

УЧЕТ ПРОЦЕССОВ УСТАЛОСТИ ПРИ ОПИСАНИИ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГЕОМАТЕРИАЛОВ

А.Р. Мартынюк¹, А.В. Харченко²

¹ Московский колледж транспорта РУТ (МИИТ), Москва, Россия

² Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова РАН,
Москва, Россия, e-mail: ipkon-dir@ipkonran.ru

Аннотация: Приведен один из возможных подходов к описанию изменений во времени напряженного-деформированного состояния горных пород, учитывающий процессы усталости. Представлены результаты исследований механизма разрушения геоматериалов с использованием метода фазового поля (PFM). Предложен метод нахождения параметра порядка при помощи уравнения Гинзбурга–Ландау, причем получено общее решение этого уравнения. С использованием аппарата дробно-дифференциального исчисления описаны эффекты усталости горных пород для случая циклического нагружения. При использовании обобщенного конститутивного дробно-дифференциального уравнения Зенера–Ишлинского были исследованы случаи циклического и квазистатического нагружения образца каменной соли, причем случай циклического нагружения приводит к эффекту гистерезиса. Для циклического нагружения было установлено, как теоретически, так и экспериментально, что возрастание параметра порядка и времени релаксации от цикла к циклу свидетельствует о растущем накоплении дефектов в образце, ведущем к его разрушению. Полученные результаты позволяют рассматривать параметр порядка как показатель доли разрушения образца горной породы. Случай численного моделирования квазистатического нагружения с применением обобщенной модели Зенера–Ишлинского демонстрирует нелинейность поведения модели в начале нагружения, а также явление упругого последдействия.

Ключевые слова: геоматериалы, усталость материала, метод фазового поля (PFM), напряженно-деформированное состояние, параметр порядка, циклическое нагружение, квазистатическое нагружение, численные методы.

Для цитирования: Мартынюк А. Р., Харченко А. В. Учет процессов усталости при описании напряженно-деформированного состояния геоматериалов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2024. – № 11. – С. 37–49. DOI: 10.25018/0236_1493_2024_11_0_37.

Inclusion of fatigue processes in stress–strain analysis of geomaterials

A.R. Martyniuk¹, A.V. Kharchenko²

¹ Moscow College of Transport (MIIT), Moscow, Russia

² Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia, e-mail: ipkon-dir@ipkonran.ru

Abstract: The article presents an approach to the description of the stress–strain behavior of geomaterials in time with regard to fatigue processes. The studies into the mechanism of failure of geomaterials using the phase-field methods (PHM) are presented. The method of finding the order parameter using the Ginzburg–Landau equation is proposed, and the general solution of the equation is obtained. Using a tool of solving fractional differential equations, the rock fatigue phenomena are described as a case study of cyclic loading. With the help of a generalized constitutive fractional differential equation by Zener–Ishlinsky, the cyclic and quasistatic loading of a rock salt sample was investigated, and it was found that the cyclic loading led to a hysteresis phenomenon. In case of the cyclic loading, it is experimentally and theoretically proved that the increase in the order parameter and in the time of stress relaxation from cycle to cycle is reflective of the growing accumulation of defects in a sample, which leads to the failure of the latter. The research findings enable considering the order parameter as an indicator of damage level in a test rock sample. Numerical modeling of the quasistatic loading using the generalized Zener–Ishlinsky model demonstrates the nonlinear behavior of the model in the beginning of the loading and the elastic aftereffect later on.

Key words: geomaterials, material fatigue, phase-field method (PFM), stress–strain behavior, order parameter, cyclic loading, quasistatic loading, numerical methods.

For citation: Martyniuk A. R., Kharchenko A. V. Inclusion of fatigue processes in stress–strain analysis of geomaterials. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2024;(11):37–49. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2024_11_0_37.

Введение

В настоящее время в связи с интенсификацией ведения подземных горных работ, осложняемой различными негативными горно-геологическими процессами, задача описания изменений во времени напряженно-деформированного состояния породных массивов, вмещающих выработки различного назначения, по-прежнему остается актуальной [1–4].

Современные подходы, используемые для геомеханического обеспечения горных работ, как правило, не учитывают изменчивость поведения геосреды во времени, то есть пренебрегают процессами старения и усталости геоматериалов.

При длительном действии периодически изменяющихся нагрузок возникает опасное явление, называемое усталостью материалов. Под усталостью материала понимают процесс накопле-

ния повреждений при циклических нагружениях, заканчивающийся хрупким разрушением [5]. Сущность этого явления состоит в том, что материал, подвергшийся длительному воздействию периодически изменяющихся нагрузок, разрушается при напряжениях более низких, чем предел прочности и даже предел текучести.

В настоящей работе рассматриваются процессы, ведущие к разрушению образца горной породы, вызванные приложенными к нему циклическими нагрузками. Кроме того, исследуется поведение образца при циклическом нагружении, не приводящем к разрушению, а также при квазистатической нагрузке. Процессы усталости изучались многими исследователями как в России [6–9], так и за рубежом [10–13].

Ниже рассматриваются некоторые особенности описания этих процессов.

В работе [11] принят феноменологический подход к описанию эффекта усталости материала при воздействии циклических нагрузжений. В ней предлагается учет усталости и старения на основе двух подходов.

В первом строится прогнозная модель, в которой модули упругости и коэффициент вязкости являются функциями времени. Преимущество данного подхода состоит в том, что он показывает, как реологические параметры влияют на величину текущей деформации и ее изменение во времени.

Второй подход основывается на построении конститутивных (определяющих) уравнений, зависящих от дробных производных. Коэффициент, входящий в данное уравнение, описывает эффекты усталости. Мы предлагаем описать эффекты усталости и старения геоматериалов, придерживаясь второго подхода.

Вопросы усталости в геоматериалах приобретают особое значение при учете их эрдитарности (т.е. при учете эффекта памяти) [14 – 16]. Наиболее существенным образом это сказывается при исследовании физико-механических свойств горных пород как материалов с неоднородным дискретным строением (поры, трещины и др.). В таких материалах деформации, заданные законами классической упругости, искажаются вследствие деформационных процессов, происходящих в геоматериале на меньшем масштабном уровне. Каждый масштабный уровень характеризуется своими механизмами, закономерностями деформации, эволюцией структуры и поврежденности. Нелокальные, или градиентные, теории позволяют принять во внимание структуру, которая включает параметры масштабного уровня в механике сплошных сред путем введения внутренней шкалы длины в управляющие уравнения. Градиент можно рассматривать как слабое нарушение среды.

В моделях, предложенных в [17 – 21], рассматривалась механика трещин, а не механика повреждений. В указанных работах отслеживался рост макротрещины, что и являлось целью этих исследований, и внимание не акцентировалось на накоплении микротрещин/микропустот.

Постановка задачи

Метод фазового поля (PFM) использовался для изучения разрушения вещества на микроскопическом уровне, отвердевания вещества, перехода фаз, вызванного приложенным напряжением, зарождения и развития трещин и в теории дислокаций. Предлагается, аналогично работе [21], ввести для геомеханического описания разрушения используемое в [11] уравнение Гинзбурга–Ландау. Также считается, что система «твердое тело–разрушенное тело» бинарна.

Ключевой характеристикой в этой системе является значение параметра порядка η . В бинарной системе полагают, что параметр порядка одной фазы равен нулю, а у второй равен единице, причем переходом от нуля к единице служит гладкая функция, т.е. при $\eta = 0$ тело не содержит повреждений, а при $\eta = 1$ тело полностью разрушено [22].

Непрерывное изменение между фазами ведет к росту повреждений. Нелокальное повреждение геоматериала может быть описано с использованием градиента повреждения в термодинамической формулировке.

Свободная энергия неповрежденного материала имеет следующий вид:

$$\psi(\bar{\varepsilon}, \eta) = (1 - \eta)^2 (2\eta + 1) \frac{1}{2} \bar{E} \bar{\varepsilon}^2 + W \eta^2 (1 - \eta)^2. \quad (1)$$

Функционал свободной энергии и ее градиента выражается так:

$$F = \int_V \left[(1-\eta)^2 (2\eta+1) \frac{1}{2} \bar{E} \bar{\varepsilon}^2 + W\eta^2 (1-\eta)^2 + \frac{\epsilon_\eta^2}{2} |\nabla\eta|^2 \right] dV, \quad (2)$$

где ϵ_η^2 — положительная константа, зависящая от микроструктуры материала ($\epsilon_\eta^2 = \eta \bar{E} l^2$, где l — размер зерна, \bar{E} — модуль Юнга неповрежденной горной породы, $\bar{\varepsilon}$ — деформация неповрежденного материала, а $W > 0$ — диссипативный коэффициент, позволяющий учесть согласованность с законами термодинамики, имеющий размерность [Па]).

Если теперь найти вариацию функционала, то в случае термодинамического равновесия она принимает вид

$$\frac{\delta F}{\delta \eta} = \bar{E} \left[3\bar{\varepsilon}^2 \eta (\eta - 1) + 2w\eta (1 - \eta) (1 - 2\eta) - l^2 \nabla^2 \eta \right] = 0,$$

где $w = W/\bar{E}$. (В дальнейшем мы примем обоснованное предположение, что $w > 3/2 \bar{\varepsilon}^2$.)

В ситуации, когда параметр порядка зависит от времени, простейшее уравнение, которое гарантирует убывание свободной энергии от времени (и возрастание энтропии, в наиболее общей формулировке), имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -M_\eta \frac{\delta F}{\delta \eta} = -M_\eta \bar{E} \left[3\bar{\varepsilon}^2 \eta (\eta - 1) + 2w\eta (1 - \eta) (1 - 2\eta) - l^2 \nabla^2 \eta \right]. \quad (3)$$

Это уравнение и называется уравнением Гинзбурга–Ландау, где M_η — положительная величина, определяемая экспериментально, связанная с кинетическими коэффициентами, имеющая размерность [1/(Па·с)]. Уравнение Гинзбурга–Ландау на мезоуровне позволит учесть нарушения структуры горной породы. Таким образом, наше уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -M_\eta \bar{E} \left[3\bar{\varepsilon}^2 \eta (\eta - 1) + 2w\eta (1 - \eta) (1 - 2\eta) - l^2 \nabla^2 \eta \right]. \quad (4)$$

Для одномерного случая уравнение (4) решается с помощью подстановки, использующей бегущую волну,

$$\eta(\xi) = \frac{1 - th \frac{\lambda \xi}{2}}{2}, \quad \text{где } \xi = x - ct, \text{ а } c \text{ — скорость волны, и } \lambda = \text{const.}$$

Решение уравнения (4) будет записываться выражением

$$\eta(x, t) = \frac{1 + th \left(\frac{3\bar{E}M_\eta \bar{\varepsilon}^2 t}{2} - \frac{\sqrt{2wx}}{2l} \right)}{2}. \quad (5)$$

Решив уравнение (4) и используя значение параметра порядка η , рассмотрим поведение вязкоупругого тела, обладающего эффектом памяти, под действием циклического и квазистатического нагружения.

Здесь усталость характеризуется функцией, описывающей изменение физико-механических свойств образца, связанных с циклическим воздействием напря-

жений и деформаций на образец, при этом считаем, что удобно использовать величину параметра порядка η для характеристики усталости геоматериала. Запишем вид этой функции, используя дробно-дифференциальное исчисление [12]:

$$\mathfrak{Z}(t) = \int_{t_0}^t (\eta_c - \eta(\tau)) A(x) {}_0^C D_t^\eta \varepsilon(x, \tau) \cdot \dot{\varepsilon}(x, \tau) d\tau \quad (6)$$

Значение η изменяется в промежутке: $0 \leq \eta(t) \leq \eta_c$, $\eta_c < 1$, а при $\eta(t) = \eta_c$ в материале возникает трещина, $A(x)$ – положительная функция в скалярном случае, (в 3D-случае положительно определенный тензор 4-го ранга размерности [Па·сⁿ]), связывающая напряжение с деформацией таким образом [12]:

$$\sigma(x, t) = (\eta_c - \eta(t))^2 A(x) {}_0^C D_t^\eta \varepsilon(x, t), \quad (7)$$

где

$${}_0^C D_t^\eta \varepsilon(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varepsilon}(x, \tau)}{(t-\tau)^\eta} d\tau -$$

дробная производная (согласно [12], от относительной деформации, заданной

$$\varepsilon(x, t), \quad 0 < \eta < 1, \quad \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} = \dot{\varepsilon}(x, t) -$$

частная производная по времени).

Функция усталости характеризует возрастание $\eta(t)$, что ведет к уменьшению прочности материала, и затем достигает порога η_c , при котором появляется трещина и напряжение на свободной поверхности становится равным нулю.

Здесь смысл функции усталости отличается от общепринятого, который предполагает зависимость σ от N – числа циклов нагружения. Отметим, что понятие усталости тесно связано с классическим пределом длительной прочности в механике разрушения, т.е. с напряжением, вызывающим разрушение материала за определенное время дей-

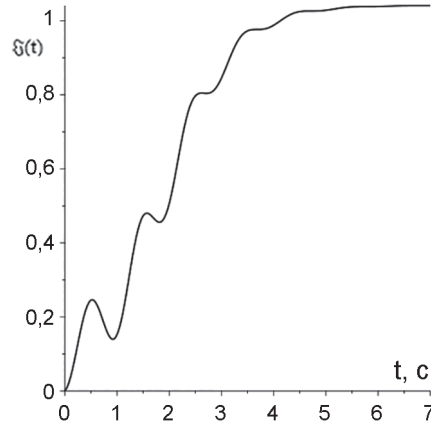


Рис. 1. График функции усталости геоматериала от времени

Fig. 1. Graph of the geomaterial fatigue function from time

ствия механической нагрузки (в том числе циклической) при постоянной температуре.

На рис. 1 представлена зависимость функции усталости геоматериала от времени при циклическом нагружении, рассчитанная по формуле (6). В этом выражении были приняты следующие значения для входящих в нее величин:

$$\eta_c = 1, \quad \omega = 3 \text{ с}^{-1},$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{при } \eta \leq 0 \\ \eta, & \text{при } 0 < \eta \leq \eta_c \\ \eta_c, & \text{при } \eta > \eta_c. \end{cases}$$

В выражении для η , заданном формулой (5), мы используем следующие значения: $x_0 = 0,01$ м, $w = 0,03$, $M_\eta = 0,01$ (Па·с)⁻¹, $E = 12 \cdot 10^8$ Па, $\varepsilon_\eta = 0,0002$. Для переменной $\varepsilon(x, \tau)$, входящей в уравнение (6), считаем, что $\varepsilon(x, \tau) = \varepsilon_0 \sin(\omega\tau)$, $\varepsilon_0 = 0,0002$. Для демонстрации зависимости мы не стали в этой формуле учитывать значение $A(x)$ и нормировали значение $\mathfrak{Z}(t)$ на единицу.

Результаты и их обсуждение

Ранее полученное решение уравнения Гинзбурга–Ландау в одномерном случае позволяет определить значение

параметра порядка $\eta(x,t)$, используя которое, возможно находить значения деформации и напряжения в образце.

Для практического применения интересен случай вязкоупругого тела, который более точно описывается дробно-дифференциальными уравнениями, нежели уравнениями в целочисленных производных. Предлагается использовать вместо классического конститутивного уравнения стандартной модели Зенера–Ишлинского

$$E_1 \sigma(t) + \eta_1 (d/dt) \sigma(t) = E_1 E_2 \varepsilon(t) + \eta_1 (E_1 + E_2) (d/dt) \varepsilon(t) \quad (8)$$

обобщенное дробно-дифференциальное уравнение с дробными производными одинакового параметра порядка η :

$$E_1 \sigma(t) + \eta_{10} D_t^\eta \sigma(t) = E_1 E_2 \varepsilon(t) + \eta_1 (E_1 + E_2) D_t^\eta \varepsilon(t), \quad 0 < \eta < 1. \quad (9)$$

Структурная схема этого уравнения приведена на рис. 2.

В уравнении (9)

$${}_0 D_t^\eta \sigma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\eta)} \int_0^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{(t-\tau)^\eta} d\tau,$$

а E_1 и E_2 — изотермические модули упругости, η_1 — обобщенный коэффициент вязкоупругости [23]. Введем обобщенные параметры времен τ^η и θ^η как времена температурных релаксаций при постоянном напряжении и постоянной деформации соответственно, связанные с обобщенным параметром вязкости η_1 в (9), следующим образом:

$$\theta^\eta = (\eta_1 (E_1 + E_2)) / E_1 E_2; \\ \tau^\eta = \eta_1 / E_1. \quad (10)$$

Сохраним в равенстве (10) обозначения постоянных величин в том же виде, что и в классическом конститутивном соотношении, полагая, что при $\eta = 1$ они должны совпадать.

Далее рассмотрим особенности полученного решения (9) для случаев циклического и квазистатического нагружения.

Используя уравнение (9) и экспериментальные данные по одноосному нагружению образца каменной соли [24], рассчитаем соответствующие параметры: η , E_1 , E_2 , η_1 и время релаксации τ для каждого цикла нагружения. По данным [24], образец на установке Instron 150 LX подвергался одноосному циклическому нагружению с амплитудой $\sigma_0 = 18$ МПа. Всего было проведено 7 полных циклов, из которых первый цикл был установочным. Скорость осевой деформации была постоянной и принимала значение $|(d\varepsilon_1)/dt| = 3$ мм/мин. Разрушение образца произошло на восьмом цикле.

Для получения вышеупомянутых параметров воспользуемся методом наименьших квадратов, примененным к дробной модели Зенера–Ишлинского [25]. Результаты расчетов приведены в таблице.

Как подчеркивается в [26], нагрузка и разгрузка во II цикле идут по почти линейной траектории, поскольку уплот-

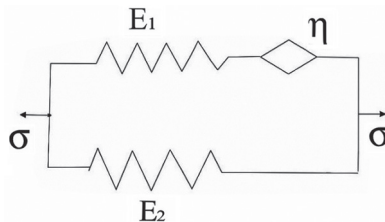


Рис. 2. Структурная схема обобщенной модели Зенера–Ишлинского

Fig. 2. Structural schema of the generalized Zener–Ishlinski model

Упругие и реологические параметры для обобщенной модели Зенера–Ишлинского
Elastic and rheological parameters for the generalized Zener–Ishlinsky model

Номер цикла	Модуль упругости E_1 , 10^8 Па	Модуль упругости E_2 , 10^8 Па	Параметр порядка η	Обобщенный параметр вязкости η_1 , 10^8 Па·с ^{η}	Время релаксации τ , с
II	12,54	64,04	0,4868	6,16	0,23
III	13,80	50,24	0,5781	11,67	0,75
IV	12,00	38,29	0,6020	13,43	0,95
V	9,02	29,27	0,6485	13,24	1,81
VI	6,34	22,92	0,6437	10,53	2,20
VII	6,70	16,22	0,7050	17,37	3,86

нение образца произошло в установочном (I цикле) и активный рост деформаций во II цикле за счет залечивания дефектов отсутствует. В этом цикле $\eta < 0,5$, что теоретически объясняется тем фактом, что в формуле (5) при малых деформациях второе слагаемое под знаком гиперболического тангенса превалирует над первым, в то время как в последующих циклах, в силу роста дефектов от цикла к циклу, и, как следствие, накопления остаточных деформаций, параметр порядка принимает возрастающие значения: $1/2 < \eta < 1$. Об увеличении количества дефектов свидетельствует и рост времени релаксации от цикла к циклу.

Рассмотрим случай численного моделирования циклического нагружения. При численном моделировании приложения напряжения на прессе по циклической зависимости $\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t$, поставим задачу подобным образом: найти связь между $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ для вязкоупругого тела, описываемого дробно-дифференциальным уравнением Зенера–Ишлинского (9) с начальным условием: $\sigma(0) = 0$.

В согласии с [22], предположим, что $\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t)$. Подставив это выражение в (9) и группируя, получим два уравнения:

$$\sigma_0(t) + \tau^\eta {}_0 D_t^\eta \sigma_0(t) = E_2 \varepsilon(t); \quad (11)$$

$$\sigma_1(t) + \tau^\eta {}_0 D_t^\eta \sigma_1(t) = E_2 \theta^\eta {}_0 D_t^\eta \varepsilon(t). \quad (12)$$

Применим оператор $\theta^\eta {}_0 D_t^\eta$ к обеим частям уравнения (11) и, сопоставив результат с уравнением (12), видим, что $\sigma_0(t)$ и $\sigma_1(t)$ связаны соотношением

$$\sigma_1(t) = \theta^\eta {}_0 D_t^\eta \sigma_0(t). \quad (13)$$

Предполагая, что $\sigma_0(t) = \sigma_0 \sin \omega t$, и подставляя $\sigma_0(t)$ в выражение (11) и затем в $\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t)$, получаем итоговое значение напряжения при циклической нагрузке на прессе:

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) \sin \omega t + \frac{\sigma_0 \omega \theta^\eta}{\Gamma(1-\eta)} \left(\cos(\omega t) \int_0^t \frac{\cos \omega z}{z^\eta} dz + \sin(\omega t) \int_0^t \frac{\sin \omega z}{z^\eta} dz \right). \quad (14)$$

Деформация, соответствующая этому напряжению, определяется следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0(t) \sin \omega t}{E_2} + \frac{\sigma_0 \omega \tau^\eta}{\Gamma(1-\eta) E_2} \left(\cos(\omega t) \int_0^t \frac{\cos \omega z}{z^\eta} dz + \sin(\omega t) \int_0^t \frac{\sin \omega z}{z^\eta} dz \right). \quad (15)$$

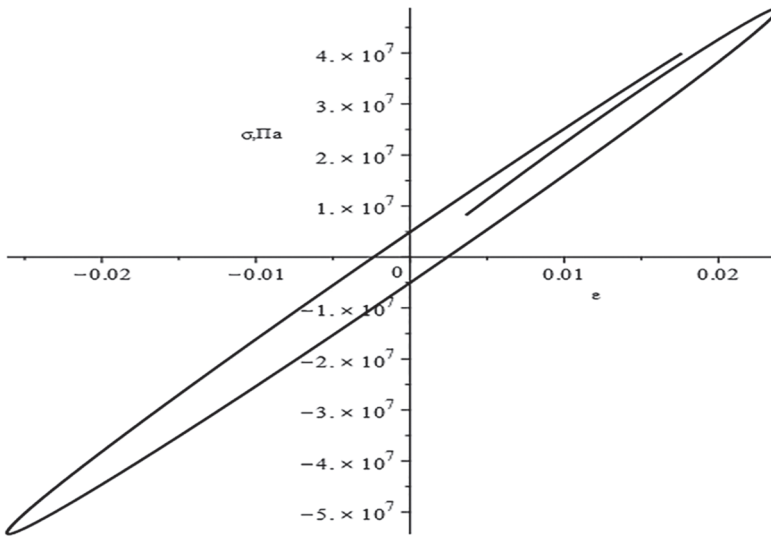


Рис. 3. Гистерезисная модель в координатах напряжение–деформация
 Fig. 3. Hysteresis model in stress–strain coordinates

Для числовых показателей, входящих в уравнения (14) и (15), были приняты следующие величины, соответствующие образцам каменной соли: $E_1 = 6,45 \cdot 10^8$ Па, $E_2 = 16,21 \cdot 10^8$ Па, $\eta = 0,7411$, $\omega = \pi/6$ с $^{-1}$, $\tau = 4,04$ с, $\theta = 6,35$ с, $\sigma_0 = 18$ МПа — амплитуда периодической циклической нагрузки.

Можно показать, что с увеличением времени будет возрастать разность фаз между напряжением и деформацией. Построив зависимости (14) и (15) в координатах напряжение — деформация, получим гистерезисную модель, график которой представлен на рис. 3.

Таким образом, при численном моделировании циклического нагружения получена гистерезисная модель, описывающая поведение структурно-неоднородных геоматериалов. Одной из наиболее распространенных в настоящее время моделей упругого гистерезиса является модель пространства Прейсаха–Майергойца [27].

Теперь рассмотрим случай численного моделирования квазистатического нагружения. Для этого случая поставим задачу так: необходимо найти $\varepsilon(t)$, возникающую при напряжении, задаваемом зависимостью $\sigma(t) = \sigma_0(H(t) - H(t - T))$, где $H(t)$ — единичная функция, T — время нагружения. Начальное условие имеет вид $\varepsilon(0) = \sigma_0/(E_1 + E_2)$. Вместо классического уравнения стандартного линейного тела предлагаем использовать дробно-дифференциальное уравнение Зенера–Ишлинского (9).

Решение уравнения (9) было приведено в [25]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} \left\{ H(t) \left(1 + \frac{E_1}{E_2} (1 - \text{Exp}(\eta, 1, -E_0 / \eta_1, t)) \right) - \right. \\ \left. - H(t - T) \left(1 + \frac{E_1}{E_2} (1 - \text{Exp}(\eta, 1, -E_0 / \eta_1, t)) \right) \right\}, \quad (16)$$

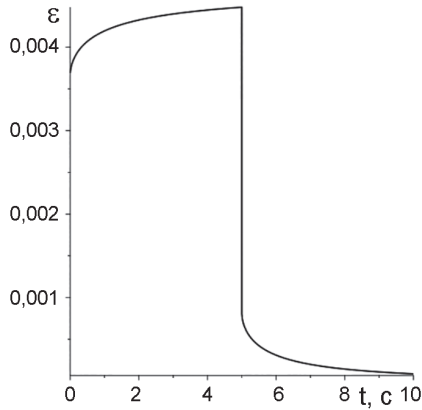


Рис. 4. Зависимость относительных деформаций от времени
Fig. 4. The dependence of relative deformations on time

где

$$\text{Exp}(\eta, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_{\eta}(\lambda t^{\eta}; \mu),$$

$$E_{\eta}(t; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\eta k + \mu)} -$$

функция типа Миттаг–Леффлера;

$$E_0 = E_1 E_2 / (E_1 + E_2),$$

где E_1 и E_2 — модули упругости элементов, входящих в модель Зенера–Ишлинского; η_1 — обобщенный коэффициент вязкоупругости.

В формуле (16) приняты следующие числовые значения для образца каменной соли: $E_1 = 11 \cdot 10^8$ Па, $E_2 = 38 \cdot 10^8$ Па, $\eta = 0,6136$, $\mu = 1$, $\eta_1 = 11,96 \cdot 10^8$ Па·с $^{\eta}$, причем $\sigma_0 = 18$ МПа — напряжение квазистатического воздействия.

Проводя вычисления по зависимости (11), получаем график, показанный на рис. 4.

При разгрузке образец мгновенно сокращается на величину упругой деформации, равной упругой деформации, имевшей место при нагрузке. В дальнейшем он будет медленно сокращаться до тех пор, пока это дополнительное «восстановление» не прекратится полностью.

Кривая деформации демонстрирует начальную нелинейность в первые мо-

менты нагрузки и поведение после ее снятия. Это хорошо согласуется с понятием упругого последействия [28].

Заключение

В работе показан один из возможных подходов к описанию поведения напряженно-деформированного состояния горных пород, учитывающий процессы усталости. Подробно рассматриваются эффекты усталости образца геоматериала при циклическом воздействии, поведение параметра порядка, а также численно моделируется квазистатическое и циклическое нагружение.

Предложен метод нахождения параметра порядка при помощи уравнения Гинзбурга–Ландау, причем получено общее решение этого уравнения. Показано, что возможно использовать значение параметра порядка в функции усталости как фактора появления трещины и, в дальнейшем, как показателя разрушения материала.

Применение обобщенного конститутивного уравнения Зенера–Ишлинского позволило описать случаи квазистатического нагружения образца и циклического нагружения, последнее из которых приводит к возникновению эффекта гистерезиса.

Соответствие теоретических зависимостей и экспериментальных данных демонстрирует, что в случае циклического нагружения параметр порядка, как и время релаксации, увеличивается от цикла к циклу, что свидетельствует о накоплении дефектов материала, ведущем к разрушению образца.

Численное моделирование квазистатического нагружения образца, осно-

ванное на обобщенной модели Зенера–Ишлинского, демонстрирует начальную нелинейность в момент приложения нагрузки и поведение после ее снятия, что хорошо согласуется с понятием упругого последствия.

Авторы признательны д.ф.-м.н. В.А. Винникову (НИТУ МИСИС) за внимание к работе и советы, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шанкар В., Кумар Д., Субрахманьям Д. С. Влияние подземных выработок на напряженное состояние массива горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2019. — № 2. — С. 43–48. DOI: 10.15372/FTPRP120190205.

2. Васильев Л. М., Васильев Д. Л. Теоретическое обоснование формирования горизонтальных нормальных напряжений в массивах горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2013. — № 2. — С. 81–90.

3. Гудков В. М., Катков Г. А. Устойчивость массивов горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2008. — № 2. — С. 119–121.

4. Nazarov L. A., Nazarova L. A. Estimate of the interchamber pillar stability based on the damage accumulation criterion // Journal of Mining Science. 2007, vol. 43, no. 6, pp. 575–584.

5. Мохначев М. П. Усталость горных пород. — М.: Наука, 1979. — 152 с.

6. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696. DOI: 10.2478/s13540-014-0193-1.

7. Шермегор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. — М.: Наука, 1977. — 400 с.

8. Шитикова М. В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2022. — № 1. — С. 3–40. DOI: 10.31857/S0572329921060118.

9. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // Applied Mechanics Reviews. 2010, vol. 63, no. 1, article 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.

10. Mainardi F. Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics / Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. CISM Courses and Lectures No. 78, A. Carpinteri and F. Mainardi, eds., Springer, Wien, NY, 1997, pp. 291–348.

11. Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. Two approaches to aging and fatigue models in viscoelastic solids // AAPP Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. 2019, vol. 97, no. 1. DOI: 10.1478/AAPP.97S1A7.

12. Caputo M., Fabrizio M. Damage and fatigue described by a fractional derivative model // Journal of Computational Physics. 2014, vol. 293, pp. 400–408. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.11.012.

13. Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M. Thermomechanics of damage and fatigue by a phase field model // Journal of Thermal Stresses. 2016, vol. 39, no. 5, pp. 487–499.

14. Лавров А. В., Шкуратник В. Л., Филимонов Ю. Л. Акустоэмиссионный эффект памяти в горных породах. — М.: Изд-во МГГУ, 2004. — 450 с.

15. Belyukov N. L. Studying of the Kaiser effect during modeling of rock loading conditions using the NX-borehole jack // Journal of Physics: Conference Series. 2021, vol. 1945, article 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1945/1/012023.

16. Блохин Д. И., Харченко А. В. Комплексное исследование акустоэмиссионных и термомеханических эффектов в образцах каменной соли при их циклическом деформировании // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2021. — № 4-1. — С. 129–137. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_41_0_129.

17. Miehe C., Hofacker M., Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010, vol. 199, pp. 2765–2778. DOI: 10.1016/j.cma.2010.04.011.

18. Hu S., Baskes M., Stan M. Phase-field modeling of microvoid evolution under elastic-plastic deformation // *Applied Physics Letters*. 2007, vol. 90, no. 8, pp. 1921–1923. DOI: 10.1063/1.2709908.

19. Ohno M., Matsuura K. Quantitative phase-field modeling for two-phase solidification process involving diffusion in the solid // *Acta Materialia*. 2010, vol. 58, no. 17, pp. 5749–5758. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.06.050.

20. Levitas V. I., Ozsoy I. B. Micromechanical modeling of stress-induced phase transformations. Part 1. Thermodynamics and kinetics of coupled interface propagation and reorientation // *International Journal of Plasticity*. 2009, vol. 25, no. 2, pp. 239–280. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.02.004.

21. Voyiadjis G. Z. (ed.). *Handbook of damage mechanics: nano to macro scale for materials and structures*. New York, Springer, 2015, 1579 p.

22. Степанова Л. В., Игонин С. А. Описание рассеянного разрушения: параметр поврежденности Ю. Н. Работнова: Историческая справка, фундаментальные результаты и современное состояние // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. — 2014. — № 3 (114). — С. 97–114.

23. Учайкин В. В. *Метод дробных производных: монография*. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 510 с.

24. Шейнин В. И., Блохин Д. И., Максимович И. Б., Сарана Е. П. Экспериментальное исследование проявлений термомеханических эффектов на линейной и нелинейной стадиях деформирования образцов каменной соли в режиме циклического нагружения // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. — 2016. — № 6. — С. 15–22. DOI: 10.1134/S1062739116061575.

25. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Унгарова Л. Г. Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. — 2018. — № 2. — С. 147–161. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.13.

26. Blokhin D. I., Sheinin V. I. Thermomechanical effects in different geomaterials in limiting behavior of cyclic loading // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2021, vol. 773, no. 1, article 012055. DOI: 10.1088/1755-1315/773/1/012055.

27. Высотин Н. Г., Винников В. А. Опыт построения модели упругого гистерезиса горных пород различных генотипов на основе теории Преисаха // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. — 2023. — № 11. — С. 5–16. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_11_0_5.

28. Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел*. Т. 1. — М.: ИЛ, 1954. — 648 с. **ИИЭ**

REFERENCES

1. Shankar V., Kumar D., and Subrahmanyam Ds. Impact and severity of deep excavations on stress tensors in mining. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 2019, no. 2, pp. 43–48. [In Russ]. DOI: 10.15372/FTPRP120190205.

2. Vasil'ev L. M. and Vasil'ev D. I. Theoretical ground for origination of normal horizontal stresses in rock masses. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 2013, no. 2, pp. 81–90. [In Russ].

3. Gudkov V. M., Katkov G. A. Stability of rock formations. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2008, no. 2, pp. 119–121. [In Russ].

4. Nazarov L. A., Nazarova L. A. Estimate of the interchamber pillar stability based on the damage accumulation criterion. *Journal of Mining Science*. 2007, vol. 43, no. 6, pp. 575–584.

5. Mokhnachev M. P. *Ustalost' gornyx porod* [Fatigue of rocks], Moscow, Nauka, 1979, 152 p.

6. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696. DOI: 10.2478/s13540-014-0193-1.

7. Shermegor T. D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microhogenic medium], Moscow, Nauka, 1977, 400 p.

8. Shitikova M. V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: a review. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2022, no. 1, pp. 3–40. [In Russ]. DOI: 10.31857/S0572329921060118.

9. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*. 2010, vol. 63, no. 1, article 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.
10. Mainardi F. Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. CISM Courses and Lectures No. 78*, A. Carpinteri and F. Mainardi, eds., Springer, Wien, NY, 1997, pp. 291 – 348.
11. Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. Two approaches to aging and fatigue models in viscoelastic solids. *AAPP Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*. 2019, vol. 97, no. 1. DOI: 10.1478/AAPP.97S1A7.
12. Caputo M., Fabrizio M. Damage and fatigue described by a fractional derivative model. *Journal of Computational Physics*. 2014, vol. 293, pp. 400 – 408. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.11.012.
13. Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M. Thermomechanics of damage and fatigue by a phase field model. *Journal of Thermal Stresses*. 2016, vol. 39, no. 5, pp. 487 – 499.
14. Lavrov A. V., Shkuratnik V. L., Filimonov Yu. L. *Akustoemissionnyy effekt pamyati v gornykh porodakh* [Acoustic-emission memory effect in rocks], Moscow, Izd-vo MGGU, 2004, 450 p.
15. Beltyukov N. L. Studying the Kaiser effect during modeling of rock loading conditions using the NX-borehole jack. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021, vol. 1945, article 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1945/1/012023.
16. Blokhin D. I., Kharchenko A. V. Complex study of acoustoemission and thermomechanical effects in samples of rock salt at their cyclic deformation. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2021, no. 4-1, pp. 129 – 137. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_41_0_129.
17. Miehe C., Hofacker M., Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010, vol. 199, pp. 2765 – 2778. DOI: 10.1016/j.cma.2010.04.011.
18. Hu S., Baskes M., Stan M. Phase-field modeling of microvoid evolution under elastic-plastic deformation. *Applied Physics Letters*. 2007, vol. 90, no. 8, pp. 1921 – 1923. DOI: 10.1063/1.2709908.
19. Ohno M., Matsuura K. Quantitative phase-field modeling for two-phase solidification process involving diffusion in the solid. *Acta Materialia*. 2010, vol. 58, no. 17, pp. 5749 – 5758. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.06.050.
20. Levitas V. I., Ozsoy I. B. Micromechanical modeling of stress-induced phase transformations. Part 1. Thermodynamics and kinetics of coupled interface propagation and reorientation. *International Journal of Plasticity*. 2009, vol. 25, no. 2, pp. 239 – 280. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.02.004.
21. Voyiadjis G. Z. (ed.). *Handbook of damage mechanics: nano to macro scale for materials and structures*. New York, Springer, 2015, 1579 p.
22. Stepanova L. V., Igonin S. A. Description of deterioration processes: damage parameter of Y.N. Rabotnov: historical remarks, fundamental results and contemporary state. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2014, no. 3 (114), pp. 97 – 114. [In Russ].
23. Uchaykin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh: monografiya* [The fractional derivative method], Ulyanovsk, Artishok, 2008, 510 p.
24. Sheinin V. I., Blokhin D. I., Maksimovich I. B., Sarana E. P. Experimental research into thermomechanical effects at linear and nonlinear deformation stages in rock salt specimens under cyclic loading. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 2016, no. 6, pp. 15 – 22. [In Russ]. DOI: 10.1134/S1062739116061575.
25. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Ungarova L. G. Mathematical models of nonlinear viscoelasticity with operators of fractional integro-differentiation. *PNRPU Mechanics bulletin*. 2018, no. 2, pp. 147 – 161. [In Russ]. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.13.
26. Blokhin D. I., Sheinin V. I. Thermomechanical effects in different geomaterials in limiting behavior of cyclic loading. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2021, vol. 773, no. 1, article 012055. DOI: 10.1088/1755-1315/773/1/012055.
27. Vysotin N. G., Vinnikov V. A. A case history of modeling elastic hysteresis of different-genotype rocks based on the Preisach model. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2023, no. 11, pp. 5 – 16. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_11_0_5.
28. Nadai A. *Plastichnost' i razrushenie tverdykh tel*. T. 1 [Plasticity and destruction of solids, vol. 1], Moscow, 1954, 648 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Мартынюк Александр Рафаэлевич — канд. техн. наук, доцент, Московский колледж транспорта РУТ (МИИТ), e-mail: marsash1973@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-8917-6752,

Харченко Анна Викторовна — канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова РАН, e-mail: av-kharchenko@yandex.ru, ORCID ID: 0000-0003-3036-6663.

Для контактов: Харченко А.В., e-mail: av-kharchenko@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

A.R. Martyniuk, Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor, Moscow College of Transport (MIIT), 129626, Moscow, Russia, e-mail: marsash1973@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-8917-6752,

A.V. Kharchenko, Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor, Senior Researcher, Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources Russian Academy of Sciences, 111020, Moscow, Russia, e-mail: av-kharchenko@yandex.ru, ORCID ID: 0000-0003-3036-6663.

Corresponding author: A.V. Kharchenko, e-mail: av-kharchenko@yandex.ru.

Получена редакцией 12.07.2024; получена после рецензии 15.08.2024; принята к печати 10.10.2024.
Received by the editors 12.07.2024; received after the review 15.08.2024; accepted for printing 10.10.2024.



НОВИНКИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «ГОРНАЯ КНИГА»



Евтушенко Е.М., Федоров А.В., Великосельский А.В., Буйницкий А.И., Килин Ю.А., Губанов В.А., Карпов А.Н., Макаров А.М., Лапаева О.А., Полещук М.Н., Шивырялкина О.С.

15 лет сотрудничества «СУЭК-Красноярск» и НИИОГР: результаты и перспективы

Год: 2024

Страниц: 112

ISBN: 978-5-98672-581-9

UDK: 622

Представлен материал совещания по обсуждению результатов сотрудничества АО «СУЭК-Красноярск» и НИИОГР по решению задач развития, повышения безопасности и эффективности производства и труда организационными способами.