ГИАБ. Горный информационно-аналитический бюллетень /
MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin, 2024;(1-1):5–20
ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ / ORIGINAL PAPER

УДК 539.(4+4.011+42)+622.(011.4+02+023.23) DOI: 10.25018/0236_1493_2024_011_0_5

ОБОБЩЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ, ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ДЛЯ УСЛОВИЙ ОБЪЕМНОГО НЕРАВНОКОМПОНЕНТНОГО СЖАТИЯ

А.В. Жабко

[1] Уральский государственный горный университет (ФГБОУ ВО «УГГУ»), г. Екатеринбург, 620144, Россия, zhabkoav@mail.ru,

Аннотация: Работа посвящена выводу обобщенного единого аналитического критерия пластичности (предел упругости), прочности и разрушения горных пород для случая объемного неравнокомпонентного сжатия. Предложенный аналитический критерий не имеет ни эмпирических, ни аналитических аналогов. Отличительной особенностью предложенного критерия является то, что впервые в мировой практике одной аналитической зависимостью описывается полная ветвь пластической деформации в компонентах главных напряжений, от предела упругости – до предела пластичности (остаточной прочности). На основе выдвинутого критерия получен критерий прочности для двухфазной среды в условиях трехосного сжатия, то есть для горных пород при наличии порового давления жидкости (воды). В работе подробно обсуждается и предлагается новый взгляд на механизм пластического деформирования горной породы на стадии упрочнения. Указывается на трансляционно-ротационный характер пластического деформирования в окрестности сдвиговых площадок, следствием чего и является повышение прочности пород (упрочнение) и явление дилатансии. Таким образом, указывается на принципиально новый характер накопления потенциальной энергии деформации на стадии упрочнения в отличие от упругой фазы, с чем и связывается удароопасность горной породы. Приводятся критерий квазипластического деформирования горной породы, то есть критерий отсутствия упрочнения, дилатансии и акустической эмиссии, делается вывод о его хорошем согласии с данными экспериментальных исследований.

Ключевые слова: критерии пластичности, прочности, разрушения, дилатансия, пластическое деформирование, деформационное упрочнение, разрушение горных пород при сдвиге, трещина, главные напряжения.

Для цитирования: *Жабко А.В.* Обобщенный аналитический критерий пластичности, прочности и разрушения горных пород для условий объемного неравнокомпонентного сжатия // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2024. – № 1-1. – С. 5–20. DOI: 10.25018/0236_1493_2024_011_0_5.

Generalized analytical criterion of plasticity, strength and fracture of rocks for the conditions volume unequicomponent compression

A.V. Zhabko

[1] Ural State Mining University, Yekaterinburg, 620144, Russia, zhabkoav@mail.ru

© А.В. Жабко. 2024

Abstract: The work is devoted to the derivation of a generalized unified analytical criterion of plasticity (elastic limit), strength and fracture of rocks for the case of volumetric non-equivalent compression. The proposed analytical criterion has neither empirical nor analytical analogues. A distinctive feature of the proposed criterion is that for the first time in world practice, one analytical dependence describes the full branch of plastic deformation in the principal stress components, from the elastic limit to the limit of residual strength. On the basis of the advanced criterion, a strength criterion was obtained for a two-phase medium under triaxial compression, that is, for rocks in the presence of a pore pressure of a liquid (water). The paper discusses in detail and proposes a new view on the mechanism of plastic deformation of rock at the hardening stage. The translational-rotational nature of plastic deformation in the vicinity of shear areas is indicated, which results in an increase in the strength of rocks (hardening) and the phenomenon of dilatancy. Thus, a fundamentally new character of the accumulation of the potential energy of deformation at the hardening stage, in contrast to the elastic phase, is indicated, which is the reason for the impact hazard of the rock. A criterion for quasi-plastic deformation of a rock is given, that is, a criterion for the absence of hardening, dilatancy and acoustic emission, and a conclusion is made about its good agreement with the data of experimental studies.

Key words: Criteria of plasticity, strength, fracture, dilatancy, plastic deformation, strain hardening, destruction of rocks in shear, crack, principal stresses.

For citation: Zhabko A. V. Generalized analytical criterion of plasticity, strength and fracture of rocks for the conditions volume unequicomponent compression. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2024;(1-1):5—20. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2024_011_0_5.

Введение

Понятие разрушения горной породы, в отличие от материалов, не обладающих внутренним трением, является крайне сложным и неопределенным. С этим связано многообразие геомеханических явлений, наблюдаемых в горных породах и массивах, которые фактически не проявляются в других средах: дилатансия, горные и горно-тектонические удары, толчки, землетрясения, медленные и реидные волны и т.д. На рис. 1 представлена типовая диаграмма деформирования образца горной породы под нагрузкой в условиях объемного или трехосного сжатия.

На рис. 1 приведена типовая диаграмма деформирования горной породы под нагрузкой с характерными стадиями.

Точка 1 на рис. 1 символизирует предел упругости или начало пластических деформаций в горной породе, которая, в зависимости от напряженного состояния (уровня минимального главного напряжения), описывается некоторым критерием пластичности, который впервые предложил автор настоящей работы [1, 2]. Далее до предела прочности (точка 2, стадия деформирования I) горная порода накапливает в себе микродефекты и испытывает при этом необратимые (пластические) деформации. Данную ветвь и, соответственно, стадию деформирования принято называть деформационным упрочнением, то есть, несмотря на накопление дефектов, сопротивляемость (несущая способность) продолжает расти вплоть до предела прочности (см. рис. 1, точка 2, стадия деформирования II). После предела прочности или максимума несущей способности породы идет стадия деформационного разупрочнения, в пределах которой начинается объединение микродефектов в поверхность среза образца, которое начинает происходить в точке 3 (стадия деформирования III), после

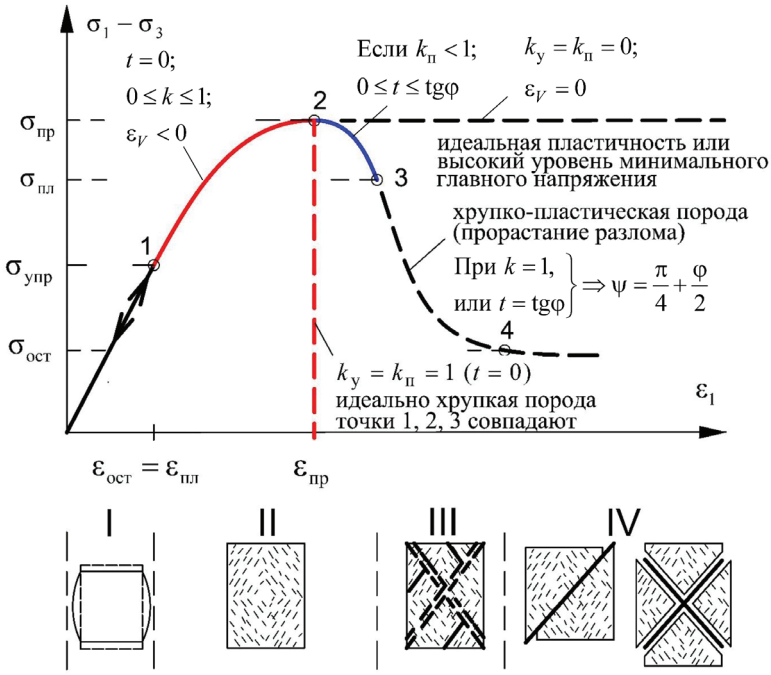

Рис. 1. Диаграмма деформирования горной породы и стадии ее разрушения
Fig. 1. Diagram of rock deformation and stages of its destruction

которой (точка 4, стадия деформирования IV) сопротивление, называемое остаточной прочностью горной породы, обуславливается трением берегов генерального разлома образца. Фактически от точки 1 до точки 3 горная порода подвержена разрушению (накопление дефектов разрывного и сдвигового характера и их укрупнение), в этой связи употребление данного термина без привязки к иерархическому или масштабному уровню (размеру массива) разрушаемого массива является некорректным в принципе. С этим связана еще одна особенность горных пород и их массивов: прочность трещиноватого (блочного) горного массива зависит от его размеров, причем весьма существенно, что для других сред и материалов является нонсенсом. Это же можно сказать про определяемое напряженное состояние на больших и малых базах измерений.

Исходя из того, что все время пластического деформирования, то есть от точки 1 до точки 3 (см. рис. 1) происходит разрушение горной породы, но на различных иерархических уровнях, логично предположить, что существует единый обобщенный критерий пластического состояния горной породы, описывающий все неупругие стадии ее деформирования, включая частные значения: предел упругости (начало пластической деформации), предел прочности, предел пластичности (остаточной прочности). И действительно, в работах [1, 2] автором впервые получен обобщенный и единый аналитический критерий, который описывает пластическое поведение породы от предела упругости до предела прочности, то есть от точки 1 до точки 2, включая и их крайние точки (пределы упругости и прочности). Данный критерий позволил многое объяс-

нить в механике (механизме) пластического деформирования горных пород и накоплении ими энергии деформации на стадии упрочнения. Пожалуй, единственным недостатком данного критерия является неучет промежуточного главного напряжения. Данная работа является продолжением упомянутых исследований, в котором впервые будет предложен единый аналитический критерий пластичности, прочности и разрушения горных пород, причем для условий трехосного сжатия. Необходимо отметить, что аналогов данному критерию не существует ни на эмпирическом уровне, ни, тем более, на аналитическом.

Обобщенный аналитический критерий пластичности, прочности и разрушения горных пород в условиях объемного сжатия

Строго говоря, в вопросах прочности и разрушения горных пород и массивов человеку удалось достичь не так много, с чем связаны известные проблемы прогноза землетрясений, предотвращения динамических проявлений горного давления в шахтах, а также отсутствие понимания механизма разрушения трещиноватых (блочных) массивов и, как следствие, отсутствие достоверных методик расчета их на прочность. Исследования в этом направлении продолжаются как у нас в стране [3–9], в том числе исследования прочности массивов [10–13], так и за рубежом [14, 15]. Используемые для практических целей эмпирические критерии прочности не могут объяснить многообразие процессов, происходящих при пластическом деформировании и разрушении горных пород, начиная от дилатансии, горных ударов и заканчивая землетрясениями. Напротив, предложенный в работах [1, 2] критерий пластичности и прочности является аналитическим и описывает не только отдельно взятую точку — предел прочности, а всю стадию упрочнения от предела упругости до предела прочности (от точки 1 до точки 2 на рис. 1). Данный критерий пластичности позволил многое объяснить в механике пластического деформирования [1, 2].

Итак, не приводя достаточно обширных выводов, с которыми читатель может ознакомиться в работах [1, 2], в рамках модели сплошной среды, обладающей внутренним трением φ и сцеплением C, аналитически получен, экспериментально проверен и подтвержден [1] единый критерий пластичности (на стадии упрочнения) и прочности горных пород (твердых тел) при сдвиге:

– в компонентах главных напряжений σ_1, σ_3:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C\sqrt{\left(1+\frac{tg\varphi\sigma_1}{C}\right)\left(1+\frac{tg\varphi k\sigma_3}{C}\right)}; \qquad (1)$$

– в компонентах напряжений на площадке среза τ, σ_n:

$$\tau = C(1+\sin\varphi) + \frac{1+k}{1-k}C\sin\varphi\ln\left|\frac{(1-k)\sigma_n + 2kC\cos\varphi}{(1+k)C\cos\varphi}\right|, \qquad (2)$$

определяющий при $k=0$ — функцию пластического потенциала и начальную поверхность текучести (предел упругости) для горных пород с пластическим характером разрушения;

$0 \le k \le 1$ — предел прочности горных пород и предел упругости для всех без исключения горных пород;

$k \to 1$ — теоретическую предельную поверхность или предел прочности при сдвиге (срезе), совпадающую с критерием Кулона (Coulomb, 1773).

Предложенный критерий пластичности и прочности описывает предел упругости прочности горных пород и все ее состояния на стадии деформационного упрочнения, а известный и наиболее часто используемый критерий прочности Кулона является одним из его частных представлений. И, действительно, используя выражение (2), получим:

$$\lim_{k \to 1} \tau = \left[\frac{0}{0} \right] = C + \mathrm{tg}\varphi\sigma_n .$$

В работе [1] приведено сравнение предлагаемого критерия пластичности и прочности с известными аналогами — критериями Кулона (Coulomb) и Хука–Брауна (Hoek–Brown), где наглядно продемонстрированы преимущества первого.

Критерий (1) получен аналитически решением задачи о распределении нормальных напряжений σ_3 в меняющемся поле максимального главного напряжения $\sigma_1 = \gamma h$ (где γ — объемный вес пород; h — расстояние от поверхности до поверхности скольжения или высота отсека) при выполнении условия предельного равновесия и обоснованием вариационными методами наиболее слабой поверхности скольжения (рис. 2). Другими словами, определялись минимальные напряжения σ_3, необходимые для выполнения условия предельного равновесия по наиболее опасной (напряженной) поверхности скольжения в каждой ее точке, то есть пары предельных главных напряжений. При этом для моделирования стадии упрочнения был введен коэффициент упрочнения, растущий от предела упругости до предела прочности, который символизирует и моделирует увеличение нормального напряжения на сдвиговой площадке в процессе деформационного упрочнения.

Если на стадии упрочнения максимальное напряжение возрастает, и это в рассматриваемой модели моделировалось увеличением коэффициента упрочнения k от предела упругости до предела прочности, то при разупрочнении интенсивность или скорость снижения максимального главного напряжения может быть смоделирована искусственным приростом нагрузки. В рассматриваемой модели (см. рис. 2) этого можно достичь с использованием не горизонтальной, а наклонной бермы. То есть весь диапазон напряженного состояния от $\sigma_1 = \sigma_{сж}$ и до бесконечности на стадии разупрочнения подвергается падению напряжений с интенсивностью t ($0 \le t \le \mathrm{tg}\varphi$). Причем считаем, что при бесконечно большом обжатии минимальным главным напряжением падение напряжений полностью отсутствует (идеальная пластичность или среда Рейса–Прандтля), а при одноосном сжатии падение напряжений максимально. Наклонная берма с изменяющимся углом, от нуля до угла внутреннего трения, будет моделировать приращение нагрузки на образцы (додавливание образцов), находящиеся в различных напряженных состояниях, после перехода их через предел прочности. Предел прочности — предел их несущей способности, то есть большую нагрузку образцы нести не могут, однако мы ее искусственно добавляем и выясняем, каким образом будут связаны между собой главные напряжения в образцах в этом случае, как будет меняться ориентировка наиболее опасных площадок и т.д.

Таким образом, общий функционал, определяющий горизонтальную силу, которую необходимо приложить для обеспечения предельного равновесия призмы смещения с наклонной бермой, определится следующей зависимостью[1]:

[1] Подробнее с выводом функционала (3) и отысканием на его основе наиболее опасных поверхно-

Рис. 2. Расчетная схема к обоснованию критерия пластичности, прочности и разрушения
Fig. 2. Calculation scheme to substantiate the criterion of plasticity, strength and fracture

$$E_0 = \int_{x_1}^{x_2} \gamma\left(tx + H - y\right)\left(y' - f\right) - k\sigma_3 f y'^2 - C\left(1 + y'^2\right)dx \to \max, \qquad (3)$$

где k — параметр упрочнения, $0 \le k \le 1$ (см. зависимости (1, 2)); t — параметр разупрочнения, $0 \le t \le \mathrm{tg}\varphi$; H — высота вертикального откоса; x, y, y' — соответственно независимая переменная, функция и производная функции поверхности скольжения; γ — объемный вес горных пород.

Наиболее опасная поверхность скольжения посредством решения вариационного уравнения (3) выразится зависимостью

$$h = tx + H - y = \frac{kf\sigma_3\left(p^2 - 2tp\right) - C\left(1 + 2tp - p^2\right)}{\gamma\left(f - t\right)}, \qquad (4)$$

где $p \equiv y'$.

Подставим зависимость (4) в уравнение (3):

$$E_0 = \frac{2\left(C + kf\sigma_3\right)^2}{\gamma\left(f - t\right)^2} \int_{f + \sqrt{1 + f^2}}^{t + \sqrt{t^2 + \frac{C + (f - t)\gamma h}{C + kf\sigma_3}}} \left[p^3 - \left(t + 2f\right)p^2 + \left(2ft - \frac{C}{C + kf\sigma_3}\right)p + \frac{Ct}{C + kf\sigma_3}\right]dp. \qquad (5)$$

стей скольжения можно ознакомиться в докторской диссертации автора: «Исследование закономерностей процесса дезинтеграции горных пород на основе теории устойчивости откосов горнотехнических сооружений». — Екатеринбург, 2019.

Учитывая, что $\sigma_3 = \partial E_0 / \partial h$ и $\sigma_1 = \gamma h$, продифференцировав уравнение (5), получим обобщенный критерий пластичности и прочности для участков упрочнения и разупрочнения:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2\left(C + kf\sigma_3\right) \cdot \left[t + \sqrt{t^2 + \frac{C + \left(f - t\right)\sigma_1}{C + kf\sigma_3}}\right] = \sigma_1 - 2\left(C + kf\sigma_3\right) tg\psi, \qquad 6)$$

где ψ — угол наклона наиболее слабой площадки к направлению минимального главного напряжения.

Уравнение (6) является обобщенным критерием пластичности и прочности горных пород, его параметры k и t определяют интенсивность (скорость) упрочнения и разупрочнения, а их частные значения — критерий пластичности (предел упругости или начало пластических деформаций) при $k = k_у$, предел прочности при $k = k_п$, предел пластичности, то есть значения главных напряжений, соответствующих окончанию пластических деформаций или началу формирования генерального разлома, при $t = t_о$. Другими словами, предел пластичности — это критические напряжения, при которых образец еще остается сплошным. Дальнейшее деформирование происходит в форме прорастания генерального разлома во весь размер образца и практически с полной потерей сцепления (сплошности) вдоль поверхности среза. Для получения уравнения, характеризующего остаточную прочность, по-видимому, в уравнении (6) необходимо положить $C = 0$. Частные значения параметров упрочнения и разупрочнения необходимо определять экспериментально.

На стадии деформационного упрочнения в уравнении (6) необходимо положить $t = 0$, то есть уравнение (6) будет совпадать с критерием (1). На стадии деформационного разупрочнения в критерий (6) подставляется значение параметра k на пределе прочности $k = k_п$, а параметр разупрочнения t является переменным, принимая свое конечное значение на пределе пластичности $t = t_о$. Подобно тому, как уравнение (1) при значении параметра упрочнения $k = 0$ описывает гарантированный предел упругости, то есть нижнюю грань начала пластических деформаций для любой горной породы, уравнение (6) при $t = f = \mathrm{tg}\varphi$ определяет точную нижнюю грань предела пластичности для любой горной породы.

При $k_п = 1$ угол наклона наиболее опасной площадки к минимальному главному напряжению составляет $\psi = \pi / 4 + \varphi / 2$, что является минимально возможным углом, и, поэтому за пределом прочности сразу происходит слияние микродефектов (коллективные эффекты) в генеральный разлом. Если же на пределе прочности $k_п < 1$, то формирование генерального разлома происходит за пределом прочности, предельным минимальным значением наиболее опасного угла площадки также является значение $\psi = \pi / 4 + \varphi / 2$ для любого уровня напряженного состояния, которое достигается при $t = f = \mathrm{tg}\varphi$.

Таким образом, у упругопластических пород на пределе прочности начинают объединяться (укрупняться) сдвиговые трещины, с чем и связывается падение напряжений (то есть накопившейся в образце энергии достаточно для укрупнения трещин и ее частичной диссипации), но они пока также не приводят к срезу всего образца, так как идет процесс их разворота и по ним сохраняется условие специального предельного равновесия.

Формирование генерального разлома начинается на пределе пластичности (см. рис. 1, точка 3). При $k_у = k_п = 1$ (идеально хрупкая порода) порода накопит в себе максимум энергии деформации, однако следует различать способность накапливать в себе энергию и способность ее реализации в динамической форме, то есть ее склонность к динамическим проявлениям. Склонность к динамическим проявлениям определяется способностью породы к активной дилатансии в условиях объемного сжатия. То есть, если порода идеально хрупкая, то вся накопленная в образце (объеме) энергия будет израсходована разрушение (создание одного генерального разлома), а в случае хрупко-пластических пород часть энергии, запасенной в образце к моменту прорастания генерального разлома, уже будет израсходована на создание поверхностей предыдущего иерархического уровня. Другими словами, энергия, запасенная в объеме (образце) хрупко-пластических пород, может быть потрачена до предела прочности на разлет осколков (горный удар), в противном случае после предела прочности она будет потрачена на образование структур (трещин) более высоких иерархических уровней. Точки 2 и 3 (см. рис. 1) являются точками перехода процесса разрушения на следующий иерархический уровень.

Критерии пластичности и прочности (1) и (6) получены из решения задачи плоского напряжения и не учитывают промежуточного главного напряжения σ_2. Исследованиями автора [16], было показано, что механизм повышения прочности горных пород от действия промежуточного главного напряжения заключается в увеличении нормальных напряжений на сдвиговой площадке вследствие бокового расширения и, как следствие — повышении на ней сил трения. Нормальное напряжение на площадке сдвига можно выразить зависимостью

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \psi + k\sigma_3 \sin^2 \psi + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2, \quad (7)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

С учетом выражения (7) функционал (3) для горизонтальной реакции запишется в следующем виде:

$$E_0 = \int_{x_1}^{x_2} \gamma(tx + H - y)(y' - f) - k\sigma_3 f y'^2 - \left(C + f\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2\right) \cdot \left(1 + y'^2\right) dx. \quad (8)$$

Для определения критерия пластичности и прочности нет никакого смысла проделывать операции нахождения наиболее опасной поверхности скольжения, дифференцирования и т.д., достаточно в уравнениях (1) — (6) заменить величину сцепления C на $C + f\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2$ (см. уравнения (3),(8)).

Таким образом, обобщенный критерий пластичности, прочности и разрушения для условий объемного неравнокомпонентного сжатия будет иметь следующий вид:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2\left(C + f\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2 + kf\sigma_3\right) \cdot \left[t + \sqrt{t^2 + \frac{C + f\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2 + (f - t)\sigma_1}{C + f\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2 + kf\sigma_3}}\right]. \quad (9)$$

Положив в критерии (9) $t = 0$, получим критерий прочности для условий объемного неравнокомпонентного сжатия:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C\sqrt{\left(1 + \frac{tg\varphi\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2 + \sigma_1\right)}{C}\right)\left(1 + \frac{tg\varphi\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_2 + k\sigma_3\right)}{C}\right)}, \qquad (10)$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2\sqrt{\left(C + tg\varphi\left(\lambda\sigma_2 + \sigma_1\right)\right)\left(C + tg\varphi\left(\lambda\sigma_2 + k\sigma_3\right)\right)}, \quad (11)$$

где $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ — коэффициент бокового распора.

Критерий прочности в случае неравнокомпонентного сжатия можно также выразить через угол наклона наиболее опасной площадки [1]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mathrm{ctg}\psi\left(C + \mathrm{tg}\varphi\left(\lambda\sigma_2 + \sigma_1\right)\right),$$

где $\mathrm{tg}\psi = \sqrt{\frac{C + \mathrm{tg}\varphi\left(\lambda\sigma_2 + \sigma_1\right)}{C + \mathrm{tg}\varphi\left(\lambda\sigma_2 + k\sigma_3\right)}}$ — угол наклона наиболее слабой площадки к направлению минимального главного напряжения, для случая объемного напряженного состояния.

Используя результаты исследования [17] и уравнения (10), (11), можно также записать критерий прочности для двухфазных сред, то есть при наличии в породе порового давления жидкости:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2\sqrt{\left(C + tg\varphi\left(\lambda\sigma_2 + \sigma_1 - u\right)\right)\left(C + tg\varphi\left(\lambda\sigma_2 + k\sigma_3 - u\right)\right)},$$

где u — поровое давление жидкости.

Механизм пластического деформирования горных пород на стадии деформационного упрочнения

В образце горной породы всегда имеются поры, микротрещины и т.д., которые на стадии упругого деформирования смыкаются, а за пределом упругости по ним начинаются сдвиговые подвижки. По-видимому, данные подвижки и приводят к образованию отрывных трещин, параллельных максимальному главному напряжению, на концах данных микродефектов с акустическим эффектом (акустическая эмиссия). Впрочем, микросдвиги могут образовываться и в процессе пластического деформирования на контактах зерен и других ослабленных местах, для дальнейших рассуждений это не имеет принципиального значения.

Таким образом, в начале пластического деформирования на площадке микросдвига выполняется условие специального предельного равновесия. Однако в процессе деформационного упрочнения напряженное состояние (девиатор напряжений) растет, в связи с этим появляется справедливый вопрос: каким образом в непрерывно растущем при упрочнении поле напряжений обеспечивается усло-

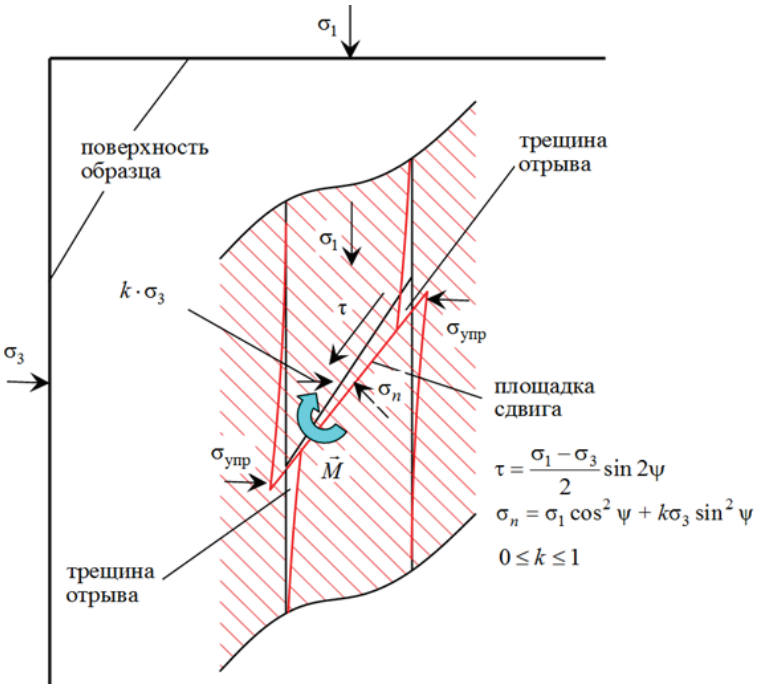

Рис. 3. Схема трансляционно-ротационного деформирования элемента образца в пластической фазе при упрочнении (черным цветом — положение элемента на пределе упругости; красным — в процессе деформационного упрочнения)
Fig. 3. Scheme of translatory-rotational deformation of a sample element in the plastic phase of strengthening (the position of the element at the elastic limit is coloured in black; the position of the element in the process of deformation strengthening is coloured in red)

вие равновесия по контакту микросдвига (судя по всему, специального предельного равновесия)? В противном случае подвижка по контакту мгновенно приведет к прорастанию либо сдвиговой, либо отрывной трещины. Последнее часто наблюдается при одноосном сжатии образцов, то есть при полном отсутствии явления упрочнения или его незначительном влиянии. Ответ на поставленный вопрос достаточно очевиден, если вспомнить, что напряженное состояние на сдвиговой площадке зависит от величин главных напряжений (компонент тензора напряжений) и ее ориентировки относительно этих напряжений. Таким образом, в растущем поле напряжений (рост девиатора напряжений на стадии упрочнения) при постоянных прочностных характеристиках контакта и неизменности ориентировки главных осей напряжений равновесие по сдвиговому контакту может быть достигнуто только разворотом самой площадки.

Как следует из результатов ранее проведенных исследований [1, 2], явление упрочнения, то есть возрастание несущей способности образца при непрерывно накапливающихся в нем дефектах (микротрещинах), достигается посредством увеличения нормальных напряжений на концах, образующихся или существующих изначально сдвиговых площадках вследствие их разворота (рис. 3), что приводит к невозможности прорастания сдвиговых и отрывных трещин и, соот-

ветственно, возможности увеличения несущей способности образца — ее упрочнению. То есть активная микротрещина на стадии деформационного упрочнения приводит к резкому перераспределению напряжений в ее окрестности, препятствующему мгновенному разрушению образца. На рис. 3 приведена схема деформирования элемента образца в окрестности трещины микросдвига.

Разворот (расклинивание) площадки (элемента, структурного блока) позволяет активировать дополнительные силы упругой природы — силы упругого отпора, позволяющие увеличить силы внутреннего трения посредством увеличения нормального напряжения на площадке сдвига. Препятствующие развороту силы упругого отпора создают в окрестностях концов трещины повышенные значения нормальных напряжений (см. рис. 3), что мгновенно тормозит прорастание микродефектов, то есть разрушение всего образца. При этом вследствие расклинивания увеличивается боковой обжим (в направлении минимального главного напряжения), то есть возрастает коэффициент упрочнения k на вновь образуемых площадках, в том числе на плоскости генерального разлома (сдвиговой площадки разрушения). Разумеется, такое расклинивание сопровождается увеличением объема образца в направлении минимального главного напряжения, что мы и называем дилатансией. А все перечисленное выше составляет явление упрочнения — повышение прочности образца во время пластического деформирования.

Таким образом, модель деформационного упрочнения можно описать следующим образом. После достижения материалом предела упругости в нем начинают реализовываться микросдвиговые площадки и появляются разрывные микротрещины (дефекты), которые не прорастают в полноценные плоскости скольжения или отрывные трещины даже при возрастании девиатора напряжений, что связано с перераспределением напряжений в окрестности концов трещины, вызванным разворотом сдвиговой площадки и упругим отпором боковых пород. Разворот структурных элементов создает в образце расклинивающий эффект, тем самым повышая нормальные напряжения на вновь образовывающихся площадках, что и называется упрочнением — повышение прочности в процессе накопления дефектов (пластического деформирования). И так вплоть до прорастания генерального разлома в образце, нормальное напряжение на котором всегда выше, чем на площадках микродефектов (рост параметра k в процессе упрочнения), что обусловлено расклинивающим эффектом (дилатансией).

Данная модель деформирования пород на стадии упрочнения достаточно убедительно объясняет природу упрочнения и дилатансии, снижение прочности блочных массивов вследствие их трещиноватости [1, 2] и т. д.

С другой стороны, разворот площадок микросдвигов будет приводить к распору окружающей среды, то есть мобилизации упругих сил отпора боковых пород, которые обеспечивают лучшую передачу усилия от действия минимального главного напряжения, повышая нормальное напряжение на образовывающихся сдвиговых площадках, тем самым увеличивая сдвиговую прочность. Таким образом, в окрестности микросдвигов происходит резкое перераспределение напряжений и, по-видимому, перестает работать закон парности касательных напряжений. Из опытных данных известно, что параметр k в процессе

упрочнения растет, это говорит о том, что растет и нормальное напряжение на сдвиговой площадке, а значит, это и есть механизм упрочнения. Прорастание микродефектов или их объединение станет возможным только когда прекратится разворот, а соответственно и дилатансия, то есть за пределом прочности, где как раз и находится участок эквиволюмиального (равнообъемного) течения. Таким образом, упрочнение — это результат увеличения прочности после достижения предела упругости за счет увеличения прочности на площадках микросдвигов (сил трения), то есть реализации внутренних сил упругого отпора посредством разворота структурных элементов (окрестность микротрещин). При таком внутреннем расклинивании среда разуплотняется и увеличивается в объеме, что и принято называть дилатансией.

При отсутствии внутреннего трения или высокой степени обжатия минимальным главным напряжением σ_3 момент силы, разворачивающий структурные элементы, либо отсутствует (связные среды), либо уравновешивается высоким уровнем σ_3, то есть имеем “запрещенную” дилатансию. В этом случае порода деформируется подобно квазипластической среде.

Таким образом, после наступления предела упругости горной породы, то есть начала стадии пластического или деформационного упрочнения, механизм накопления упругой энергии становится абсолютно другим. Если при упругом деформировании присутствует соосность тензоров напряжений и деформаций, то есть сжимающая нагрузка приводит к деформациям сжатия, то на стадии упрочнения происходит изгиб блоков (растяжение-сжатие) в условиях объемного сжатия.

На пределе упругости происходит только накопление упругой энергии, а после перехода через предел упругости происходит не только ее накопление, но и рассеивание. То есть на стадии деформационного упрочнения накопление энергии идет менее интенсивно, чем в упругой фазе, кроме того, как было отмечено выше, изменяется механизм ее накопления: сжатие в упругих областях и изгиб в пластических (в окрестностях активных микросдвигов). За пределом прочности энергии начинает рассеиваться больше, чем накапливаться, именно поэтому динамические проявления за пределом прочности не происходят. Накопленная до предела прочности энергия расходуется на разрушение образца. Если на пределе прочности энергии, накопленной в образце, достаточно для его разрушения, то происходит бурное разрушение, а ветвь разгрузки близка к вертикали (идеальная хрупкость) (см. рис. 1). В противном случае пластическая деформация продолжается, ветвь разгрузки более пологая, при этом с увеличением деформаций продолжается приток упругой энергии деформации, характер разрушения становится управляемым, динамические эффекты отсутствуют. С увеличением бокового обжатия образца хрупкие свойства породы пропадают, сменяются пластическими.

Существует мнение, что на пределе прочности энергии в образце может быть больше, чем необходимо для разрушения образца (положительное значение модуля спада), эта энергия, как считается, и расходуется на разлет осколков и другие эффекты, то есть динамическое разрушение. Необходимо также отметить, что исследования механических характеристик горных пород не установили связи между их прочностными свойствами и их склонностью к динамическому разрушению.

Квазипластическое деформирование горных пород

Как было отмечено выше, при большом уровне обжатия образца боковым давлением (минимальным главным напряжением) порода проявляет свойства квазипластичной среды, то есть у нее пропадает стадия упрочнения, не наблюдается дилатансия, акустическая эмиссия и т.д. [2].

В работе [2] получен и предложен критерий разрушения блочных сред, который по своей сути является критерием невозможности разворота структурных блоков или разуплотнения, другими словами — дилатансии:

$$\sigma_1 = \frac{\cos\varphi' C'}{\cos\vartheta \sin\left(\vartheta - \varphi'\right)} + \frac{1 + \frac{3}{2}\mathrm{tg}\vartheta \sin\left[2\left(\vartheta - \varphi'\right)\right]}{3\sin^2\left(\vartheta - \varphi'\right)}\sigma_3, \quad (12)$$

где ϑ — угол наклона трещины отдельности к оси, совпадающей с направлением действия минимального главного напряжения, на момент начала по ней подвижки; C', φ' — сцепление и угол трения по трещине отдельности.

При использовании критерия прочности массива (12), по сути, представляющего собой критерий отсутствия разуплотнения или дилатансии, появляется возможность определить критические значения минимального главного напряжения σ_3 или соотношение главных напряжений, при которых дилатансия или рост объемных деформаций будут “запрещены”. Положив в уравнении (12) приближенно $C' = 0$, определяем соотношения главных напряжений, соответствующих квазипластическому деформированию горных пород. Данные сведены в табл. 1.

В работах [18–20] приведены данные и значения критических отношений главных напряжений, полученных экспериментально различными исследователями (табл. 2).

Таблица 1

Критические отношения главных напряжений [2]

ϑ, град	φ, град	σ_1 / σ_3
$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$	25	3,6
	30	4,3
	35	5,3
	40	6,4

Таблица 2

Экспериментальные значения критических отношений главных напряжений [2]

Исследователь, год	σ_1 / σ_3	Примечание
Schwartz, 1964 [19]	4,0	$\sigma_{сж} = 45$ МПа
Mogi, 1966 [19]	3,4	$\sigma_{сж} = 45$ МПа
Hoek, Martin, 2014 [20]	5,9 (1/0,17)	–
Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г., 1979 [18]	3,5; 5,1; 6,1	Мрамор 1 ($\varphi = 31^\circ$); Талькохлорит ($\varphi = 35^\circ$); Песчаник П 04 ($\varphi = 40^\circ$)

Таким образом, предложенный аналитический критерий квазипластичности достаточно хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований.

Заключение

Таким образом, в работе впервые в мировой практике получен аналитический критерий пластичности, прочности и разрушения горных пород для самого общего случая напряженного состояния — трехосного неравнокомпонентного сжатия горных пород, который описывает напряженное состояние горной породы от предела упругости до предела пластичности (остаточной прочности), включая предел прочности. Кроме того, в работе предложен критерий квазипластического деформирования, позволяющий определить уровень минимального главного напряжения, при котором горная порода деформируется как квазипластическая среда, то есть отсутствует упрочнение, не наблюдается дилатансия и акустическая эмиссия.

В работе используется достаточно широкий спектр технических терминов, относящихся к вопросам прочности и разрушения горных пород и горных массивов. Некоторые из этих терминов не относятся к “общеупотребимым” и приводятся в авторской редакции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жабко А. В.* Критерии прочности горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2021. — № 11–1. — С. 27–45. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_111_0_27.

2. *Жабко А. В.* Механика пластического деформирования горных пород при объемном сжатии и механизм горных ударов // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. — 2022. — № 4. — С. 47–63. DOI: 10.21440/0536–1028–2022–4-47–63.

3. *Меженов М. Е.*, *Зайцев Д. В.*, *Кочанов А. Н.*, *Панфилов П. Е.* Особенности разрушения горных пород и неорганических материалов биологического генезиса в водной среде // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2022. — № 11–2. — С. 5–15. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_112_0_5.

4. *Тарасов Б. Г.* Веерный механизм как инициатор землетрясений и горных ударов на глубоких горизонтах // Горный журнал. — 2020. — № 3 (2272). — С. 18–23.

5. *Сосновская Е. Л.*, *Авдеев А. Н.* Управление геомеханическими процессами на золоторудных жильных месторождениях Восточной Сибири // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. — 2019. — № 5. — С. 21–29. DOI: 10.21440/0536–1028–2019–5-21–29.

6. *Тарасов Б. Г.* Парадоксы прочности и хрупкости горных пород в условиях сейсмических глубин // Горный журнал. — 2020. — № 1 (2270). — С. 11–17. DOI: 10.17580/gzh.2020.01.02.

7. *Latyshev O. G.*, *Kornilkov M. V.* Analysis of fractal characteristics of jointing in rocks as their strength criterion // Gornyi Zhurnal. 2015, no. 9, pp. 17–21. DOI: 10.17580/gzh.2015.09.03.

8. *Латышев О. Г.*, *Казак О. О.* Влияние нарушенности горных пород на их свойства и состояние // Известия УГГУ. — 2017. — Вып. 4(48). — С. 62–65. DOI: 10.21440/2307–2091–2017–4-62–65/.

9. *Бокий И. Б.*, *Полякова Л. Н.*, *Ребров М. Б.* Механические разрушения горных пород при проведении испытаний методом объемного сжатия // Горнодобывающая промышленность в 21 веке: вызовы и реальность: Сборник докладов международной научно-практической конференции, посвященной 60-летию института «Якутнипроалмаз» АК «АЛРОСА», Мирный, 15–16 сентября 2021 года. — М.: Издательство «Перо», 2022. — С. 152–159.

10. *Вербило П. Э.*, *Вильнер М. А.* Изучение анизотропии прочности и масштабного эффекта трещиноватого массива горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2022. — № 6–2. — С. 47–59. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_62_0_47.

11. *Протосеня А. Г.*, *Вербило П. Э.* Изучение прочности на сжатие трещиноватого горного массива // Записки горного института. — 2017. — Т. 223. — С. 51–58.

12. *Шашенко А. Н.*, *Сдвижкова Е. А.*, *Гапеев С. Н.* Деформируемость и прочность массивов горных пород. — Днепропетровск: НГУ, 2008. — 224 с.

13. *Викторов С. Д.*, *Кочанов А. Н.* Некоторые аспекты разрушения горных пород с позиций физики прочности и механики трещин // 60-я Международная научная конференция «Актуальные проблемы прочности»: Материалы конференции, Витебск, 14–18 мая 2018 года. — Витебск, 2018. — С. 340–342.

14. *Ömer Aydan*. Time-Dependency in Rock Mechanics and Rock Engineering. ISRM Book Series. Leiden: CRC Press/Balkema. 2017, vol. 2, 248 p.

15. *Schlotfeldt P.*, *Elmo D.*, *Panton B.* Overhanging rock slope by design: An integrated approach using rock mass strength characterization, largescale numerical modelling and limit equilibrium methods // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2018, no. 10, pp. 72–90.

16. *Жабко А. В.*, *Волкоморова Н. В.* О механизме и степени влияния промежуточного главного напряжения на прочность горных пород // Проблемы недропользования. 2019. — Вып. 2 (21). — С. 88–92.

17. *Жабко А. В.* Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Устойчивость откосов в поле тектонических, сейсмических и гидростатических напряжений // Известия УГГУ. — 2016. — № 4(44). — С. 47–50.

18. *Ставрогин А. Н.*, *Протосеня А. Г.* Пластичность горных пород. — М.: Недра, 1979. — 301 с.

19. *Hoek E, Brown E. T.* The Hoek-Brown failure criterion and GSI e 2018 edition / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2018, pp. 1–19. https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2018.08.001.

20. *Hoek E*, *Martin C. D.* Fracture initiation and propagation in intact rock — A review / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2014, pp/ 287–300. http://dx.doi.org/10.1016/j.jrmge.2014.06.001. ГИАБ

REFERENCES

1. Zhabko A. V. Rock strength criteria. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2021, no. 11–1, pp. 27–45. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_111_0_27.

2. Zhabko A. V. Mechanics of plastic deformation of rocks under volumetric compression and the mechanism of rock impacts. *Izvestija vysshih uchebny hzavedenij. Gornyj zhurnal*. 2022, no. 4, pp. 47–63. [In Russ]. DOI: 10.21440/0536–1028–2022–4-47–63

3. Mezhenov M. E., Zaitsev D. V., Kochanov A. N., Panfilov P. E. Features of destruction of rocks and inorganic materials of biological genesis in the aquatic environment. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2022, no. 11–2, pp. 5–15. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_112_0_5.

4. Tarasov B. G. Fan mechanism as an initiator of earthquakes and mountain impacts on deep horizons. *Gornyj zhurnal*. 2020, no. 3 (2272), pp. 18–23. [In Russ].

5. Sosnovskaya E. L., Avdeev A. N. Management of geomechanical processes at gold ore vein deposits in Eastern Siberia. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Gornyj zhurnal*. 2019, no. 5, pp. 21–29. [In Russ]. DOI: 10.21440/0536–1028–2019–5-21–29

6. Tarasov B. G. Paradoxes of rock strength and fragility in conditions of seismic depths. *Gornyj zhurnal*. 2020, no. 1 (2270), pp. 11–17. [In Russ]. DOI: 10.17580/gzh.2020.01.02.

7. Latyshev O. G., Kornilkov M. V. Analysis of fractal characteristics of jointing in rocks as their strength criterion. *Gornyi Zhurnal*. 2015, no. 9, pp. 17–21.

8. Latyshev O. G., Cossack O. O. Influence of rock disturbance on their properties and condition. *Izvestiâ Ural'skogo gosudarstvennogo gornogo universiteta*. 2017, no. 4(48), pp. 62–65. [In Russ]. DOI: 10.21440/2307–2091–2017–4-62–65.

9. Bokiy I. B., Polyakova L. N., Rebrov M. B. Mechanical destruction of rocks during volumetric compression testing. *Mining industry in the 21st century: Challenges and Reality: A collection of reports of the international scientific and practical conference dedicated to the 60th anniversary of the Yakutniproalmaz Institute of ALROSA, Mirny, September 15–16, 2021*. Moscow, Pero Publ, 2022, pp. 152–159. [In Russ].

10. Verbilo P. E., Wilner M. A. Study of strength anisotropy and scale effect of fractured rock mass. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2022, no. 6–2, pp. 47–59. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_62_0_47.

11. Protosenya A. G., Verbilo P. E. Study of the compressive strength of a fractured rock mass. *Journal of Mining Institute*. 2017, vol. 223, pp. 51–58. [In Russ].

12. Shashenko A. N., Sdvizhkova E. A., Gapeev S. N. Deformability and strength of rock massifs, Dnepropetrovsk, NGU, 2008, 224 p. [In Russ].

13. Viktorov S. D., Kochanov A. N. Some aspects of rock destruction from the standpoint of strength physics and crack mechanics. *60th International Scientific Conference "Actual problems of strength": Conference materials*. Vitebsk, 2018, pp. 340–342. [In Russ].

14. Ömer Aydan. Time-Dependency in Rock Mechanics and Rock Engineering. ISRM Book Series. Leiden: CRC Press/Balkema. 2017, vol. 2, 248 p.

15. Schlotfeldt P., Elmo D., Panton B. Overhanging rock slope by design: An integrated approach using rock mass strength characterization, largescale numerical modelling and limit equilibrium methods. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2018, no. 10, pp. 72–90.

16 Zhabko A. V., Volkomorova N. V. On the mechanism and degree of influence of the intermediate main stress on the strength of rocks. *Network periodical scientific publication "Problems of subsoil use"*. 2019, issue 2 (21), pp. 88–92. [In Russ].

17. Zhabko A. V. The theory of calculating the stability of slopes and bases. Stability of slopes in the field of tectonic, seismic and hydrostatic stresses. *Izvestiâ Ural'skogo gosudarstvennogo gornogo universiteta*. 2016, no. 4(44), pp. 47–50. [In Russ].

18. Stavrogin A. N., Protosenya A. G. Rock plasticity, Moscow, Nedra, 1979, 301 p. [In Russ].

19. Hoek E, Brown E. T. The Hoek-Brown failure criterion and GSI e 2018 edition / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2018, pp. 1–19. https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2018.08.001.

20. Hoek E, Martin C. D. Fracture initiation and propagation in intact rock A review / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2014, pp/ 287–300. http://dx.doi.org/10.1016/j.jrmge.2014.06.001.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Жабко Андрей Викторович — докт. техн. наук, доцент, зав. кафедрой, Уральский государственный горный университет (ФГБОУ ВО «УГГУ»), г. Екатеринбург, 620144, Россия, zhabkoav@mail.ru, ORCID ID: 0000–0002–3081–9522.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Zhabko A. V., Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Department, Ural State Mining University, Yekaterinburg, 620144, Russia, zhabkoav@mail.ru.

Получена редакцией 15.05.2023; получена после рецензии 01.12.2023; принята к печати 10.12.2023.
Received by the editors 15.05.2023; received after the review 01.12.2023; accepted for printing 10.12.2023.