно осложняет решение основных задач.

Помимо использования классического комплексного потенциала, для решения задач теории упругости можно эффективно использовать стохастический потенциал [21—23]. Использование стохастического комплексного потенциала позволяет существенно ослабить требования к граничным условиям. Это приводит к тому, что задачи теории упругости становятся применимы к средам, которые только приближенно является однородными.

Целью работы является разработка математической модели для исследования напряженно-деформированного состояния упругого тела с учетом анизотропии и небольшой неоднородности. Необходимо принять во внимание, что предлагаемая модель остается приемлемой в том случае, если в исследуемом породном массиве присутствуют внутренние напряжения.

Для достижения цели работы строится общий вид комплексного стохастического анизотропного потенциала, даются постановки основных задачи теории упругости, приводится алгоритм их решения.

Методы исследования

Детерминированная модель

Исследование классических задач теории упругости с помощью комплексного потенциала основано на свойствах сингулярного интеграла Коши.

Определение 1. Сингулярным интегралом типа Коши называется интеграл вида:

$$\Phi(Z)=\frac{1}{2\pi I}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau. \qquad (1)$$

Функция $\varphi(\tau)$ называется плотностью, $1/(\tau-z)$ — ядром интеграла типа Коши; L — контур, ограничивающий область, занятую телом.

Заметим, что плотность не обязательно должна быть граничным значением аналитической функции. Достаточно потребовать гладкости функции (условие Гельдера).

Эффективность применения интеграла типа Коши связано с тем, что он позволяет обходить сингулярности, возникающие на границе образца. Данное свойство отражено в следующей теореме.

Теорема 1 (Сохоцкого-Племеля). Интеграл типа Коши имеет предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ при стремлении к точке t изнутри и извне соответственно, которые выражаются следующим образом:

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\varphi(t)+\frac{1}{2\pi I}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau. \qquad (2)$$

В случае, когда тело обладает анизотропией общего вида, неизвестные компоненты напряжений и смещений выражаются через функцию F, называемую комплексным потенциалом, который, как показано в работе [18], имеет вид:

$$F=F_1(z_1)+F_2(z_2)+F_3(z_3). \qquad (3)$$

Комплексный потенциал (3) удовлетворяет уравнению

$$D_1 \ldots D_6 ReF = 0 . \qquad (4)$$

Здесь $D_k = \frac{\partial}{\partial x} - \mu_k \frac{\partial}{\partial y}$, μ_k — комплексные постоянные (решения характеристического уравнения).

Для удобства работают не с самими функциями $F_k(z_k)$, а с их производными $\Phi_k(z_k)$.

Приведем теперь математическую модель первой основной задачи теории упругости тел, обладающих анизотропией общего вида.

Определить функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2, 3$) по краевым условиям.

$$\begin{gathered} 2\mathrm{Re}\left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3\right) = f_1(s), \\ 2\mathrm{Re}\left(\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2 + \mu_3\Phi_3\right) = f_2(s), \\ 2\mathrm{Re}\left(\upsilon_1\Phi_1 + \upsilon_2\Phi_2 + \Phi_3\right) = f_3(s). \end{gathered} \qquad (5)$$

Здесь f_k — заданные на контуре L функции, определяемые внешними нагрузками и формой контура. Обычно полагается, что функции f_k принадлежат классу Гельдера.

Построение стохастической модели

Расширим требования к граничным условиям. Положим, что нагрузки и форма контура являются случайными функциями. Ввиду невозможности выразить решение задачи (5) через компоненты функции (3) необходимо в данном случае перейти к стохастическому комплексному потенциалу.

Краевые условия для случайных процессов будем формулировать, используя понятие первого момента выхода.

Определение 2 [17, с. 145]. τ_D называется первым моментом выхода случайного процесса Ито $Z(t)$ из D, если

$$\tau_D = \inf\left\{t > 0, Z(t) \not\subset D\right\}.$$

Переход от аналитической функции к случайной аналитической функции проведем, используя характеристический оператор диффузного процесса.

Определение 3. Пусть $\{Z(t)\}$ — диффузионный процесс Ито. Характеристический оператор A процесса $\{Z(t)\}$ определяется формулой

$$Af(z) = \lim_{U \to z} \frac{M\left\{f(Z(\tau_U)\right\} - f(z)}{M(\tau_U)}. \qquad (6)$$

Здесь через U обозначаются множества U_k, стягивающиеся к точке z.

Определение 4. Функция $F(z)$ называется случайной аналитической функцией, если $AF = 0$.

Стохастическим аналогом формул Сохоцкого-Племеля является формула Дынкина.

Теорема 2 (Формула Дынкина). Пусть f — непрерывная в среднем квадратическом функция, и пусть τ — момент остановки, причем $M\left(f\left(Z_{\tau_D}\right)\right) < \infty$. Тогда

$$M\left(f\left(Z_{\tau_D}\right)\right) = f(z) + M\left\{\int_0^{\tau} Af\left(Z_s\right)ds\right\}. \qquad (7)$$

Введем понятие стохастического комплексного потенциала.

Пусть w — открытая область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Области w_k ($k = 1, 2, 3$) соответствуют области на плоскостях $z_k = x_k + iy_k$.

Определение 5. Функция Ψ называется стохастическим комплексным потенциалом, если

$$\begin{gathered} M(\Psi) = \\ = M\left(\Psi_1(Z_{\tau_w 1}) + \Psi_2(Z_{\tau_w 2}) + \Psi_3(Z_{\tau_w 3})\right) \end{gathered} \qquad (8)$$

для всех $z_k \in D_k$ всех открытых ограниченных множеств w_{km}, замыкание которых принадлежит D_k. Здесь Ψ_k — случайная аналитическая функция в соответствующей области.

Сам стохастический потенциал в общем случае аналитической функцией не является.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть Ψ — стохастический комплексный потенциал, заданный в области D, тогда

$$A_1 A_2 A_3 \operatorname{Re}\Psi = 0 . \qquad (9)$$

Здесь A_k — характеристический оператор, действующий в области D_k.

Доказательство. Из определения характеристического оператора (4) следует

$$A_3 \operatorname{Re}\Psi = \operatorname{Re}\frac{1+\mu_1^2}{1+\mu_3^2}\left(\Psi_1^{(2)}(z_1)+\Psi_2^{(2)}(z_2)\right),$$

$$A_2 A_3 \operatorname{Re}\Psi = \operatorname{Re}\frac{\left(1+\mu_1^2\right)^2}{\left(1+\mu_3^2\right)\left(1+\mu_2^2\right)}\left(\Psi_1^{(4)}(z_1)\right)$$

$$A_1 A_2 A_3 \operatorname{Re}\Psi = 0 .$$

что требовалось доказать.

Докажем обратное утверждение.

Теорема 4. Если для функции $\Psi \in C^{(6)}$ выполняется условие (9), то сама функция имеет вид (8).

Доказательство. Для доказательства предложения последовательно воспользуемся формулой Дынкина (6).

$$A_2 A_3 \operatorname{Re}\Psi = M\left(\operatorname{Re}\Psi_1(Z_{\tau 1})\right) -$$

$$- \lim_{w \to z_{l1}} \int_0^{\tau_D} A_1 A_2 A_3 \operatorname{Re}\Psi ds = M\left(\operatorname{Re}\Psi_1(Z_{\tau 1})\right),$$

$$A_3 \operatorname{Re}\Psi - M\left(\operatorname{Re}\Psi_1(Z_{\tau 1})\right) =$$

$$= M\left(\operatorname{Re}\Psi_2(Z_{\tau 2})\right) -$$

$$- \lim_{w \to z_{l2}} \int_0^{\tau_D} (A_2 A_3 \operatorname{Re}\Psi ds - M\left(\operatorname{Re}\Psi_1\right)) ds = ,$$

$$= M\left(\operatorname{Re}\Psi_2(Z_{\tau 2})\right)$$

$$M(\Psi) =$$

$$= M\left(\Psi_1(Z_{\tau_D 1}) + \Psi_2(Z_{\tau_D 2}) + \Psi_3(Z_{D3})\right).$$

Заметим, что функция Ψ восстанавливается по действительной части с точностью до постоянного слагаемого.

Таким образом, стохастический комплексный потенциал можно записать в виде

$$\Psi = \Psi_1(Z_1) + \Psi_2(Z_2) + \Psi_3(Z_3) . \qquad (10)$$

Сформулируем математическую модель первой основной задачи теории упругости для анизотропного тела в стохастической постановке.

Определить случайный вектор

$$\left\{\Psi_1(Z_1), \Psi_2(Z_2), \Psi_3(Z_3)\right\}$$

по краевому условию

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re}[\Psi_1(\mathrm{T}_{1\tau D}) + \Psi_2(\mathrm{T}_{2\tau D}) + \Psi_3(\mathrm{T}_{3\tau D})] = \\
= f_1(\mathrm{T}_{\tau D}), \\
\operatorname{Re}\left[\mu_1 \Psi_1(\mathrm{T}_{1\tau D}) + \mu_2 \Psi_2(\mathrm{T}_{2\tau D}) + \right. \\
\left. + \mu_3 \Psi_3(\mathrm{T}_{3\tau D})\right] = f_2(\mathrm{T}_{\tau D}), \qquad (11) \\
\operatorname{Re}\left[\nu_1 \Psi_1(\mathrm{T}_{1\tau D}) + \nu_2 \Psi_2(\mathrm{T}_{2\tau D}) + \right. \\
\left. + \Psi_3(\mathrm{T}_{3\tau D})\right] = f_3(\mathrm{T}_{\tau D}).
\end{gathered}$$

Здесь $f_k(\mathrm{T}_{\tau D})$ — заданные на контуре случайные функции, непрерывные в среднем квадратическом; $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, $\{\nu_1, \nu_2\}$ — комплексные постоянные, условия (11) выполняются почти наверное.

Алгоритм решения первой основной задачи

Функции $\Psi_1(Z_1)$, $\Psi_2(Z_2)$, $\Psi_3(Z_3)$ можно рассматривать и как случайные аналитические функции обычных комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$, где

$$x_k = x + a_k y, \;\; y_k = \beta_k y, \; (k = 1, 2, 3).$$

При этом указанные функции будут определены в областях D_1, D_2, D_3 соответственно, полученных из области поперечного сечения D путем аффинного преобразования. Точке A контура L области D, определяемой дугой s, должны аффинно соответствовать точки A_1, A_2, A_3 на контурах L_1, L_2, L_3 областей D_1, D_2, D_3.

Пусть функции $\omega_0(\zeta)$, $\omega_1(\zeta)$, $\omega_2(\zeta)$ и $\omega_3(\zeta)$ конформно отображают области D_1, D_2, D_3 соответственно на внутренность единичного круга γ. Обозначим

обратные функции через $\omega_k^{-1}(z_k)$ (k = 0, 1, 2, 3). При отображении границ L, L_1, L_2, L_3 точки A, A_1, A_2, A_3, находящиеся в аффинном соответствии, перейдут в точки σ, σ_1, σ_2, σ_3 единичной окружности Γ. Возникает так называемый сдвиг.

Выразим σ_1, σ_2, σ_3 через переменную σ:

$$\sigma_1 = \omega_1^{-1}(t_1) = \omega_1^{-1}\left(\lambda_1\left(\omega_0(\sigma)\right)\right) = \alpha_1(\sigma),$$
$$\sigma_2 = \omega_2^{-1}(t_2) = \omega_2^{-1}\left(\lambda_2\left(\omega_0(\sigma)\right)\right) = \alpha_2(\sigma),$$
$$\sigma_3 = \omega_3^{-1}(t_1) = \omega_3^{-1}\left(\lambda_3\left(\omega_0(\sigma)\right)\right) = \alpha_3(\sigma). \quad (12)$$

Функции α_k называют функциями сдвига.

Перепишем краевые условия (12) в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\Big[\psi_1\left(\alpha_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \psi_2\left(\alpha_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \\
&\quad + \psi_3\left(\alpha_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] = g_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right), \\
&\mathrm{Re}\Big[\mu_1\psi_1\left(\alpha_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \mu_2\psi_2\left(\alpha_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \\
&\quad + \mu_3\psi_3\left(\alpha_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] = g_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right), \quad (13) \\
&\mathrm{Re}\Big[\nu_1\psi_1\left(\alpha_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \nu_2\psi_2\left(\alpha_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \\
&\quad + \psi_3\left(\alpha_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] = g_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Здесь $\psi_k\left(\alpha_k\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) = \Psi_k\left(\mathrm{T}_{k\tau D}\right)$.

Для решения системы (13) применим комбинированный метод, основанный как на использовании теории стохастического потенциала, так и на теории детерминированных краевых задач. Перепишем краевые условия (13) в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\Big[\psi_1\left(\alpha_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] = Q_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right), \\
&\mathrm{Re}\Big[\mu_2\psi_2\left(\alpha_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] = Q_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right), \quad (14) \\
&\mathrm{Re}\Big[\psi_3\left(\alpha_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] = Q_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -\mathrm{Re}\Big[\psi_2\left(\alpha_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \\
&\quad + \psi_3\left(\alpha_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] + g_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right), \\
Q_2 &= -\mathrm{Re}\Big[\mu_1\psi_1\left(\alpha_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \\
&\quad + \mu_3\psi_3\left(\alpha_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] + g_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right), \\
Q_3 &= -\mathrm{Re}\Big[\nu_1\psi_1\left(\alpha_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right) + \\
&\quad + \nu_2\psi_2\left(\alpha_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right)\Big] + g_3\left(\sigma_{\tau\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Краевые условия (14) представляют собой стохастические задачи Дирихле для Z-аналитических (X-гармонических) функций.

Считая временно функции Q_k (k = 1, 2, 3) известными, решим задачи (14). Получим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\Big[\psi_1(\xi)\Big] = M(Q_1(\beta_1\left(\Xi_{\tau\gamma}\right), \\
&\mathrm{Re}\Big[\psi_2(\xi)\Big] = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mu_2} M(Q_2(\beta_2\left(\Xi_{\tau\gamma}\right), . \quad (15) \\
&\mathrm{Re}\Big[\psi_3(\xi)\Big] = M(Q_3(3\left(\Xi_{\tau\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\alpha_k\left(\beta_k(\xi)\right) = \xi.$$

Краевые условия (15) являются детерминированными.

Перейдем в первом уравнении (15) к граничным значениям.

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\psi_k\left(\alpha_k(\sigma)\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi I}\int_\gamma \frac{\psi_k\left(\alpha_k(\sigma_0)\right)\alpha_k'}{\alpha_k(\sigma_0) - \alpha_k(\sigma)} d\sigma_0, \\
&\frac{1}{2}\overline{\psi_k\left(\alpha_k(\sigma)\right)} = \\
&= -\frac{1}{2\pi I}\int_\gamma \frac{\overline{\psi_k\left(\alpha_k(\sigma_0)\right)\alpha_k'}}{\alpha_k(\sigma_0) - \alpha_k(\sigma)} d\sigma_0.
\end{aligned} \quad (16)$$

получим

$$\psi_1(\alpha_1(\sigma)) = -\psi_2(\alpha_2(\sigma)) - \lambda_3\psi_3(\alpha_3(\sigma)) +$$

$$+\int_\gamma A_2(\sigma,\sigma_0)\overline{\psi}_2(\alpha_2(\sigma_0))d\sigma_0 +$$

$$+\int_\gamma A_2(\sigma,\sigma_0)\overline{\overline{\psi}_2(\alpha_2(\sigma_0))}d\sigma_0 +$$

$$+\int_\gamma A_3(\sigma,\sigma_0)\overline{\psi}_3(\alpha_3(\sigma_0))d\sigma_0 +$$

$$+\int_\gamma B_3(\sigma,\sigma_0)\overline{\overline{\psi}_3(\alpha_3(\sigma_0))}d\sigma_0 +$$

$$+\frac{1}{2}g_1(\sigma) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{M(g_1(\sigma_0))\alpha_k'}{\alpha_k(\sigma_0)-\alpha_k(\sigma)}d\sigma_0. \quad (17)$$

Здесь функции $A_2(\sigma, \sigma_0)$, $A_3(\sigma, \sigma_0)$, $B_3(\sigma, \sigma_0)$, являются ядрами Фредгольма.

Аналогично продолжим работу со вторым и третьим условием (15).

Получим

$$\psi_2(\xi) = \frac{1}{2\pi I}\int_\gamma \frac{Q_2(\beta_2(\sigma_0))}{\sigma_0-\xi}d\sigma_0 + \quad (18)$$

$$+\int_\gamma R_2(\sigma_0,\sigma)Q_2(\beta_2(\sigma_0))d\sigma_0.$$

Через $Q_2(\sigma)$ обозначены заданные функции, зависящие от $M(g_1)$, $M(g_2)$, $\alpha_k(\sigma)$ (k = 1, 2).

$$\Delta_3\psi_3(\alpha_3(\sigma)) + \overline{\Delta_3\psi_3(\alpha_3(\sigma))} +$$

$$+\int_\gamma A_{33}(\sigma,\sigma_0)\overline{\psi}_3(\alpha_3(\sigma_0))d\sigma_0 + \quad ,(19)$$

$$+\int_\gamma B_{33}(\sigma,\sigma_0)\overline{\overline{\psi}_3(\alpha_3(\sigma_0))}d\sigma_0 = Q_3(\sigma)$$

где $A_{33}(\sigma, \sigma_0)$, $B_{33}(\sigma, \sigma_0)$ — известные ядра Фредгольма; $Q_3(\sigma)$ — заданная функция.

Решая задачу (19), определим функцию $\psi_3(\zeta)$. Подставим полученное выражение в уравнение (18), найдем функцию $\psi_2(\zeta)$. Подставляя краевые значения функций $\psi_2(\zeta)$ и $\psi_3(\zeta)$ в краевое условие (17), найдем функцию $\psi_1(\zeta)$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 5. Решение краевой задачи для стохастического комплексного потенциала сводится к решению трех стохастических задач Дирихле для Z-аналитических функций (15) и последовательного решения детерминированных задач Гильберта с интегральными ядрами (19) и (17).

Пример. В качестве примера рассмотрим случай бесконечной анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием, свободным от внешних усилий с учетом исследований [11].

Пусть напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение усилиями p, составляющими угол α с осью OX.

Запишем приведенные краевые условия

$$f_1^0 = -\mathrm{Re}\{B_1 z_1 + (B_2 + iC_2)z_2,$$

$$f_2^0 = -\mathrm{Re}\{B_1\mu_1 z_1 + \mu_2(B_2 + iC_2),$$

где B_1, B_2, C_2 — постоянные.

Функция, отображающая внутренность единичной окружности на внешность эллипса, имеет вид

$$z = \omega(\xi) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\xi} + \xi m\right)$$

$$\left(R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b}\right).$$

Особенность рассматриваемой области (бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием) состоит в том, что при конформном отображении точки z_1, z_2 и z (здесь z принадлежит границе области) переходят в одну точку единичной окружности на плоскости ξ.

С учетом того, что

$$z_1 = \frac{a+i\mu_1 b}{2}\xi + \frac{a-i\mu_1 b}{2}\frac{1}{\xi},$$

$$z_2 = \frac{a+i\mu_2 b}{2}\xi + \frac{a-i\mu_2 b}{2}\frac{1}{\xi}$$

преобразуем приведенные условия к следующему виду:

$$f_1^0 = -2\mathrm{Re}\left[k_1\sigma + k_2\frac{1}{\sigma}\right],$$

$$f_2^0 = -2\mathrm{Re}\left[k_3\sigma + k_4\frac{1}{\sigma}\right],$$

где k_n (n = 1, ... , 4) — определенные константы.

Граничные условия (13) примут вид.

$$\mathrm{Re}\left[\psi_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right) + \psi_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right] = f_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right),$$

$$\mathrm{Re}\left[\mu_1\psi_1\left(\sigma_{\tau\gamma}\right) + \mu_2\psi_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right)\right] = f_2\left(\sigma_{\tau\gamma}\right). \quad (20)$$

Краевые условия (20) представляют собой две стохастических задачи Дирихле для Z-аналитических функций. Решая их, получим

$$\psi_1^0(\xi) = -\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_2\left(k_1 + \overline{k_2}\right)}{\mu_1 - \mu_2}\xi,$$

$$\psi_2^0(\xi) = -\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_1\left(k_1 + \overline{k_2}\right)}{\mu_1 - \mu_2}\xi.$$

Возвращаясь к исходным координатам, получим

$$\Phi_1^0(\xi) = -\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_2\left(k_1 + \overline{k_2}\right)}{\mu_1 - \mu_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{z_1 - \sqrt{\bar{z}_1^2 - \left(a^2 + \mu_1^2 b^2\right)}}{a + i\mu_1 b},$$

$$\Phi_2^0(\xi) = -\frac{k_3 + \overline{k_4} - \mu_2\left(k_1 + \overline{k_2}\right)}{\mu_1 - \mu_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{z_1 - \sqrt{\bar{z}_1^2 - \left(a^2 + \mu_2^2 b^2\right)}}{a + i\mu_2 b}.$$

Напряженное состояние тела определим по формулам

$$\sigma_x = p\cos^2\alpha + 2\mathrm{Re}\left\{\mu_1^2\Phi_1^0\left(z_1\right) + \mu_2^2\Phi_2^0\left(z_2\right)\right\}$$

$$\sigma_y = p\sin^2\alpha + 2\mathrm{Re}\left\{\Phi_1^0\left(z_1\right) + \Phi_2^0\left(z_2\right)\right\},$$

$$\tau_{xy} = p\sin\alpha\cos\alpha -$$

$$-2\mathrm{Re}\left\{\mu_1\Phi_1^0\left(z_1\right) + \mu_2\Phi_2^0\left(z_2\right)\right\}.$$

Выводы

В статье теоретически разработана математическая модель для расчета напряженно-деформированного состояния упругого тела. Отличие предлагаемой модели состоит в том, что она, во-первых, работает с анизотропными средами за счет введения в краевые условия функции сдвига; во-вторых, модель является стохастической, что позволяет применять ее для почти однородных тел и в условиях неполной информации об упругих характеристиках среды; в-третьих, благодаря увеличению аналитических компонент в стохастическом комплексном потенциале до трех, можно учитывать внутренние напряжения в образце. Указанные особенности позволяют рассчитывать, что построенная математическая модель будет эффективна при расчете прочности подземных сооружений и других объектов.

Дальнейшее развитие работы видится в разработке численных методов по реализации теории. Здесь можно предложить помимо традиционных подходов, таких как приближенной построение конформно отображающих функций, приближения отверстий к эллиптическому, метод статистических испытаний.

Также важным направлением дальнейших исследований может быть изучение роста трещин в анизотропной среде при переходе от упругого к пластическому состоянию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rybak J., Gorbatyuk S., Bujanovna-Syuryun K., Khairutdinov A., Tyulyaeva Y., Makarov P.* Utilization of mineral waste: a method for expanding the mineral resource base of a mining

and smelting company // Metallurgist. 2021, vol. 64, pp. 851 — 861. DOI: 10.1007/s11015-021-01065-5.

2. *Хайрутдинов М. М.*, Конгар-*Сюрюн Ч. Б.*, *Тюляева Ю. С.*, Хайрутдинов А. Бесцементные закладочные смеси на основе водорастворимых техногенных отходов // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. — 2020. — Т. 331. — № 11. — С. 30–36. DOI: 10.18799/24131830/2020/11/2883.

3. *Голик В. И.*, *Разоренов Ю. И.*, *Дмитрак Ю. В.*, *Габараев О. З.* Повышение безопасности подземной добычи руд учетом геодинамики массива // Безопасность труда в промышленности. — 2019. — № 8. — С. 36 — 42. DOI: 10.24000/0409-2961-2019-8-36-42.

4. *Хайрутдинов М. М.*, Конгар-*Сюрюн Ч. Б.*, Хайрутдинов А., *Тюляева Ю. С.* Повышение безопасности при извлечении водорастворимых руд путем оптимизации параметров закладочного массива // Безопасность труда в промышленности. — 2021. — № 1. — С. 53 — 59. DOI: 10.24000/0409-2961-2021-01-53-59.

5. *Оловянный А. Г.* Математическое моделирование процессов деформирования и разрушения в трещиноватых массивах горных пород // Записки Горного института. — 2010. — Т. 185. — С. 95 — 98.

6. *Оловянный А. Г.* Механика горных пород. Моделирование разрушений. — СПб.: ООО «Издательско-полиграфическая компания «КОСТА», 2012. — 280 с.

7. *Stead D., Eberhardt E., Coggan J.* Developments in the characterization of rock slope deformation and failure using numerical modelling techniques // Engineering Geology. 2006, vol. 83, no. 1 — 3, pp. 217 — 235. DOI: 10.1016/j.enggeo.2005.06.033.

8. *Kuzmin Yu. O.* Recent geodynamics of a fault system // Physics of the Solid Earth. 2015, vol. 51, no 4. pp. 480 — 485. DOI: 10.1134/S1069351315040059.

9. *Rybak J., Kongar-Syuryun Ch., Tyulyaeva Y., Khayrutdinov A., Akinshin I.* Geomechanical substantiation of parameters of technology for mining salt deposits with a backfill // Mining Science. 2021, vol. 28, pp. 19 — 32. DOI: 10.37190/msc212802.

10. *Хайрутдинов А. М.*, Конгар-*Сюрюн Ч. Б.*, *Kowalik T.*, *Тюляева Ю. С.* Управление напряженно-деформационным состоянием массива горных пород путем формирования разнопрочностной закладки // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2020. — № 10. — С. 42 — 55. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-10-0-42-55.

11. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наукова думка, 1968. — 881 с.

12. *Борщ-Компониец В. И.* Практическая механика горных пород. — М.: изд-во «Горная книга», 2013. — 322 с.

13. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.

14. *Kuritsyn S., Rasulov K.* On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018, vol. 39, pp. 97 — 103. DOI: 10.1134/S1995080218010183.

15. *Rasulov K. M.* On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018, vol. 39, pp. 142 — 145. DOI: 10.1134/S1995080218010237.

16. *Римская Л. П.*, *Скородулина Е. Ю.* Системы краевых задач и сингулярных интегральных уравнений в статической теории упругости // Ученые записки: Электронный научный журнал Курского государственного университета. — 2013. — № 4 (28). — С. 10 — 14.

17. *Kudo Y., Hashimoto K., Sano O., Nakagawa K.* Relation between physical anisotropy and microstructures of granitlic rock in Japan / Proceedings 6th ISRM Congress on Rock Mech, Canada, 1987.

18. *Лехницкий Г. С.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.

19. *Ивлев Д. Д.*, *Максимова Л. А.*, *Миронов Б. Г.* О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2011. — № 2. — С. 41 — 43.

20. *Володченков А. М.*, *Юденков А. В.* Стохастическая задача Гильберта для бианалитических функций на контуре общего вида // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2017. — Т. 11. — № 8. — С. 69—72.

21. *Максимова Л. А.*, *Юденков А. В.* Теория стохастического потенциала в плоской теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. — 2015. — № 4 (26). — С. 134—142.

22. *Юденков А. В.*, *Володченков А. М.* Основные задачи теории упругости тел с прямолинейной анизотропией в стохастической теории потенциала // Ученые записки: Электронный научный журнал Курского государственного университета. — 2013. — № 2(26). — С. 14—17.

23. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 2003. — 300 с. ГИАБ

REFERENCES

1. Rybak J., Gorbatyuk S., Bujanovna-Syuryun K., Khairutdinov A., Tyulyaeva Y., Makarov P. Utilization of mineral waste: a method for expanding the mineral resource base of a mining and smelting company. *Metallurgist*. 2021, vol. 64, pp. 851—861. DOI: 10.1007/s11015-021-01065-5.

2. Khayrutdinov M. M., Kongar-Syuryun Ch. B., Tyulyaeva Yu. S., Khayrutdinov A. Cementless backfill mixtures based on water-soluble manmade waste. *Bulletin of the Tomsk polytechnic university. Geo assets engineering*. 2020, vol. 331, no. 11, pp. 30–36. [In Russ]. DOI: 10.18799/24131830/2020/11/2883.

3. Golik V. I., Razorenov Yu. I., Dmitrak Yu. V., Gabaraev O. Z. Safety improvement of the underground ore extraction considering mass geodynamics. *Occupational Safety in Industry*. 2019, no. 8, pp. 36—42. [In Russ]. DOI: 10.24000/0409-2961-2019-8-36-42.

4. Khayrutdinov M. M., Kongar-Syuryun Ch. B., Khayrutdinov A., Tyulyaeva Yu. S. Improving safety when extracting water-soluble ores by optimizing the parameters of the backfill mass. *Occupational Safety in Industry*. 2021, no. 1, pp. 53—59. [In Russ]. DOI: 10.24000/0409-2961-2021-01-53-59.

5. Olovyannyy A. G. Mathematical modeling of deformation processes and failure in fractured rock mass. *Journal of Mining Institute*. 2010, vol. 185, pp. 95—98. [In Russ].

6. Olovyannyy A. G. *Mekhanika gornykh porod. Modelirovanie razrusheniy* [Rock mechanics. Destruction simulation], Saint-Petersburg, 2012, 280 p.

7. Stead D., Eberhardt E., Coggan J. Developments in the characterization of rock slope deformation and failure using numerical modelling techniques. *Engineering Geology*. 2006, vol. 83, no. 1—3, pp. 217—235. DOI: 10.1016/j.enggeo.2005.06.033.

8. Kuzmin Yu. O. Recent geodynamics of a fault system. *Physics of the Solid Earth.* 2015, vol. 51, no 4. pp. 480—485. DOI: 10.1134/S1069351315040059.

9. Rybak J., Kongar-Syuryun Ch., Tyulyaeva Y., Khayrutdinov A., Akinshin I. Geomechanical substantiation of parameters of technology for mining salt deposits with a backfill. *Mining Science*. 2021, vol. 28, pp. 19—32. DOI: 10.37190/msc212802.

10. Khayrutdinov A. M., Kongar-Syuryun Ch. B., Kowalik T., Tyulyaeva Yu. S. Stress–strain behavior control in rock mass using different-strength backfill. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020, no. 10, pp. 42—55. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-10-0-42-55.

11. Savin G. N. *Raspredelenie napryazheniy okolo otverstiy* [Distribution of stresses around holes], Kiev, Naukova dumka, 1968, 881 p.

12. Borshch-Komponiets V. I. *Prakticheskaya mekhanika gornykh porod* [Practical rock mechanics], Moscow, izd-vo «Gornaya kniga», 2013, 322 p.

13. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], Moscow, Nauka, 1966, 707 p.

14. Kuritsyn S., Rasulov K. On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018, vol. 39, pp. 97—103. DOI: 10.1134/S1995080218010183.

15. Rasulov K. M. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018, vol. 39, pp. 142—145. DOI: 10.1134/S1995080218010237.

16. Rimskaya L. P., Skorodulina E. Yu. Systems of boundary value problems and singular integral equations in the static theory of elasticity. *Uchyonye zapiski. Electronic scientific journal of the Kursk State University*. 2013, no. 4 (28), pp. 10—14. [In Russ].

17. Kudo Y., Hashimoto K., Sano O., Nakagawa K. Relation between physical anisotropy and microstructures of granitlic rock in Japan. *Proceedings 6th ISRM Congress on Rock Mech*, Canada, 1987.

18. Lekhnitskiy G. S. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body], Moscow, Nauka, 1977, 416 p.

19. Ivlev D. D., Maksimova L. A., Mironov B. G. On the relations of the theory of translational ideal-plastic anisotropy in the case of plane deformation. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2011, no. 2, pp. 41—43. [In Russ].

20. Volodchenkov A. M., Yudenkov A. V. Hilbert stochastic problem for bianalytical functions on the common contour line. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport*. 2017, vol. 11, no. 8, pp. 69—72. [In Russ].

21. Maksimova L. A., Yudenkov A. V. The theory of stochastic potential in the plane theory of elasticity. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. 2015, no. 4 (26), pp. 134—142. [In Russ].

22. Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M. Basic problems of the theory of elasticity of bodies with rectilinear anisotropy in stochastic potential theory. *Uchyonye zapiski. Electronic scientific journal of the Kursk State University*. 2013, no. 2(26), pp. 14—17. [In Russ].

23. Oksendal' B. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya* [Stochastic differential equations], Moscow, Mir, 2003, 300 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Адигамов Аркадий Энгелевич — канд. техн. наук, доцент,
НИТУ «МИСиС», e-mail: arckad.adigamow@yandex.ru,
Юденков Алексей Витальевич — д-р физ.-мат. наук,
профессор, Смоленская государственная академия
физической культуры, спорта и туризма,
e-mail: aleks-ydenkov@mail.ru.
Для контактов: Адигамов А.Э., e-mail: arckad.adigamow@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

A.E. Adigamov, Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor,
National University of Science and Technology «MISiS»,
119049, Moscow, Russia,e-mail: arckad.adigamow@yandex.ru,
A.V. Yudenkov, Dr. Sci. (Phys. Mathem.), Professor,
Smolensk State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism,
214018, Smolensk, Russia, e-mail: aleks-ydenkov@mail.ru.
Corresponding author: A.E. Adigamov, e-mail: arckad.adigamow@yandex.ru.

Получена редакцией 22.04.2021; получена после рецензии 14.06.2021; принята к печати 10.07.2021.
Received by the editors 22.04.2021; received after the review 14.06.2021; accepted for printing 10.07.2021.