

## АППРОКСИМАЦИЯ 2D-МУЛЬДЫ ОСЕДАНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ТОЧКАМ

Т.Г. Макеева<sup>1</sup>, В.А. Трофимов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем комплексного освоения недр РАН, Москва, Россия, e-mail: asas\_2001@mail.ru

**Аннотация:** Рассмотрены алгоритмы построения аналитической функции заданного вида, описывающей форму мульды оседания земной поверхности, с использованием замеренных вертикальных сдвижений на некотором множестве точек, случайным образом расположенных на поверхности. Для построения и отработки расчетных алгоритмов первоначально рассмотрена задача в одномерной постановке, когда используются фактические данные, получаемые с применением поверхностных реперных станций, которая далее обобщена на случай 2D-мульды. При этом форма мульды оседания аппроксимируется заданной функцией в виде комбинации интегралов Гаусса с тремя (либо пятью для 2D-случая) определяющими параметрами. Рассмотрена возможность применения алгоритма случайного поиска при нахождении параметров искомой функции. Для проверки принципиальной возможности использования предложенного алгоритма построена имитационная модель, описывающая возможную модельную мульду оседания, которая формируется посредством сочетания одномерных мульд, расположенных в главных сечениях моделируемой 2D-мульды. С помощью этой мульды формируется множество точек на поверхности, моделирующих возможное реальное множество, которое будет определяться в реальных условиях при наличии необходимой аппаратуры и алгоритмов измерения, разрабатываемых в настоящее время. Затем с использованием разработанного алгоритма эти точки позволяют найти параметры аппроксимирующей функции для 2D-случая и выписать соответствующее аналитическое выражение для оседаний земной поверхности. Описанный подход может быть перспективным в случае с использованием спутниковых технологий при наличии множества случайным образом разбросанных по территории естественных отражателей.

**Ключевые слова:** мульда, реперная станция, репер, случайный поиск, оседание поверхности, главные сечения мульд, плоская деформация, функционал невязки.

**Для цитирования:** Макеева Т. Г., Трофимов В. А. Аппроксимация 2D-мульды оседания земной поверхности по экспериментальным точкам // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2023. – № 3. – С. 107–123. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2023\_3\_0\_107.

### 2D subsidence trough approximation by experimental points

T.G. Makeeva<sup>1</sup>, V.A. Trofimov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Institute of Problems of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, e-mail: asas\_2001@mail.ru

---

**Abstract:** The article discusses algorithms for plotting an analytical function of a preset shape to describe a subsidence trough using the vertical displacements measured at a set of points situated on ground surface at a random fashion. For building and improving calculation algorithms, a one-dimensional problem is examined first, using actual data from base points on ground surface; then, the problem is extended and generalized to a 2D subsidence trough. The shape of the trough is approximated by the preset function in the form of a combination of the Gaussian integrals with three (or five in 2D case) constitutive parameters. The applicability of a random search algorithm in finding parameters of an unknown function is considered. For testing the proposed algorithm applicability, a simulation model is built for a possible subsidence trough formed by means of combination of 1D troughs in the main sections of the model 2D trough. With the help of this model trough, a set of points is generated on ground surface to model a possible real-life ensemble of points. The *in situ* ensemble of points will be determined using appropriate measurement instrumentation and algorithms being developed these days. Inserted in the algorithm, these points make it possible to find parameters of the approximating functions for the 2D case and to build a relevant analytical expression for ground surface subsidences. This approach can be effective using the satellite technologies and randomly spread natural reflectors in the ground area.

**Key words:** subsidence trough, base point, bench mark, random search, surface subsidence, main sections of subsidence trough, plane deformation, closure error function.

**For citation:** Makeeva T. G., Trofimov V. A. 2D subsidence trough approximation by experimental points. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2023;(3):107-123. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2023\_3\_0\_107.

---

## Введение

Подземная отработка угольных пластов, особенно неглубокого залегания, приводит к деформированию всего налегающего массива, включая земную поверхность. Оседание поверхности представляет собой процесс, развивающийся во времени и контролируемый различными факторами, включая методы добычи, глубину добычи, толщину залежи и топографию поверхности, а также свойства пород налегающего массива.

Деформация массива, приводящая к оседанию поверхности, включает горизонтальные и вертикальные смещения горных пород, распространяющиеся далеко за границы выработанного пространства [1].

Оседание поверхности является одним из основных параметров, определяющих состояние наземных объектов, расположенных над выработанным пространством и вблизи его границ. Вели-

чина этого оседания *in situ* может быть определена с использованием реперных станций, в состав которых входит одна или несколько реперных линий, состоящих из некоторого количества расположенных вдоль них реперов. Эти линии, которые во многих случаях можно считать прямыми, пересекают проекции выработанного пространства на земную поверхность и, как правило, выходят за границы этой проекции, захватывая окрестности выработок. Такие станции позволяют определять оседание земной поверхности в зависимости от развития во времени выработанного пространства, а знание функциональных закономерностей, связывающих параметры мульды и размеры выработанного пространства, позволяет сделать прогнозные оценки такого деформирования [2].

Однако основное ограничение описанного подхода прогнозирования заключается в том, что, как правило, ис-

пользование полученных в конкретных условиях данных скорее всего невозможно при прогнозировании оседаний в новых горных условиях, по крайней мере до тех пор, пока используемые методы не будут откалиброваны с учетом новых особенностей залегания пласта.

В настоящее время находят все большее применение методы описания состояния и поведения налегающего массива горных пород с использованием различных моделей механики сплошной среды, реализованных в рамках тех или иных численных алгоритмов. В частности, достаточно подробно были рассмотрены возможности использования изотропной и трансверсально-изотропной модели упругости [2–12]. Однако казалось бы достаточно простая горно-техническая ситуация не позволяет использовать простые геомеханические модели (теорию упругости, различного рода пластические теории, теорию ползучести и др.), поскольку полученные с их помощью результаты не адекватны натурным измерениям, достаточно просто получаемым *in situ*. Тем не менее использование несколько усложненных моделей, пространственно неоднородных, приводит к вполне адекватным результатам [13–16].

Таким образом, с использованием численных моделей, после их калибровки, можно получить адекватное описание состояния и поведения массива, включая дневную поверхность [17]. Альтернативой сказанному в описании деформаций земной поверхности является маркшейдерский подход, в рамках которого деформирование собственно массива не рассматривается, а дается описание смещений поверхности с использованием некоторых функций, обобщающих многочисленные наблюдательные данные [18].

Ранее такого рода закономерности были получены при выполнении условий

плоской задачи, основные соотношения для которой приведены в [19]. Было показано, что оседание поверхности может быть вполне приемлемо описано с использованием комбинации функций, содержащей интегралы вероятностей Гаусса с некоторым набором определяющих параметров, значения которых находятся экспериментальным путем:

$$\eta(x) = -\frac{\eta_0}{2} \left[ F\left(\frac{D_p + x}{C_p H}\right) + F\left(\frac{D_p - x}{C_p H}\right) \right], \quad (1)$$

где  $\eta(x)$  – оседание поверхности в произвольной точке мульды  $x$ ;  $H$  – глубина залегания пласта;  $\eta_0$ ,  $C_p$ ,  $D$  – параметры кривой;  $F(z)$  – интеграл Гаусса.

Соотношение (1) применимо только в том случае, когда начало координат ( $x = 0$ ) расположено в центре мульды, положение которого на поверхности *in situ* должно быть известно заранее. В этом случае мульда обладает симметрией относительно этой точки.

Значения параметров  $\eta_0$ ,  $C_p$ ,  $D$  могут быть получены путем обработки данных измерений реперных станций, и это, в конечном итоге, позволяет выписать аналитические соотношения для определения оседания земной поверхности и, как следствие, всех остальных параметров мульды сдвига.

При этом возникает затруднение, состоящее в том, что на местности, как правило, используется некоторая произвольная система координат, в общем случае не привязанная к образующейся мульде и в которой ноль не обязательно расположен в центре мульды. В этом случае соотношение, описывающее форму мульды, имеет вид

$$\begin{aligned} \eta(x) = \\ = -\frac{\eta_0}{2} \left[ F\left(\frac{D_p + x - \Delta x}{C_p H}\right) + F\left(\frac{D_p - x - \Delta x}{C_p H}\right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

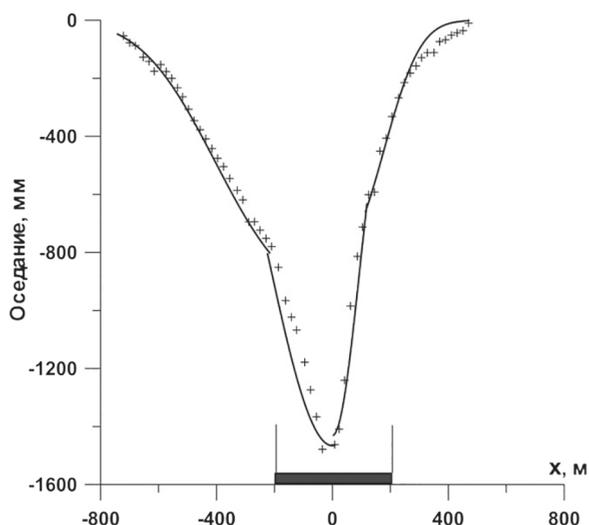


Рис. 1. Оседания реперов (точки) над обрабатываемым столбом № 2 в его центральной части  
 Fig. 1. Subsidence of benchmarks (points) above the coal pole No. 2 being worked out in its central part

где  $\Delta x$  — положение центра мульды в используемой системе координат. Эта величина также изначально неизвестна и подлежит определению наряду с  $\eta_0$ ,  $C_p$ ,  $D$ .

Для примера на рис. 1 точками показаны такого рода измерения оседаний при отработке пласта Болдыревский, АО «СУЭК-Кузбасс», а схема соответствующей реперной станции в привязке к подземным горным выработкам представлена на рис. 2 (показана лишь часть центральных реперов). Приведенные осе-

дания поверхности обусловлены отработкой только столба № 2.

Отметим особенности оседания дневной поверхности, которые хорошо видны на рисунке. В приведенном случае центр мульды был определен визуально по расположению точек, и с ним совмещено начало координат (см. рис. 1). Видно, что в рассматриваемом случае мульда несимметрична относительно своей середины, что объясняется различным состоянием массива справа и слева от обрабатываемого столба. С од-

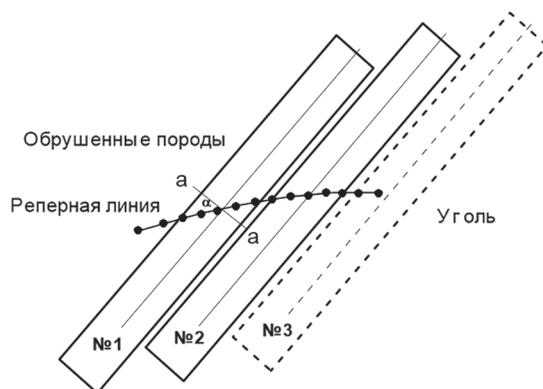


Рис. 2. Расположение центральной части реперной линии относительно обрабатываемых столбов  
 Fig. 2. Location of the central part of reference line relative to coal poles being worked out

ной стороны расположен еще не тронутый угольный пласт, а с другой — уголь из пласта уже вынут и там находятся обрушенные породы, и, следовательно, деформационные свойства массива существенно различны по обеим сторонам обрабатываемого столба № 2 (черный прямоугольник), в связи с чем массив оседает по-разному.

Более того, на каждой полумульде, справа и слева, можно отметить наличие точек излома, расположенных примерно над границей выработанного пространства. В связи с этим можно провести более детальную аппроксимацию экспериментальных точек, если разделить их на группы. Две такие группы относятся к верхним частям каждой из полумульд и две — к нижним. При этом две первые лежат вне контура выработанного пространства, а две другие — внутри. При построении соответствующих аппроксимаций функциями упомянутого выше вида для каждого из этих участков имеется свой набор определяющих параметров, что позволяет построить аналитическую функцию, достаточно точно описывающую экспериментальные данные.

### Алгоритм случайного поиска

Нахождение параметров аппроксимирующих кривых основано на итерационном алгоритме случайного поиска, суть которого состоит в случайном переборе определяющих параметров в пределах заданной области изменения и вычисления соответствующей невязки, т.е. расхождения реальных значений оседаний, замеренных *in situ* и вычисленных с использованием пробного набора параметров. В рассматриваемом случае варьируются параметры кривой (1)  $\eta_0$ ,  $C_p$ ,  $D$ . Для каждого из них задаются пределы изменения:  $\eta' < \eta_0 < \eta''$ ,  $C' < C_p < C''$ ,  $D' < D < D''$ , в рамках которых случайным образом на каждом шаге  $i$  выбираются переменные  $\eta_0^i$ ,  $C_p^i$ ,  $D^i$ . Размеры этого

параллелепипеда ничем не ограничены и выбираются из опыта проведенных расчетов. При этом в качестве начального приближения можно выбрать любую точку внутри параллелепипеда, скажем, его центр:

$$\eta_0^0 = (\eta' + \eta'')/2, C_p^0 = (C' + C'')/2, \\ D^0 = (D' + D'')/2$$

Важно отметить, что параллелепипед выбора может постепенно перемещаться по пространству, охватывая новые участки изменения  $\eta_0^i$ ,  $C_p^i$ ,  $D^i$ . Это достигается тем, что его центр всегда помещается в точку, в которой на одной из предыдущих итераций был зафиксирован локальный минимум невязки. Если на какой-либо итерации минимум не фиксируется, то центр остается на месте и поиск минимума идет в текущем параллелепипеде. Если же локальный минимум достигнут в некоторой точке, то центр параллелепипеда перемещается в эту точку. В связи с этим размер пробного параллелепипеда должен быть по возможности небольшим. В пространстве параметров  $\eta_0$ ,  $C_p$ ,  $D$  он по мере приближения к искомому решению опишет

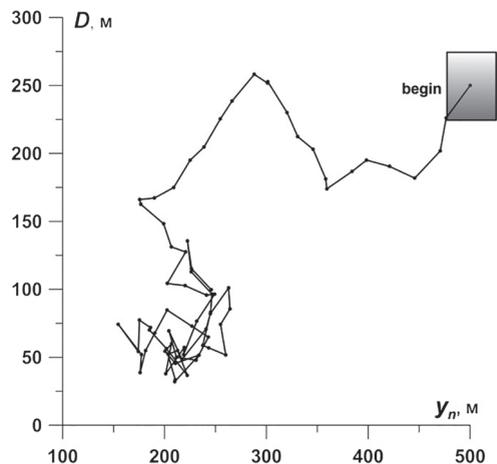


Рис. 3. Пример траектории перемещения параллелепипеда выбора в процессе случайного поиска  
Fig. 3. An example of movement trajectory for the box of choice in random search process

некоторую траекторию (на рис. 3 отображены изменения только двух параметров,  $y_0$  и  $D$ ). В расчете, которому соответствует этот рисунок, было выполнено более 3000 итераций, однако позиция параллелепипеда изменялась только 75 раз.

Небольшой размер параллелепипеда обеспечивает оптимальную стратегию поиска, при которой пробные точки всегда выбираются из окрестности точки, обеспечивающей локальный минимум.

При этом невязка строится следующим образом. Это среднеквадратичное отклонение  $\Delta_i$  (на  $i$ -й итерации) измеренных *in situ* величин оседания земной поверхности  $\eta_j$  ( $j = 1 \dots N$ ,  $N$  — число реперов) в заданных точках расположения реперов ( $x_j$ ) от величин, рассчитанных с использованием (1) —  $\eta(x_j)$  и переменных  $\eta_0^i$ ,  $C_p^i$ ,  $D^i$ . В результате серии итераций на какой-то итерации находятся значения этих переменных  $\eta_0^i$ ,  $C_p^i$ ,  $D^i$ , доставляющие минимум величине  $\Delta_i$ .

$$\Delta_i = \frac{1}{N_p} \sqrt{\sum_j^N [\eta_j - \eta(x_j)]^2}. \quad (3)$$

Очевидно, что величина невязки всегда больше нуля и может совпадать с ним

только в случае, когда все экспериментальные точки лежат на кривой (1). Конечно, на практике в силу многих причин такое совпадение невозможно, и за искомую кривую следует принять ту, для которой невязка имеет минимум. Далее приведены результаты применения этого алгоритма для случая, отображенного на рис. 1. При этом поиск минимума невязки происходит для каждой из четырех выделенных частей отдельно.

Из графиков на рис. 4 видно, что использование аппроксимаций вида (1) для верхней и нижней частей полумульды приводят к существенно различным формам мульды оседания, для которых максимальное оседание различается в разы. Это означает, что закономерности деформирования массива над выработанным пространством и над нетронутым угольным пластом различны в силу большей его раздробленности и трещиноватости в первом случае.

В силу сказанного общая задача построения аналитического соотношения для оседания поверхности может быть разбита на четыре: для каждой полумульды для верха и низа с использованием

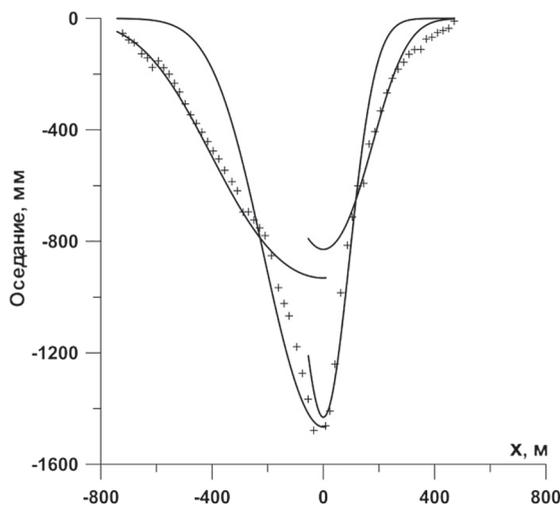


Рис. 4. Наилучшие аппроксимации замеренных оседаний поверхности на каждом из четырех выделенных участков с использованием (1)

Fig. 4. The best approximations of measured surface subsidence in each of four selected data sets using (1)

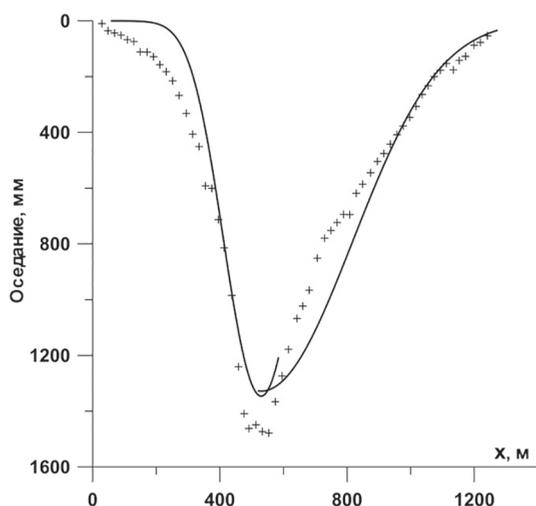


Рис. 5. Наилучшие аппроксимации замеренных оседаний поверхности для правой и левой полумульд с использованием (1)

Fig. 5. The best approximations of measured surface subsidence for right and left half-troughs using (1)

экспериментальных точек из соответствующей области. В частности, такое решение приведено в [20]. Во многих практических случаях бывает достаточно построить решение только для полумульды с использованием точек и для верха, и для низа. Оно также приведено на рис. 5.

В качестве альтернативы такому подходу можно поставить задачу случайного поиска в более сложном варианте. Скажем, при рассмотрении одной полумульды можно ввести в расчет два параметра,  $C_{pl}$  и  $C_{pu}$ , соответственно для нижней и верхней части полумульды. Аналогично и для  $D_l$  и  $D_u$ . При этом величина  $\eta_0$  — одна. В этом случае итерационный поиск осуществляется уже в пространстве пяти переменных, но принципиально не отличается от описанного выше.

### Имитационный алгоритм

Важной особенностью применимости описанного алгоритма является необходимость расположения линии реперов в средней части выработанного пространства и перпендикулярно направлению развития очистных работ, т.е. выполне-

ния условий плоской задачи, иными словами, когда эта линия расположена в главной плоскости мульды. На практике такое случается весьма редко, скорее, в виде исключения, в силу того, что выработанное пространство непрерывно увеличивается и, следовательно, изменяется мульда, а реперная линия остается на месте.

На рис. 2 отображена ситуация, когда упомянутые условия выполнены не в полной мере, т.е. реперная линия пересекает направление развития очистных работ (и, следовательно, главную ось мульды) под углом  $\sim 45^\circ$ , что не позволяет напрямую использовать соотношение (1). Однако реперная линия расположена в центральной части отработанного участка, т.е. все же в зоне плоской деформации и соотношение (1) все же может быть использовано, если произвести корректировку координат реперов. Их расчетные координаты должны быть заменены на проекции реальных координат на прямую, перпендикулярную направлению развития горных работ.

Достаточно простой и универсальный алгоритм случайного поиска нуж-

дается, тем не менее, в определенном подтверждении его сходимости, которое может быть выполнено проведением достаточно объемной серии пробных вычислений. Во-первых, при наличии многочисленных экспериментальных данных он может быть непосредственно проверен с их использованием путем построения функций вида (1) и сравнительных вычислений с этими данными. Тем не менее, встает вопрос, а для всех ли возможных комбинаций параметров из (1) разработанный алгоритм работоспособен.

Для его проверки необходимо сгенерировать набор случайно расположенных точек и для некоторого произвольного набора параметров  $\eta_0, C_p, D$ , получить с помощью (1) набор  $\eta(x_i)$ . Иными словами, для случайного набора точек  $x_i$  генерируется набор величин оседаний в этих точках  $\eta(x_i)$ . После этого полученные величины также случайным образом подвергаются изменению с вариацией в разумных пределах, в результате чего формируется набор данных, моделиру-

ющих реальные данные, которые могли бы быть получены с использованием реперной станции. Именно к этим величинам применяется построенный алгоритм случайного поиска с целью восстановить использованные параметры  $\eta_0, C_p, D, \Delta x$ .

На рис. 6 и 7 демонстрируются полученные результаты. Точки на рис. 6 — это сгенерированные данные в соответствии с (1) при значениях параметров  $\eta_0, C_p, D, \Delta x$ , равных 500 мм; 500 м; 0,7; 1500 м, соответственно, и модифицированные случайным образом по координате  $x$  в пределах до 10 м, а по  $\eta(x)$  — до 20 мм. Кривая на рисунке — результат работы алгоритма случайного поиска, т.е. кривая вида (1) с параметрами  $\eta_0, C_p, D, \Delta x$ , равными, соответственно, 537 мм; 495 м; 0,72; 1550 м. На рис. 7 демонстрируется сходимость итерационного процесса, а именно зависимость невязки от количества проведенных итераций. Видно, что практически при 250 итерациях процесс сходимости был завершен, но величина невязки не стала

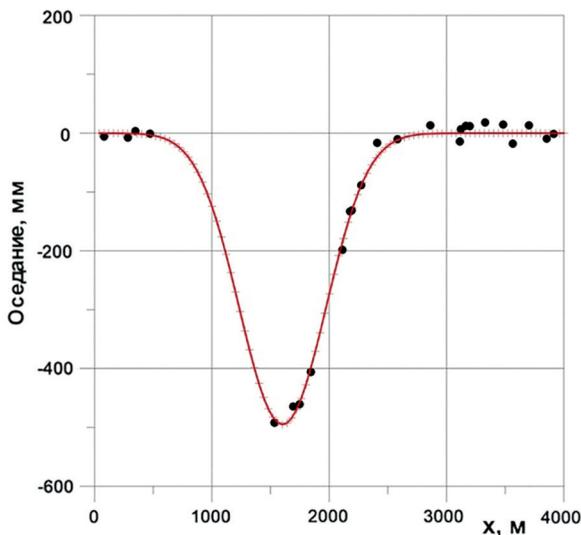


Рис. 6. Аппроксимация сгенерированных случайным образом в рамках имитационной модели точек функцией вида (1)

Fig. 6. Approximation of randomly generated points within framework of simulation model by a function of form (1)

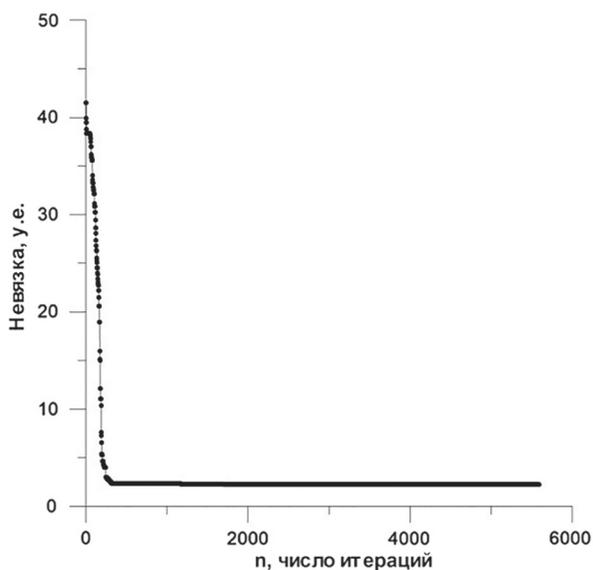


Рис. 7. Сходимость итерационного процесса поиска минимума невязки  
 Fig. 7. Convergence of iterative process in searching for minimum residual

равной нулю из-за случайной корректировки величин  $x_i$  и  $\eta(x_i)$ .

Отметим, что при расчетах было сгенерировано 25 случайно расположенных точек (см. рис. 6), что привело к вполне приемлемому результату.

### Результаты. Аппроксимация 2D-поверхности мульды

Эти рассуждения становятся весьма актуальными при рассмотрении оседания земной поверхности в 2D-поста-

новке, когда мульда имеет форму чаши (рис. 8, вертикальный масштаб для наглядности увеличен), в простейшем случае с двумя плоскостями симметрии.

Как правило, такого рода мульды формируются при отработке пластового месторождения (угольного пласта) длинными столбами, протяженностью до нескольких километров, и при этом длина лавы составляет несколько сотен метров (200–300 м). То есть на значительной части протяженности столба при

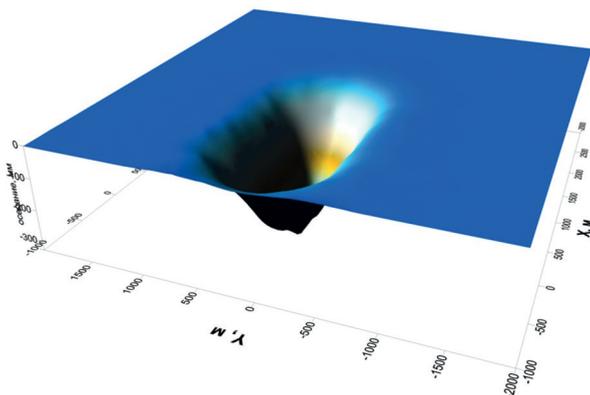


Рис. 8. Типичный вид мульды оседания земной поверхности в 2D-случае  
 Fig. 8. Typical view of subsidence trough in 2-D case

его отработке реализуется условие плоской деформации, и справедлив приведенный выше алгоритм построения формы мульды в виде (1).

Однако все эти построения не могут использоваться в случае сопоставимости размеров выработанного пространства по двум направлениям. В частности, такая ситуация в полной мере возникает на начальной стадии отработки столба, когда в течение некоторого времени имеется полноценная 2D-мульда с двумя главными диаметрами.

Для описания формы мульды в таких случаях может быть использовано соотношение, являющееся обобщением (1):

$$\eta(x, y) = -\frac{\eta_0}{4} \left[ F\left(\frac{D_{px} + x}{C_{px} H}\right) + F\left(\frac{D_{px} - x}{C_{px} H}\right) \right] * \left[ F\left(\frac{D_{py} + y}{C_{py} H}\right) + F\left(\frac{D_{py} - y}{C_{py} H}\right) \right] \quad (4)$$

где  $\eta_0, C_{px}, D_{px}, C_{py}, D_{py}$  аналогичны параметрам из (1).

Как и раньше, это соотношение справедливо при расположении начала координат в центре мульды и условии, что  $x, y$  являются главными осями. Таким образом, 2D-форма мульды оседания определяется пятью параметрами, входящими в соответствующие интегралы вероятностей Гаусса. Как и прежде, они должны быть определены с использованием данных, полученных тем или иным способом *in situ*. Это могут быть оседания реперов, однако теперь будем считать, что эти реперы не обязательно расположены в главных плоскостях.

Помимо этого, в общей постановке с произвольной системой координат величины, определяющие положение центра мульды и направление хотя бы одной из главных осей относительно принятой системы, также подлежат определению. Это увеличивает число искомым параметров до восьми.

В последнее время появилась принципиальная возможность определять оседание земной поверхности в некоторых произвольных точках в районе отработки месторождения с помощью спутниковых технологий [21]. Эта технология находится в стадии разработки, но может оказаться весьма перспективной. Для этого используются некоторые естественные отражательные объекты на поверхности земли, которые заранее неизвестны, но в процессе сканирования поверхности их координаты и величины смещений в них могут быть определены. Таким образом, в результате подобной процедуры получается набор точек (т.е. их координат), в которых заданы вертикальные смещения земной поверхности.

С использованием именно этого набора может быть образована невязка, подобная (3):

$$\Delta_i = \frac{1}{N_p} \sqrt{\sum_j^N [\eta_j - \eta(x_j, y_j)]^2} \quad (5)$$

Приведенный выше алгоритм случайного поиска можно использовать для определения величин  $\eta_0, C_{px}, D_{px}, C_{py}, D_{py}$ , доставляющих минимум функционалу (5). Полученные значения можно считать искомыми для использования в соотношении (4).

Далее рассмотрим подход нахождения параметров соотношения (4), несколько отличный от описанного выше метода случайного поиска. Поскольку реальных данных по оседаниям земной поверхности с использованием современных технологий на сегодняшний день фактически нет, то оценить работоспособность предлагаемого алгоритма можно в рамках имитационного моделирования процесса оседания.

Для примера зададим некоторую искусственную модельную мульду, т.е. выберем начало координат, в котором будет расположен центр мульды; направления

главных осей; набор значений для пяти параметров  $\eta_0, C_{px}, D_{px}, C_{py}, D_{py}$ , которые лежат в допустимых пределах для реальных условий. Для простоты будем полагать, что центр мульды расположен в начале координат, а оси  $x, y$  — главные. То есть справедливо соотношение (4), описывающее оседания в любой точке земной поверхности. При моделировании выберем следующие значения параметров:  $\eta_0 = 1000$  мм;  $C_{px} = 0.5$ ;  $D_{px} = 500$  м;  $C_{py} = 0.5$ ;  $D_{py} = 1000$  м.

После этого случайным образом выберем набор точек на поверхности  $(x_i, y_i, i = 1 \dots N)$  в зоне возможного формирования мульды оседания и вычислим в соответствии с (4) оседания в этих точках  $\eta(x_i, y_i)$ . Далее будем использовать полученные подобным образом расчетные величины в качестве экспериментальных данных в имитационном алгоритме и с его помощью постараемся восстановить значения параметров  $\eta_0, C_{px}, D_{px}, C_{py}, D_{py}$ . Достаточно хорошее совпадение этих восстановленных величин с изначально заданными будет свидетельствовать о приемлемости предлагаемого алгоритма.

Вообще говоря, любые экспериментальные данные *in situ* определяются с некоторой погрешностью, в том числе и координаты точек, и значения оседаний, в связи с чем расчетные значения  $x_i, y_i, \eta(x_i, y_i)$  перед использованием в алгоритме поиска также могут быть случайным образом подкорректированы в разумных пределах. Для каждой из перечисленных величин задается некоторый интервал ее возможной вариации, из которого случайным образом выбирается величина возмущения  $\delta$ . После этого вместо величин  $x_i, y_i, \eta(x_i, y_i)$  в алгоритме используется набор величин  $x_i + \delta_{x_i}, y_i + \delta_{y_i}, \eta(x_i, y_i) + \delta_{\eta_i}$ . При этом возникает вопрос об устойчивости алгоритма относительно вариаций величин  $\delta$ , который в дальнейшем потребует исследования.

На рис. 9 показано сгенерированное множество точек (250 шт.), случайным образом расположенных в прямоугольнике  $4000 \times 4000$  м. Для этих точек также сгенерированы величины  $\eta(x_i, y_i)$  в соответствии с описанным алгоритмом. В этом прямоугольнике расположена мульда, параметры которой  $\eta_0, C_{px}, D_{px}$ ,

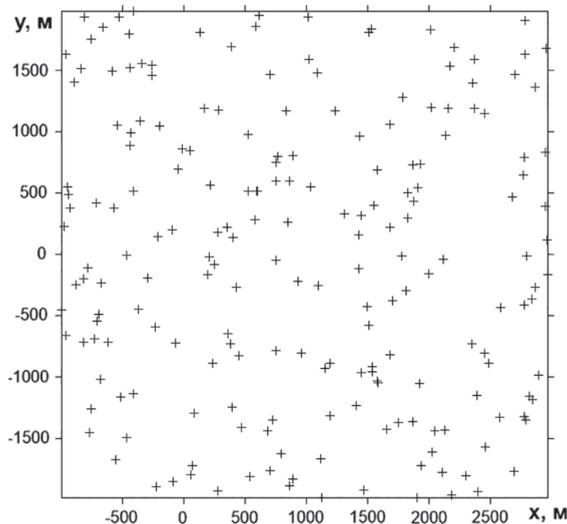


Рис. 9. Случайным образом сгенерированные точки в области  $4000 \times 4000$  м  
Fig. 9. Randomly generated points in the area of  $4000 \times 4000$  m

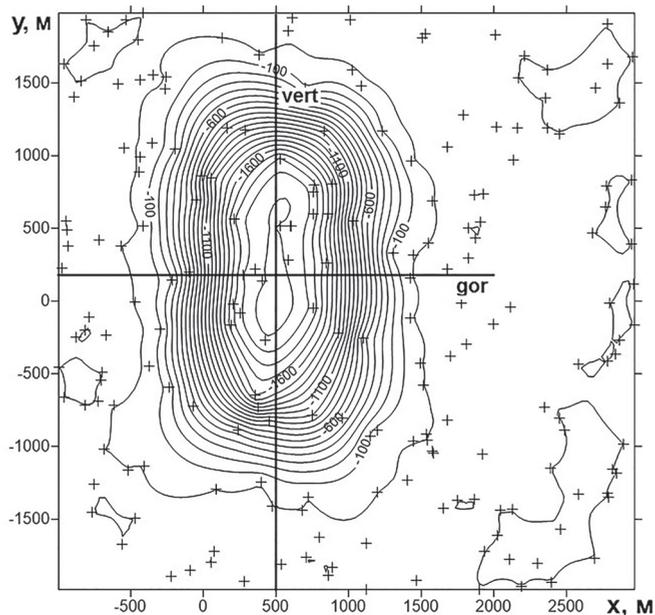


Рис. 10. Пространственная структура (мульда), построенная по сгенерированным точкам  
 Fig. 10. Spatial structure (trough) built from generated points

$C_{py}$ ,  $D_{py}$  подлежат определению. Для обработки этих данных воспользуемся стандартным математическим пакетом — SURFER, который позволяет отстраивать гладкие сплайновые поверхности по численным значениям функции в заданных точках. На рис. 10 показаны изолинии такой поверхности в соответствии с заданными ранее величинами, а также и сами точки (см. рис. 9).

На рис. 10 выявляется пространственная структура, которая может интерпретироваться в качестве мульды. Непосредственно на рисунке можно определить положение центра мульды и ее главные оси, которые в рассматриваемом случае, как и следовало ожидать, параллельны используемым координатным осям. На рис. 10 они показаны отрезками прямых — *vert* (при  $x = 500$  м) и *gor* (при  $y = 250$  м). То есть центр мульды расположен в точке (500 м, 250 м), что соответствует исходным данным.

Дальнейшая обработка данных связана с построением кривых оседания в

соответствующих сечениях полученной поверхности, что также достигается средствами SURFER. Точки на кривых 1 и 2 (рис. 11) получены в результате проведения сечений по упомянутым осям и вычисления значений функции в наборах точек, равномерно расположенных по показанным на рис. 10 отрезкам. Кривая 1 соответствует горизонтальному сечению (*gor*), а кривая 2 соответствует вертикальному сечению (*vert*). Для простоты сравнения кривые оседания поверхности по построенным сечениям совмещены на одном рисунке. Отметим, что максимальные оседания земной поверхности для обоих этих сечений, как и следовало ожидать, совпадают и равны  $\eta_{\max} = \sim 1000$  мм.

### Обсуждение и интерпретация результатов

Далее к этим точечным наборам данных может быть применен алгоритм случайного поиска, описанный в начале статьи, с тем чтобы аппроксимировать

их функциями вида (1) и получить значения параметров  $\eta_0, C_{px}, D_{px}, C_{py}, D_{py}$  для (4). Выполненная таким образом обработка кривых 1 и 2 на рис. 11 позволяет получить следующие значения параметров  $\eta_0, C_{px}, D_{px}, C_{py}, D_{py}$ : 1000 мм; 0,52; 515 м; 0,53; 1019 м, соответственно. Сравнение их с исходными значениями показывает практически полное совпадение, что свидетельствует о работоспособности алгоритма.

Заметим, что выбранное при построении поверхности число точек (250 шт.) позволило получить достаточно гладкую поверхность и соответствующие кривые оседания по главным сечениям (рис. 11). Это обстоятельство дает возможность далее воспользоваться результатами [24], в соответствии с которыми параметр  $D_{px}$  ( $D_{py}$ ) (см. (4)) равен половине ширины мульды на уровне  $\eta_{max}/2$ . Горизонтальная прямая проведена именно на этом уровне, т.е. 500 мм, и непосредственные измерения (могут быть выполнены в какой-нибудь графической программе) показывают, что для кривой 1  $D_{px} = \sim 511$  м, а для кривой 2 —  $D_{py} = \sim 1014$  м.

На рис. 11 приведены также вспомогательные кривые 3 (синий цвет) и 4 (фио-

летовый цвет), которые получаются смещением кривой 1 по оси координат на +700 м (кривая 3) и на -300 м (кривая 4) до совпадения соответствующих сторон мульд 1 и 2. Такого рода построение позволяет констатировать, что наклоны бортов (на рис. 11 правого и левого) для мульд 1 и 2 фактически совпадают. Правый совпадает полностью, а левый имеет некоторое незначительное расхождение. Именно наклоны этих кривых определяют значение параметров  $C_{px}, C_{py}$ . Непосредственное их дифференцирование при приводит к значениям  $C_{px}, C_{py}$  равным примерно 0,53.

Таким образом, обработка кривых на рис. 11 в рамках [22] позволяет получить следующие значения параметров  $\eta_0, C_{px}, D_{px}, C_{py}, D_{py}$ : 1000 мм; 0,53; 511 м; 0,53; 1014 м, соответственно. Сравнение их с исходными значениями и значениями, полученными алгоритмом случайного поиска, показывает практически полное совпадение.

При этом возникает весьма важный вопрос, связанный с расположением и количеством определенных точек. Очевидно, что на равномерное по площади распределение обнаруженных точек отражения рассчитывать не приходится,

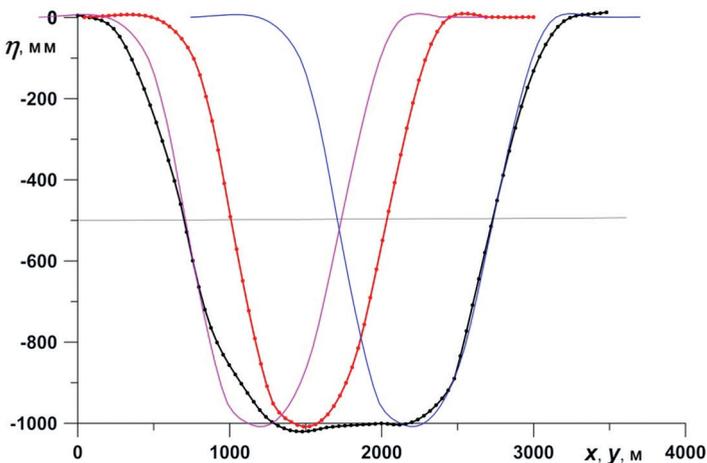


Рис. 11. Сечения построенной поверхности (см. рис. 10) по главным осям

Fig. 11. Sections of constructed surface (Fig. 10) along the main axes

что было бы наиболее благоприятным случаем, в связи с чем в дальнейшем следует оценить влияние количества точек и неравномерности их распределения по поверхности на применимость алгоритма. Если количество этих точек недостаточно, то в отличие от изображения на рис. 10, где четко выделяется структура оседаний поверхности, скольнибудь приемлемое построение невозможно и говорить о параметрах мульды, видимо, не имеет смысла, разве что о примерном месте ее расположения.

### Заключение

В статье рассмотрено построение аналитической функции, описывающей форму мульды оседания земной поверхности. При этом функция задана в виде комбинации интегралов Гаусса, хорошо зарекомендовавшей себя в аппроксимации экспериментальных данных, получаемых с помощью реперных станций. В общем случае ситуация усложняется тем, что экспериментальные точки замеров оседаний случайным образом разбросаны по определенной, достаточно обширной территории. В связи с этим для определения параметров, входящих в выражение для искомой функции, был предложен алгоритм, основанный на поиске минимума функционала невяз-

ки между измеренными *in situ* оседаниями и вычисленными теоретически по формуле значениями. Алгоритм поиска реализован в рамках метода случайного поиска, когда искомые параметры произвольным образом варьируются и отбираются те их значения, которые приближают к минимуму невязки.

Такого рода прямая процедура в случае 2D-мульды требует нахождения 8 варьируемых параметров: пяти параметров самой функции, положения центра мульды (2 параметра) и направления главных осей мульды (1 параметр), что может привести к неоднозначности получаемых результатов. В связи с этим был предложен комбинированный алгоритм с использованием на первом этапе стандартного математического пакета SURFER и на втором этапе — алгоритма построения мульды в 1D-варианте, описанного в начале статьи.

Помимо этого, при достаточной гладкости результатов, получаемых на первом этапе, на втором могут быть использованы полученные ранее закономерности, связывающие форму мульды и параметры отработки рудного тела. В рассмотренном в статье случае оба подхода на втором этапе привели практически к одному результату, что свидетельствует в пользу того и другого.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Manekar G. G., Shome D., Chaudhari M. P. Prediction of subsidence parameters & 3-D analysis at Balaghat underground manganese mine of MOIL Limited, India // *Procedia Engineering*. 2017, vol. 191, pp. 1075 – 1086. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.05.281.
2. Ximin Cuia, Xiexing Miaoa, Jin'an Wangb, Shuo Yanga, Huide Liua, Yanqi Songa, Hong Liua, Xikuan Hua Improved prediction of differential subsidence caused by underground mining // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2000, vol. 37, pp. 615 – 627.
3. Suchowerska A. M., Merifield R. S., Carter J. P. Vertical stress changes in multi-seam mining under supercritical longwall panels // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*. 2013, vol. 61, pp. 306 – 320. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2013.02.009.
4. Шейнин В. И., Потапова Е. Ю., Холмянский М. Л., Пушилин А. Н., Сарана Е. П. Инженерная методика расчета осадок основания над полостью, образующейся в результате растворения карстующихся пород под гидротехническим сооружением // *Вестник НИЦ*

«Строительство». — 2021. — № 2 (29). — С. 136–148. DOI: 10.37538/2224-9494-2021-2(29)-136-148.

5. *Kozhogulov K. Ch., Takhanov D. K., Kozhas A. K., Imashev A. Zh., Balpanova M. Zh.* Methods of forward calculation of ground subsidence above mines // *Journal of Mining Science*. 2020, vol. 56, pp. 184–195. DOI: 10.1134/S1062739120026637.

6. *Hamdi P., Stead D., Elmo D., Töyrä J.* Use of an integrated finite/discrete element method-discrete fracture network approach to characterize surface subsidence associated with sub-level caving // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2018, vol. 103, pp. 55–67. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2018.01.021.

7. *Sepehri M., Apel D. B., Hall R. A.* Prediction of mining-induced surface subsidence and ground movements at a Canadian diamond mine using an elastoplastic finite element model // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2017, vol. 100, pp. 73–82. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2017.10.006.

8. *Salmi E. F., Nazem M., Karakus M.* Numerical analysis of a large landslide induced by coal mining subsidence // *Engineering Geology*. 2017, vol. 217, pp. 141–152. DOI: 10.1016/j.enggeo.2016.12.021.

9. *Lu S., Li L., Cheng Y., Sa Z., Zhang Y., Yang N.* Mechanical failure mechanisms and forms of normal and deformed coal combination containing gas: Model development and analysis // *Engineering Failure Analysis*. 2017, vol. 80, pp. 241–252. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2017.06.022.

10. *Newman C., Agioutantis Z., Leon G. B. J.* Assessment of potential impacts to surface and subsurface water bodies due to longwall mining // *International Journal of Mining Science and Technology*. 2017, vol. 27, pp. 57–64. DOI: 10.1016/j.ijmst.2016.11.016.

11. *Peng S. S.* Topical areas of research needs in ground control. A state of the art review on coal mine ground control // *International Journal of Mining Science and Technology*. 2015, vol. 25, no. 1, pp. 1–6. DOI: 10.1016/j.ijmst.2014.12.006.

12. *Liu C., Li H., Mitri H., Jiang D., Li H., Feng J.* Voussoir beam model for lower strong roof strata movement in longwall mining – Case study // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2017, vol. 9, pp. 1171–1176. DOI: 10.1016/j.jrmge.2017.07.002.

13. *Suchowerska Iwanec A. M., Carter J. P., Hambleton J. P.* Geomechanics of subsidence above single and multi-seam coal mining // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2016, vol. 8, pp. 304–313.

14. *Kay D. R., McNabb K. E., Carter J. P.* Numerical modelling of mine subsidence at Angus Place Colliery / *Computer methods and advances in geomechanics*. Rotterdam, 1991.

15. *Lloyd P. W., Mohammad N., Reddish D. J.* Surface subsidence prediction techniques for UK coalfields e an innovative numerical modelling approach / *Proceedings of the 15th Mining Conference of Turkey*. 1997, pp. 111–124.

16. *Coulthard M. A., Holt G. E.* Numerical modelling of mining near and beneath tailings Dam / *Proceedings of the 1st Southern Hemisphere International Rock Mechanics Symposium*. Perth, Australian: Australian Centre for Geomechanics. 2008, pp. 341–154.

17. *Захаров В. Н., Шляпин А. В., Трофимов В. А., Филиппов Ю. А.* Изменение напряженно-деформированного состояния углепородного массива при отработке угольного пласта // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. — 2020. — № 9. — С. 5–24. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-9-0-5-24.

18. *Makeeva T., Trofimov V.* Forecast of deformations of the land surface from the separate clearing development, displacement and deformation in the main sections of the trough // *E3S Web of Conferences*. 2019, vol. 97, article 04016. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704016.

19. *Кратч Г.* Сдвигение горных пород и защита подрабатываемых сооружений. — М.: Недра, 1978. — 494 с.

20. *Makeeva T., Trofimov V.* Regularities of the day surface deformation during layer mining by consecutive lavas // *MATEC Web of Conferences*. 2018, vol. 251, article 02013. DOI: 10.1051/matecconf/201825102013 IPICSE-2018.

21. Чурсин И. Н. Спутниковый мониторинг сдвижения подработанной земной поверхности в Кузбассе с использованием радарной интерферометрии // Маркшейдерский вестник. – 2021. – № 4 (143). – С. 56–60.

22. Trofimov V. A., Makeeva T. G. Forecasting parameters of earth surface subsidence to assess safe operation of engineering structures // MATEC Web of Conferences. 2017, vol. 117, article 00170. DOI: 10.1051/mateconf/201711700170. 

## REFERENCES

1. Manekar G. G., Shome D., Chaudhari M. P. Prediction of subsidence parameters & 3-D analysis at Balaghat underground manganese mine of MOIL Limited, India. *Procedia Engineering*. 2017, vol. 191, pp. 1075–1086. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.05.281.

2. Ximin Cuia, Xiexing Miaoa, Jin'an Wangb, Shuo Yanga, Huide Liua, Yanqi Songa, Hong Liua, Xikuan Hua Improved prediction of differential subsidence caused by underground mining. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2000, vol. 37, pp. 615–627.

3. Suchowerska A. M., Merifield R. S., Carter J. P. Vertical stress changes in multi-seam mining under supercritical longwall panels. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*. 2013, vol. 61, pp. 306–320. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2013.02.009.

4. Sheinin V. I., Potapova E. Yu., Kholmyansky M. L., Pushilin A. N., Sarana E. P. Engineering methodology for calculating the settlement of the base above the cavity formed as a result of the dissolution of karst rocks under the hydraulic structure. *Vestnik NIC «Stroitel'stvo»*. 2021, no. 2 (29), pp. 136–148. [In Russ]. DOI: 10.37538/2224-9494-2021-2(29)-136-148.

5. Kozhogulov K. Ch., Takhanov D. K., Kozhas A. K., Imashev A. Zh., Balpanova M. Zh. Methods of forward calculation of ground subsidence above mines. *Journal of Mining Science*. 2020, vol. 56, pp. 184–195. DOI: 10.1134/S1062739120026637.

6. Hamdi P., Stead D., Elmo D., Töyrä J. Use of an integrated finite/discrete element method-discrete fracture network approach to characterize surface subsidence associated with sublevel caving. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2018, vol. 103, pp. 55–67. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2018.01.021.

7. Sepehri M., Apel D. B., Hall R. A. Prediction of mining-induced surface subsidence and ground movements at a Canadian diamond mine using an elastoplastic finite element model. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2017, vol. 100, pp. 73–82. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2017.10.006.

8. Salmi E. F., Nazem M., Karakus M. Numerical analysis of a large landslide induced by coal mining subsidence. *Engineering Geology*. 2017, vol. 217, pp. 141–152. DOI: 10.1016/j.enggeo.2016.12.021.

9. Lu S., Li L., Cheng Y., Sa Z., Zhang Y., Yang N. Mechanical failure mechanisms and forms of normal and deformed coal combination containing gas: Model development and analysis. *Engineering Failure Analysis*. 2017, vol. 80, pp. 241–252. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2017.06.022.

10. Newman C., Agioutantis Z., Leon G. B. J. Assessment of potential impacts to surface and subsurface water bodies due to longwall mining. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2017, vol. 27, pp. 57–64. DOI: 10.1016/j.ijmst.2016.11.016.

11. Peng S. S. Topical areas of research needs in ground control . A state of the art review on coal mine ground control. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2015, vol. 25, no. 1, pp. 1–6. DOI: 10.1016/j.ijmst.2014.12.006.

12. Liu C., Li H., Mitri H., Jiang D., Li H., Feng J. Voussoir beam model for lower strong roof strata movement in longwall mining – Case study. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2017, vol. 9, pp. 1171–1176. DOI: 10.1016/j.jrmge.2017.07.002.

13. Suchowerska Iwanec A. M., Carter J. P., Hambleton J. P. Geomechanics of subsidence above single and multi-seam coal mining. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2016, vol. 8, pp. 304–313.

14. Kay D. R., McNabb K. E., Carter J. P. Numerical modelling of mine subsidence at Angus Place Colliery. *Computer methods and advances in geomechanics*. Rotterdam, 1991.
15. Lloyd P. W., Mohammad N., Reddish D. J. Surface subsidence prediction techniques for UK coalfields e an innovative numerical modelling approach. *Proceedings of the 15th Mining Conference of Turkey*. 1997, pp. 111 – 124.
16. Coulthard M. A., Holt G. E. Numerical modelling of mining near and beneath tailings Dam. *Proceedings of the 1st Southern Hemisphere International Rock Mechanics Symposium*. Perth, Australian: Australian Centre for Geomechanics. 2008, pp. 341 – 154.
17. Zakharov V. N., Shlyapin A. V., Trofimov V. A., Filippov Yu. A. Change in stress–strain behavior of coal-rock mass during coal mining. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020, no. 9, pp. 5 – 24. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-9-0-5-24.
18. Makeeva T., Trofimov V. Forecast of deformations of the land surface from the separate clearing development, displacement and deformation in the main sections of the trough. *E3S Web of Conferences*. 2019, vol. 97, article 04016. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704016.
19. Kratch G. *Sdvizhenie gornyykh porod i zashchita podrabatyvaemykh sooruzheniy* [Movement of rocks and protection of undermined structures], Moscow, Nedra, 1978, 494 p.
20. Makeeva T., Trofimov V. Regularities of the day surface deformation during layer mining by consecutive lavas. *MATEC Web of Conferences*. 2018, vol. 251, article 02013. DOI: 10.1051/matecconf/201825102013 IPICSE-2018.
21. Chursin I. N. Satellite monitoring of the displacement of the under-mined earth's surface in Kuzbass using radar interferometry. *Mine Surveying Bulletin*. 2021, no. 4 (143), pp. 56 – 60. [In Russ].
22. Trofimov V. A., Makeeva T. G. Forecasting parameters of earth surface subsidence to assess safe operation of engineering structures. *MATEC Web of Conferences*. 2017, vol. 117, article 00170. DOI: 10.1051/matecconf/201711700170.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Makeeva Tamara Grigoryevna – канд. геол.-минерал. наук, доцент, e-mail: makeeva13new@yandex.ru, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Трофимов Виталий Александрович – д-р техн. наук, зав. лабораторией, e-mail: asas\_2001@mail.ru, Институт проблем комплексного освоения недр РАН, ORCID ID: 0000-0001-9010-189X.  
**Для контактов:** Трофимов В.А., e-mail: asas\_2001@mail.ru.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

T.G. Makeeva, Cand. Sci. (Geol. Mineral.), Assistant Professor, Moscow State University of Civil Engineering, 129337, Moscow, Russia, e-mail: makeeva13new@yandex.ru, V.A. Trofimov, Dr. Sci. (Eng.), Head of Laboratory, e-mail: asas\_2001@mail.ru, Institute of Problems of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources of Russian Academy of Sciences, 111020, Moscow, Russia, ORCID ID: 0000-0001-9010-189X.  
**Corresponding author:** V.A. Trofimov, e-mail: asas\_2001@mail.ru.

Получена редакцией 07.06.2022; получена после рецензии 06.10.2022; принята к печати 10.02.2023.  
Received by the editors 07.06.2022; received after the review 06.10.2022; accepted for printing 10.02.2023.