

## РАСЧЕТ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОЕКТИРУЕМЫХ ШАХТНЫХ СТВОЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Л.Ю. Левин<sup>1</sup>, С.В. Мальцев<sup>1,2</sup>, М.А. Семин<sup>1</sup>, Е.В. Колесов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Горный институт Уральского отделения РАН, Пермь, Россия, e-mail: st.v.maltsev@ya.ru

<sup>2</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

**Аннотация:** Аэродинамические сопротивления стволов шахт являются одними из важнейших параметров вентиляционных сетей шахт и рудников, от правильного задания которых зависит адекватность математических моделей сетевого воздухораспределения. Определение коэффициентов аэродинамического сопротивления проектируемых стволов шахт на сегодняшний день представляет собой серьезную сложность ввиду невозможности проведения прямых натурных измерений и ограниченности существующих теоретических методик, разработанных в середине прошлого века. Последнее связано с тем, что, во-первых, эти методики ориентируются на объем существующих справочных данных, который ограничивается информацией о стволах диаметрами 5–7 м, а во-вторых, имеются очень ограниченные сведения по сопротивлениям тубинговых крепей. В настоящее время зачастую проектируются и строятся шахтные стволы диаметрами от 8 до 10 м в свету. По этой причине для определения коэффициентов аэродинамического сопротивления современных стволов в настоящей работе предложено использовать методы вычислительной гидродинамики (или CFD-методы, Computational Fluid Dynamics modeling). В рамках настоящей работы разработаны трехмерные численные модели клетового и скипового стволов проектируемого рудника с детальной прорисовкой тубинговой крепи и проектного армирования. Расчеты в программном комплексе Ansys Fluent показали, что распределение скорости воздуха в стволе существенно неравномерно из-за влияния жесткой расстрельной армировки. По результатам численного моделирования получено, что коэффициенты аэродинамического сопротивления клетового и скипового стволов с учетом проектного армирования равны соответственно  $0,0202 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$  и  $0,0514 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$ . Предложены мероприятия по уменьшению аэродинамического сопротивления стволов, такие как: изменение взаимного расположения тубинговых колец, применение бетонной крепи, изменение формы расстрелов, применение гибкой канатной армировки. Проведен сравнительный анализ эффективности предложенных мероприятий и в результате принят вариант армирования ствола, при котором коэффициенты аэродинамического сопротивления клетового и скипового стволов снижаются на 34 и 44% соответственно. Сделан вывод о применимости CFD-методов для определения аэродинамических сопротивлений нетиповых стволов с учетом различных схем армирования.

**Ключевые слова:** вентиляционная сеть, трехмерная математическая модель, граничные условия, шахтный ствол, типы крепления, типы армирования, аэродинамические процессы в стволах, коэффициент аэродинамического сопротивления.

**Благодарность:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проекты № 122030100425-6 и 124020500030-7).

**Для цитирования:** Левин Л. Ю., Мальцев С. В., Семин М. А., Колесов Е. В. Расчет аэродинамического сопротивления проектируемых шахтных стволов с использованием методов вычислительной гидродинамики // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2025. – № 5. – С. 100–117. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2025\_5\_0\_100.

---

## Aerodynamic drag design for project mine shafts using methods of computational fluid dynamics

L.Y. Levin<sup>1</sup>, S.V. Maltsev<sup>1,2</sup>, M.A. Semin<sup>1</sup>, E.V. Kolesov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia, e-mail: st.v.maltsev@ya.ru

<sup>2</sup> Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

---

**Abstract:** The aerodynamic drags in mine shafts are one of the critical parameters of ventilation networks in underground mines. Correct setting of aerodynamic drags defines accuracy of mathematical models of air distribution in mine ventilation networks. It is really difficult to determine the aerodynamic drag factors for the project mine shafts today because of the impossibility of direct full-scale measurements and due to the limited nature of the existing theoretical procedures developed in the mid-1900s. The latter is connected with the fact that, first, these procedures orient by the available reference data limited to the information on mine shafts 5–7 m in diameter, and, second, there is a very little knowledge on drags in shaft with tubing supports. Mine shafts being designed and constructed presently have an internal diameter from 8 to 10 m. For this reason, to determine the aerodynamic drag factors for the modern mine shafts, this article proposes to use the methods of computational fluid dynamics (CFD-modeling). Within the framework of the present study, 3D numerical models were developed for the cage and skip shafts of a project mine, with comprehensive picking of tubing support and project reinforcement. The calculations in Ansys Fluent show that air velocity distribution in a shaft is greatly nonuniform because of the influence of rigid reinforcement spacers. The numerical modeling yields that the aerodynamic drag factors in the cage and skip shafts, with regard to the project reinforcement, equal  $0.0202 \text{ N}\cdot\text{c}^2/\text{m}^4$  and  $0.0514 \text{ N}\cdot\text{c}^2/\text{m}^4$ , respectively. The article proposes arrangements aimed at reducing the aerodynamic drags in the shafts, namely: realignment of tubing rings, use of concrete lining, reshaping of spacers, application of flexible rope bolting. The comparative analysis of the efficiency of the proposed measures is performed, and the eventually accepted variant of the mine shaft reinforcement allows the decrease in the aerodynamic drag factors by 34 and 44% in the cage and skip shafts, respectively. The inference is deduced on the applicability of CFD-modeling for determining the aerodynamic drags in non-standard mine shafts with regard to various reinforcement schemes.

**Key words:** ventilation network, 3D mathematical model, boundary conditions, mine shaft, types of support, types of reinforcement, aerodynamic processes in shafts, aerodynamic drag factor.

**Acknowledgements:** The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state contract, Projects Nos. 122030100425-6 and 124020500030-7.

**For citation:** Levin L. Y., Maltsev S. V., Semin M. A., Kolesov E. V. Aerodynamic drag design for project mine shafts using methods of computational fluid dynamics. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2025;(5):100-117. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2025\_5\_0\_100.

---

## Введение

В последние десятилетия основой для проектирования системы вентиляции подземного рудника является разработка детализированной математической модели вентиляционной сети. Как показывает практика, от результатов моделирования зависят технические решения по геометрии и количеству горных выработок, а также параметры вентиляционного оборудования. Важно отметить, что каждая модель включает в себя топологию горных выработок (каркас вентиляционной сети) и их параметры (длина, сечение, аэродинамическое сопротивление).

Одним из важнейших элементов системы вентиляции рудника при разработке модели вентиляционной сети являются шахтные стволы, поскольку основная часть депрессии (50 – 80%), создаваемой главной вентиляторной установкой (ГВУ), расходуется на преодоление воздухом именно стволов [1, 2], поэтому от точности определения их аэродинамического сопротивления зависит выбор рабочей точки главной вентиляторной установки. Величина аэродинамического сопротивления шахтных стволов зависит от величины шероховатости поверхности крепи, конфигурации элементов армировки, расположенных в сечении ствола, а также подъемных сосудов, перемещающихся по стволам.

Многочисленные опыты в натуральных и лабораторных условиях по определению коэффициентов аэродинамического сопротивления стволов проведены в Московском и Ленинградском горных институтах. В Московском горном институте исследованиями занимались А.А. Скочинский, А.И. Ксенофонтова, А.А. Харев и И.Е. Идельчик. В Ленинградском горном институте исследования вели В.Б. Комаров и П.И. Мустель.

Первые опыты по определению влияния элементов армировки на участке

аэродинамической трубы на величину аэродинамического сопротивления ствола проведены А.А. Скочинским и В.Б. Комаровым в 1927 г. Далее, в 1938 г. по результатам экспериментальных исследований в лаборатории рудничной вентиляции Ленинградского горного института подготовлена первая справочная таблица коэффициентов аэродинамического сопротивления стволов [3].

Начиная с 1950 г., А.И. Ксенофонтовой и другими учеными выполнены исследования и издана монография [4] по определению аэродинамических сопротивлений стволов угольных шахт на кафедре рудничной вентиляции Московского горного института. В [4] описаны результаты разработки физических моделей стволов, подобных существующим шахтным стволам, на которых проведены лабораторные исследования и определены коэффициенты аэродинамического сопротивления модельных стволов для разных типов армирования. В середине 1970-х гг. вышел справочник по рудничной вентиляции под редакцией К.З. Ушакова, в котором представлены таблицы коэффициентов аэродинамического сопротивления стволов на основе типовых проектов «Южгипрошахт» и «Кривбасспроекта» [24].

С середины 70-х до 90-х годов прошлого столетия вопросом экспериментального определения аэродинамического сопротивления стволов калийных, гипсовых и бокситовых рудников занимался Н.Н. Мохирев [1].

С начала XXI в. тематикой определения аэродинамических сопротивлений шахтных стволов полиметаллических и калийных рудников активно занимаются специалисты Горного института УрО РАН. Обобщенные результаты экспериментальных исследований по определению коэффициента аэродинамического сопротивления стволов приведены в работе [5].

За рубежом в работах М.Д. McPherson приведены коэффициенты аэродинамического сопротивления шахтных стволов, полученные опытным путем [6, 7]. Эти работы преимущественно посвящены снижению аэродинамического сопротивления стволов за счет изменения формы расстрелов.

Важно отметить, что наиболее распространенными стволами, для которых определены коэффициенты аэродинамического сопротивления, являются стволы диаметром 5–7 м, поэтому в справочниках по рудничной вентиляции представлены коэффициенты аэродинамического сопротивления для данного типа стволов.

По результатам лабораторных и натурных исследований для данных типов стволов в работах А.А. Скочинского, В.Д. Карпухина и П.И. Мустеля выведены аналитические зависимости, которые позволяют рассчитывать коэффициенты аэродинамического сопротивления стволов с бетонной крепью. При этом многообразие вариантов крепления и армирования не позволяет однозначно классифицировать стволы по величине аэродинамического сопротивления, поэтому они должны определяться индивидуально для каждого из них.

В последнее время новой тенденцией на горнодобывающих предприятиях является проектирование стволов большого сечения, до 78,5 м<sup>2</sup> (диаметр в свету 8–10 м). В связи с тем, что большинство существующих справочников и источников научно-технической литературы ограничивается значением диаметра 7 м, для проектирования стволов большого сечения требуется разработка нового метода исследований. При этом в связи с отсутствием коэффициентов аэродинамического сопротивления для стволов большого сечения проектировщики принимают ближайшие справочные коэффициенты из существующих

пособий, не оценивая величину ошибки и не закладывая запас.

Существующие подходы к решению задачи определения аэродинамических сопротивлений стволов позволяют применить коэффициенты из справочников или использовать аналитические зависимости, выведенные в 1960-е–80-е годы, для рассмотренных типов стволов. Важно отметить, что за последние 40 лет технические требования, а также схемы крепления и армирования на регулярной основе претерпевали изменения. В настоящее время при проектировании новых рудников количество шахтных стволов минимизируется, как следствие, это влияет на размещение дополнительного оборудования в сечении ствола.

Таким образом, для стволов большого сечения необходим универсальный подход к решению задачи определения их аэродинамических сопротивлений, который учитывает разнообразие схем армирования, крепления, расположения лестничного и ходового отделений, труб и кабелей. Такой подход позволит точно, без лишнего запаса в большую или меньшую сторону, определять параметры вентиляционного оборудования и требования к строительным конструкциям поверхностного комплекса ГВУ, а также рассматривать варианты их оптимизации.

Существующие подходы к расчету параметров проветривания горных выработок можно условно разделить на три группы в зависимости от пространственной размерности математических моделей, на основе которых проводятся расчеты. В зависимости от особенностей решаемой задачи модели аэрологических процессов бывают одно-, двух- и трехмерные. Одномерные модели обычно используются для решения задач на вентиляционных сетях рудников [8]. Двумерные модели используются редко, в основном в тех случаях, когда не хватает мощности компьютера

для проведения трехмерного моделирования. Трехмерные модели разрабатываются для исследования физических процессов на локальных участках горных выработок сети, где существенным образом выражена неравномерность воздушного потока по сечению [9].

Для моделирования течения воздушных потоков в стволах, калориферных и вентиляционных каналах, выработках большого сечения в последнее десятилетие также разрабатываются трехмерные модели на основе CFD-методов. Данные методы позволяют исследовать динамику неоднородно распределенных характеристик воздушных потоков: пыли, горючих и ядовитых газов, распространение ударных волн и развитие пожаров [10–12]. CFD-методы включают в себя совокупность математических моделей и численных методов, используемых для расчета характеристик потоков жидкостей и газов на основе численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих физику потоков жидкостей и газов, их взаимодействие с твердыми телами.

В подавляющем большинстве случаев течение воздуха в горных выработках происходит в режиме развитой турбулентности, а потому при решении задач аэрологии с использованием CFD-технологии важным аспектом является выбор модели турбулентности. В настоящее время можно выделить четыре основных подхода к моделированию турбулентных течений воздуха [13]: прямое численное моделирование (DNS), метод крупных вихрей (LES), метод отсоединенных вихрей (DES) и метод, основанный на осреднении по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS). Разные подходы дают различную детализацию турбулентных течений воздуха в рассматриваемой системе, а также требуют разных вычислительных мощностей.

В последние годы CFD-моделирование активно применяется при решении таких задач рудничной вентиляции, как определение закономерностей тепло-массообмена в тупиковых забоях [14], определение потерь давления на сложных местных и лобовых сопротивлениях [15, 16]. При этом CFD-методы имеют нераскрытый потенциал применения и в других классах задач рудничной вентиляции. Например, в задачах по определению аэродинамических сопротивлений проточных областей сложной геометрической формы. В частности, такой задачей является определение аэродинамических сопротивлений проектируемых стволов шахт. Вопрос применения CFD-методов для данной задачи рассматривался в отдельных частных случаях [17], в то время как систематического изучения вопроса не проводилось.

По данной причине целью настоящей работы является исследование особенностей распределения воздушных потоков в шахтных стволах произвольного типа в трехмерной постановке с детальным учетом оборудования ствола. Исследование проводится на примере двух проектируемых шахтных стволов в Якутии. Практическая значимость такого исследования заключается в совершенствовании методов расчета аэродинамических сопротивлений проектируемых шахтных стволов, что является крайне важным при разработке корректных математических моделей шахтных вентиляционных сетей.

### **Исходные данные для трехмерной математической модели**

В настоящее время построение трехмерных математических моделей горных выработок производится в следующих программных CFD-пакетах: Ansys Fluent, Ansys CFX, SolidWorks и др. [18–20]. Разработка точной трехмерной

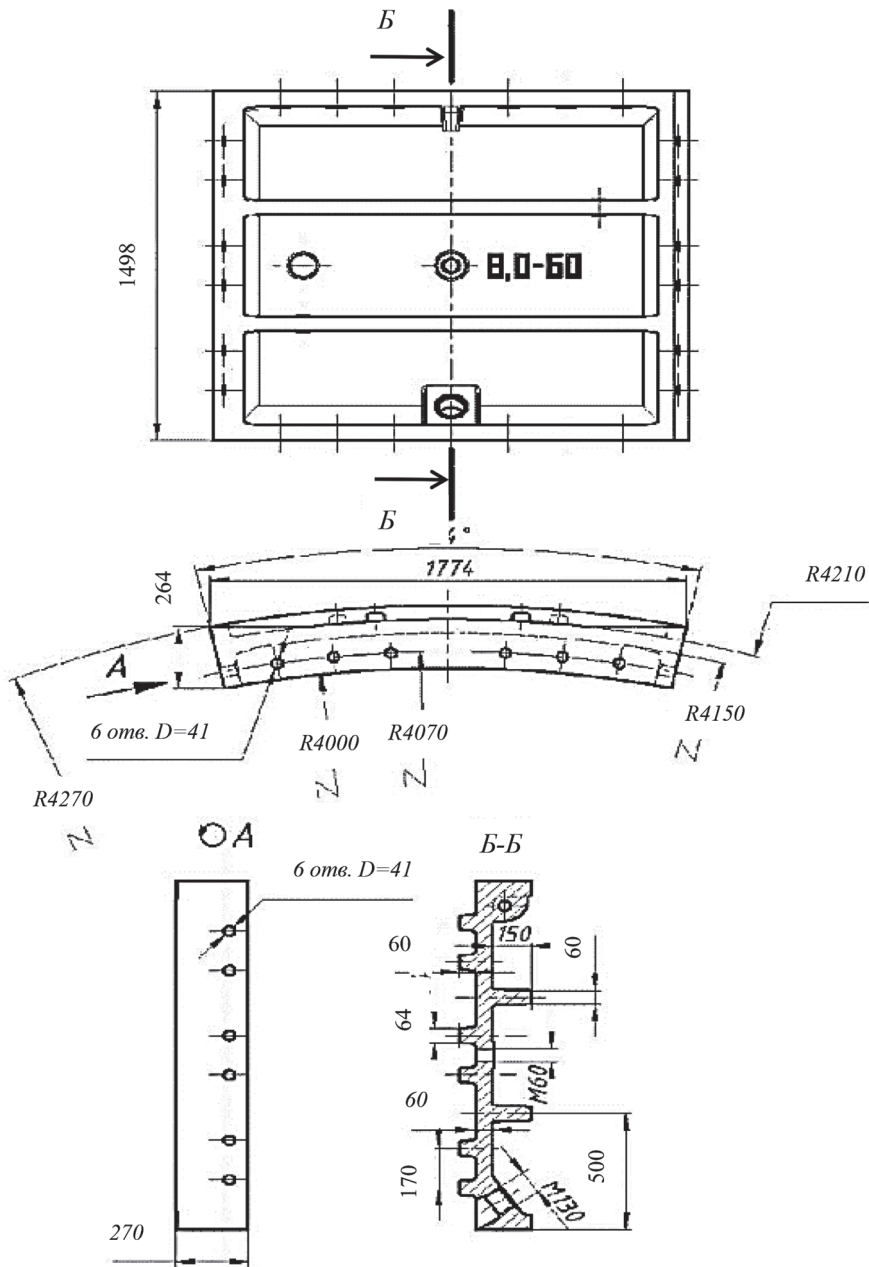


Рис. 1. Конструктивные параметры тубинга типа «8.0-60»  
 Fig. 1. Design parameters of tubing type «8.0-60»

математической модели для учета аэродинамических процессов в шахтном стволе осуществляется при наличии следующих исходных данных:

- геометрические параметры ствола (длина, сечение, отметки сопряжения ствола с подземными горизонтами или каналами);

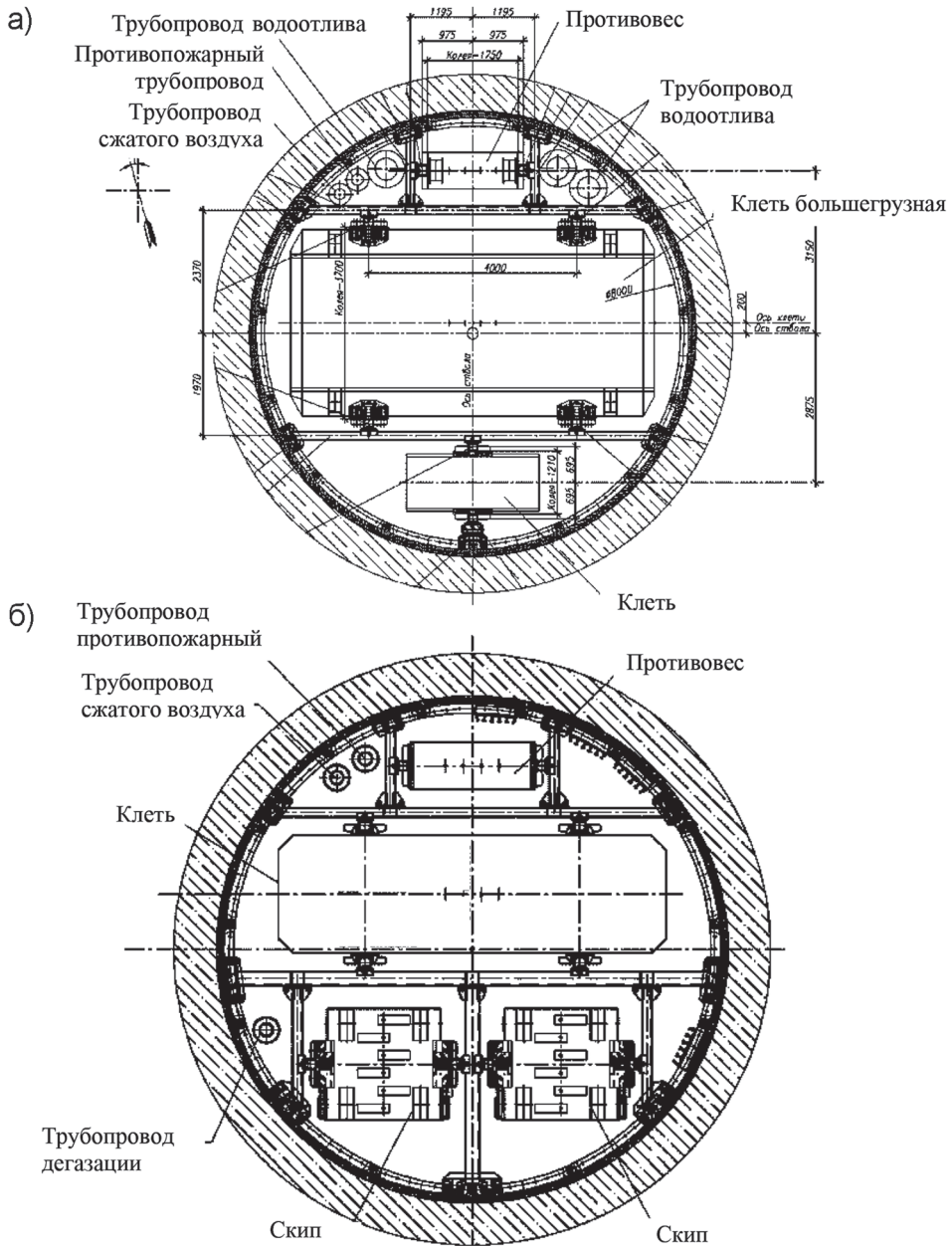


Рис. 2. Разрез клетового (а) и скипового (б) стволов (диаметр каждого 8 м)

Fig. 2. Section of the cage (a) and skip (b) shafts (each diameter is 8 m)

- тип крепления;
- схема армирования (конфигурация и расположение расстрелов, проводников, лестничного отделения, трубопроводов и кабелей).

При добавлении в модель бетонной крепи необходимым условием является задание шероховатости поверхности. Использование тубинговой крепи накладывает дополнительное требование

по детализации ее прорисовки, а именно необходимость учета следующих величин, согласно ГОСТ Р 57054-2016: ширины тьюбинга, длины тьюбинга по внешней хорде, наружного и внутреннего диаметров тьюбинга, диаметра крепежных отверстий, количества крепежных отверстий, толщины спинки тьюбинга.

Схема армирования должна включать все габаритные размеры балок, расстрелов и оборудования, расположенного в стволе.

В данной работе представлены результаты построения модели клетового и скипового стволов диаметром в свету 8 м, проектируемых для одного из рудников Якутии. Крепление обоих стволов комбинированное, то есть присутствуют чугунные тьюбинги и бетон, армировка — жесткая. При этом тьюбинги рассматриваются разного типа: «8.0–40», «8.0–60», «8.0–80», «8.0–90», «8.0–100», «8.0–60К». В качестве примера на рис. 1 представлены основные конструктивные параметры для тьюбинга типа «8.0–60», которые задавались при построении трехмерной математической модели ствола.

На рис. 2 представлены разрезы клетового и скипового стволов, на которых изображено внутреннее оборудование: расстрелы, проводники, подъемные сосуды, противовесы, трубопроводы.

### Разработка и верификация модели

Движение воздушных и газовых потоков в шахтных стволах протекает в турбулентном режиме. Задача моделирования движения воздушных потоков в горных выработках заключается в решении основных уравнений гидрогазодинамики, которые выражают фундаментальные физические принципы динамики жидкости и газа: законы сохранения массы, импульса и энергии.

Для решения настоящей задачи принят метод RANS, основанный на реше-

нии уравнений Рейнольдса. Данный метод в связи с внушительными размерами моделей лучше всего подходит для решения задач рудничной вентиляции по критерию оптимизации вычислительных мощностей и временных затрат. Уравнения Рейнольдса являются системой уравнений переноса для средних значений параметров турбулентного потока, подверженных случайным пульсациям.

Используемая в работе модель *realizable k-ε* является наиболее подходящей для моделирования течений воздуха в стволах согласно обзору моделей и методов расчета аэрогазодинамических процессов в подземных горных выработках.

В модели *realizable k-ε* для расчета турбулентной вязкости применяется формула Колмогорова–Прандтля:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (1)$$

а уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \quad (2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon u_j) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \rho C_1 S \varepsilon - \frac{\rho C_2 \varepsilon^2}{k + \sqrt{\varepsilon \nu}} \quad (3)$$

где  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ ;  $G_k = \mu_t S^2$  — слагаемое, отвечающее за генерацию кинетической энергии турбулентности за счет градиентов средней скорости;  $\sigma_k = 1,0$  и  $\sigma_\varepsilon = 1,2$  — турбулентные числа Прандтля для  $k$  и  $\varepsilon$  соответственно;  $S_k$  и  $S_\varepsilon$  —



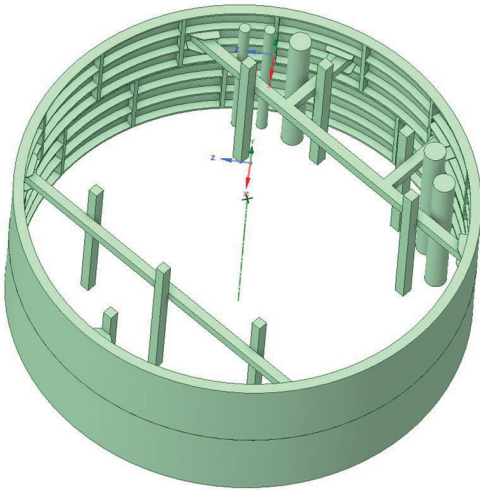


Рис. 3. Участок расчетной области клетового ствола с тубинговым креплением, армированием и трубопроводами

Fig. 3. Section of the calculation area of the cage shaft with tubing fastening, reinforcement and pipelines

источниковые члены для  $k$  и  $\varepsilon$  соответственно;

$$C_1 = \max \left[ 0,43; \frac{\eta}{\eta + 5} \right], C_2 = 1,9 -$$

константы модели;  $\eta = S(k/\varepsilon)$ ;  $v$ ,  $u$  — вертикальная и горизонтальная компоненты скорости основного потока;

$$C_\mu = \frac{1}{4,04 + \sqrt{6} \cos \varphi} \frac{kU}{\varepsilon}.$$

Следующим этапом необходимо на всех поверхностях расчетной области задать соответствующие физическому процессу граничные условия. Предварительные вычисления в пределах расчетной области выполнены с тубингами без армирования и трубопроводами для исследования сеточной сходимости, влияния шероховатости поверхности и плотности воздуха на аэродинамическое сопротивление стволов. Исходные данные и параметры моделирования приняты следующие:

- диаметр стволов — 8 м;
- длина расчетной области — 136 м;
- базовая плотность воздуха — 1,225 кг/м<sup>3</sup>;
- плотность воздушного потока может меняться вследствие изменения температуры и абсолютного давления воздуха;
- средняя скорость воздуха на входе в расчетную область — 15 м/с;
- на выходе из расчетной области — условие нулевого статического давления;

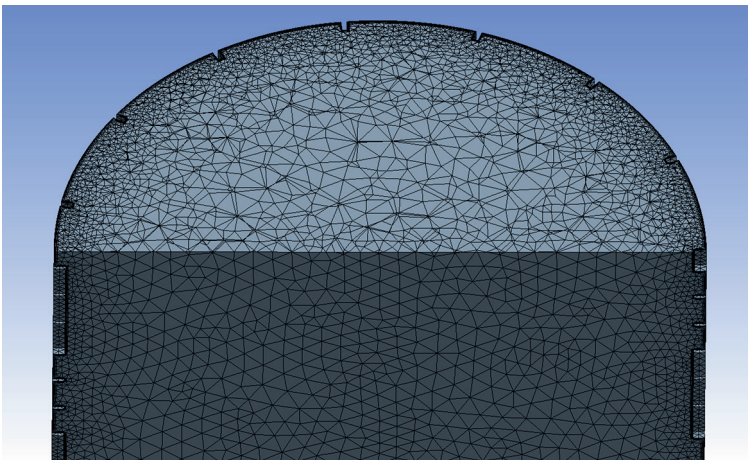


Рис. 4. Участок расчетной области, разбитой на контрольные объемы

Fig. 4. Section of the computational domain divided into control volumes

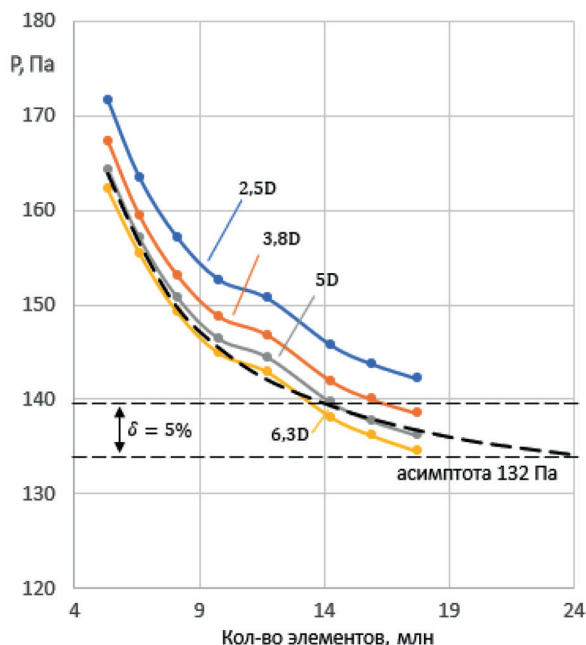


Рис. 5. Перепад давления в расчетной области в зависимости от количества элементов  
 Fig. 5. Pressure drop in the computational domain depending on the number of elements

- при задании пограничного слоя использованы масштабируемые пристеночные функции.

На рис. 3 представлена геометрия участка ствола с учетом тубинговой крепи, расстрелов, направляющих и трубопроводов.

Далее проводилась дискретизация расчетной области: внутри задавалась тетраэдрическая сетка, а на стенках — призматический пограничный слой. На рис. 4 представлен продольный срез участка расчетной области, разбитой на контрольные объемы.

Далее для определения оптимального количества элементов расчетной сетки проводилось исследование сеточной сходимости. Процедура исследования сеточной сходимости проводилась путем определения ключевых характеристик исследуемого течения, отражающих корректность получаемого решения.

В данной работе проведено исследование сеточной сходимости на осно-

вании сравнения перепада давлений на входе и выходе из расчетной области (рис. 5).

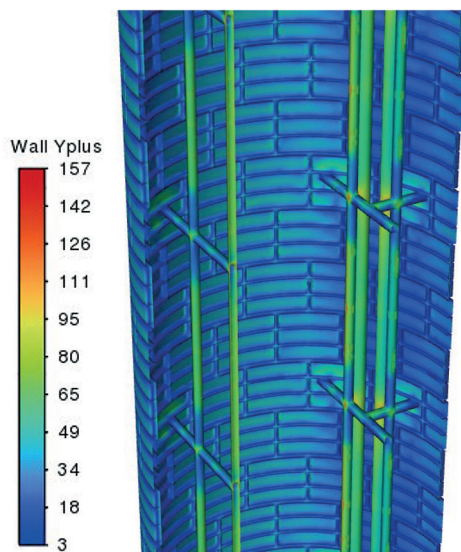


Рис. 6. Распределение параметра  $Y^+$  на твердых поверхностях

Fig. 6. Distribution of the  $Y^+$  parameter on solid surfaces

Таким образом, по результатам предварительного моделирования установлены параметры расчетной сетки, при которых дальнейшее измельчение сетки не приведет к существенному уточнению результатов вычислений (<5% для перепада давления и <3% для максимальной скорости в сечении ствола): размер элемента 0,25 м для внутренней части расчетной области и 0,08 м для пристеночной области. Расчетная сетка состоит из 14,3 млн элементов (контрольных объемов).

Одним из главных критериев, определяющих качество расчетной сетки, является параметр  $Y^+$ , представляющий собой безразмерное расстояние от стенки до первого элемента.

Распределение параметра  $Y^+$  на твердых поверхностях скипо-клетевого ствола приведено на рис. 6. Для призматического пограничного слоя в разработанной модели установлены следующие параметры: высота первого пристеночного подслоя составляет 0,005 м, количество подслоев — 6. Величина параметра  $Y^+$  лежит в требуемых пределах от 0 до 300. Этот диапазон  $Y^+$  допустим при использовании масштабируемых пристеночных функций. Таким образом, качество сетки является приемлемым по этому критерию.

### **Определение величины аэродинамического сопротивления**

Следующим этапом исследования является определение коэффициента аэродинамического сопротивления шахтных стволов. Определение аэродинамического сопротивления ствола производилось по вычисленному перепаду давлений не на всей длине расчетной области, а на выбранном расчетном участке, ограниченном начальным и конечным поперечными сечениями ствола. Для выравнивания потока воздуха от точки входа

до начального сечения расчетного участка отступили 8,5 диаметров ствола (зона гидродинамической стабилизации потока). Данная величина определена по зависимости, представленной в работе [21]. Положение конечного сечения рабочего участка определялось по результатам предварительного моделирования и составило 8 м от выхода из расчетной области.

Кроме того, в работе [21] представлена экспериментальная методика определения аэродинамического сопротивления шахтных стволов. При моделировании аэродинамических процессов в шахтных стволах подходы к расчету коэффициента аэродинамического сопротивления остаются аналогичными экспериментальным.

Известно, что движение воздуха в шахтных стволах описывается уравнением

$$H = R \cdot Q^2, \quad (4)$$

где  $H$  — депрессия (перепад приведенного давления) на линейном участке ствола, Па;  $R$  — аэродинамическое сопротивление ствола на данном участке,  $H \cdot c^2 / m^8$ ;  $Q$  — расход воздуха на данном участке,  $m^3/c$ .

Для расчета аэродинамического сопротивления горных выработок используется формула

$$R = \alpha \cdot \frac{P \cdot L}{S^3}, \quad (5)$$

где  $P$  — периметр выработки, м;  $L$  — длина выработки, м;  $S$  — сечение выработки,  $m^2$ ;  $\alpha$  — коэффициент аэродинамического сопротивления выработки,  $H \cdot c^2 / m^4$ .

Важно отметить, что в большинстве справочников рудничной вентиляции табличные значения коэффициентов аэродинамического сопротивления приводятся к «стандартной» плотности 1,2  $kg/m^3$  [7, 22]. Поэтому истинный коэффици-

ент аэродинамического сопротивления  $\alpha$  связан с приведенным  $\alpha_{\text{прив}}$  следующим соотношением:

$$\alpha = \alpha_{\text{прив}} \cdot \frac{\rho}{1,2}, \quad (6)$$

где  $\rho$  — плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>. Таким образом, формула (5) в терминах приведенного коэффициента аэродинамического сопротивления будет иметь вид

$$R = \alpha_{\text{прив}} \cdot \frac{P \cdot L}{S^3} \cdot \frac{\rho}{1,2}. \quad (7)$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления трения сам является функцией плотности воздуха, а также безразмерной шероховатости выработки  $\varepsilon$ , в условиях турбулентного потока не зависящей от плотности и скорости воздуха [6]:

$$\alpha = \frac{\varepsilon \cdot \rho}{2}, \quad (8)$$

при этом для приведенного коэффициента аэродинамического сопротивления соотношение (8) имеет вид

$$\alpha_{\text{прив}} = \frac{\varepsilon \cdot 1,2}{2} = 0,6 \cdot \varepsilon. \quad (9)$$

При увеличении глубины отработки повышаются давление и температура воздуха, вследствие этого плотность воздуха также возрастает, что приводит к увеличению аэродинамического сопротивления ствола. На основании экспериментальных исследований [21], плотность воздуха при увеличении глубины ствола на 1000 м увеличивается на 10% (для разных рудников эта величина может различаться). Таким образом, согласно формуле (6), можно сказать, что при увеличении глубины на 1000 м коэффициент аэродинамического сопротивления также изменится на 10%. При моделировании схем проветривания новых рудников следует учитывать данный факт, в противном случае на двух стволах можно допустить существенную по-

грешность в величине аэродинамического сопротивления и неправильно подбирать параметры главных вентиляторных установок.

### **Результаты трехмерного моделирования и расчета коэффициентов аэродинамического сопротивления шахтных стволов**

Моделирование аэродинамических процессов в стволах выполнено для скипового и клетового стволов с учетом проектного армирования. При моделировании установлено, что поле скоростей воздушного потока неоднородно по сечению ствола, максимальная скорость наблюдается в центральной части (см. рис. 7). Скорость воздуха в сечении ствола изменяется в пределах от 7,4 до 23,6 м/с, при этом на входе в расчетную область задается средняя скорость воздуха 15 м/с. Данный факт указывает на то, что жесткая расстрельная армировка существенным образом влияет на неравномерность скорости движения воздуха в сечении (разрезе) ствола.

По результатам моделирования получено, что коэффициент аэродинамического сопротивления клетового и скипового стволов с учетом проектного армирования равен 0,0202 и 0,0514 Н·с<sup>2</sup>/м<sup>4</sup> соответственно. Данный результат показывает, что разнообразные схемы армирования, на примере клетового и скипового стволов (см. рис. 2), существенно образом влияют на величину аэродинамического сопротивления.

Если принять такие коэффициенты аэродинамического сопротивления для рассматриваемых клетового и скипового стволов и рассчитать потери давления на стволах при средней скорости воздушного потока 15 м/с и длине стволов 1500 м, то получатся величины 3400 и 8670 Па соответственно (при условии движения всего объема воздуха по ство-

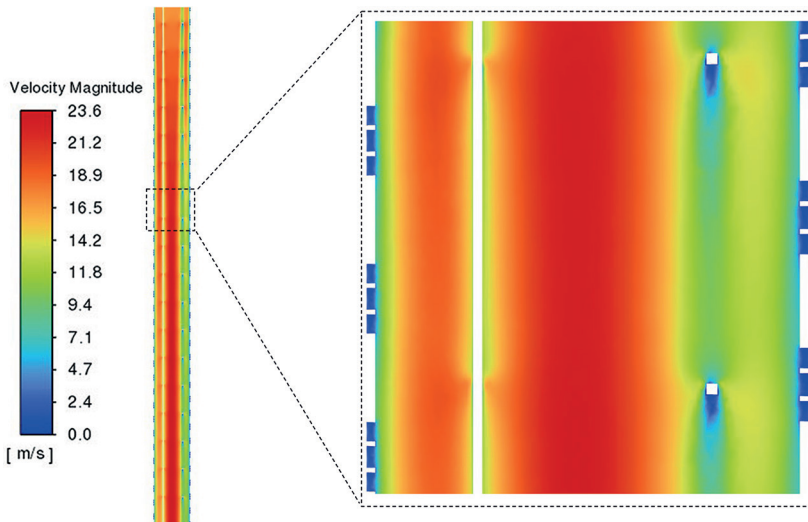


Рис. 7. Распределение скорости воздушного потока в центральном продольном сечении клетового ствола

Fig. 7. Air flow velocity distribution in the central longitudinal section of the cage shaft

лу). В условиях рассматриваемого рудника клетовой и скиповой стволы сопрягались с горизонтами, за счет которых количество воздуха в стволе было переменным. По результатам расчетов, потеря давления на клетовом и скиповом стволах составила 2065 и 4864 Па соответственно. Напор проектируемой главной вентиляционной установки достигает 9876 Па, что соответствует режиму работы современных осевых вен-

тиляторных установок. Рассчитанные депрессии оказываются очень большими. В целом это соответствует существующим в литературе представлениям о том, что потеря давления на стволах может достигать более 70% от напора главной вентиляционной установки. По данной причине уже на стадии проектирования стволов важно рассмотреть варианты оптимизации крепи и армирования ствола.

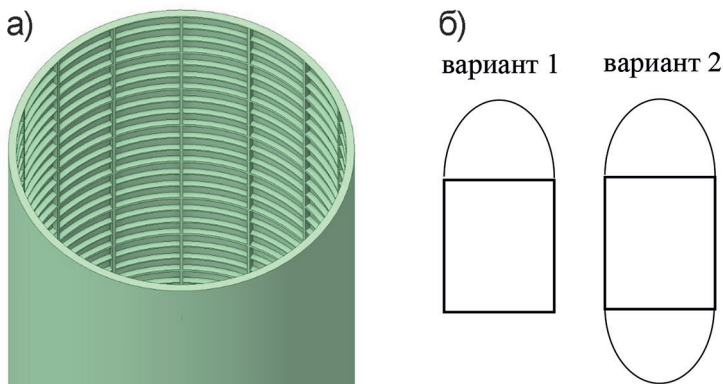


Рис. 8. Оптимизационные варианты: взаимное расположение тубингов (а); установка обтекателей на расстрелы (б)

Fig. 8. Optimization options: relative position of the tubes (a); installation of fairings on the firing (b)

**Коэффициент аэродинамического сопротивления по результатам трехмерного  
Aerodynamic drag coefficient based on 3D modeling results**

Элемент ствола	$\alpha_{\text{крепь}}, \text{H} \cdot \text{c}^2 / \text{M}^4$	$\alpha_{\text{армир}}, \text{H} \cdot \text{c}^2 / \text{M}^4$
Тюбинги 8.0–40	0,0125	—
Тюбинги 8.0–60	0,0103	—
Тюбинги 8.0–80	0,0084	—
Тюбинги 8.0–90	0,0078	—
Тюбинги 8.0–100	0,0074	—
Клетевой ствол, тюбинги с учетом проектного распределения	0,0089	—
Скиповой ствол, тюбинги с учетом проектного распределения	0,0088	—
Клетевой ствол, жесткая расстрельная армировка (проект)	—	0,0113
Клетевой ствол, жесткая расстрельная армировка (вариант 1*)	—	0,0057
Клетевой ствол, жесткая расстрельная армировка (вариант 2*)	—	0,0044
Клетевой ствол, жесткая расстрельная армировка, удвоенный шаг армирования	—	0,0073
Скиповой ствол, жесткая расстрельная армировка (проект)	—	0,0426
Скиповой ствол, жесткая расстрельная армировка (вариант 1*)	—	0,0252
Скиповой ствол, жесткая расстрельная армировка (вариант 2*)	—	0,0200
Скиповой ствол, жесткая расстрельная армировка, удвоенный шаг армирования	—	0,0290

\* Варианты 1 и 2 приняты в соответствии с рис. 8, б.

В представленной работе рассмотрены возможные оптимизационные варианты применительно к исследуемому руднику:

- изменение взаимного расположения тюбинговых колец (рис. 8, а);
- применение бетонной крепи [23];
- изменение формы расстрелов (рис. 8, б);
- применение гибкой канатной армировки.

Результаты трехмерного численного моделирования по определению коэффициента аэродинамического сопротивления клетевого и скипового стволов, а также оптимизации параметров представлены в таблице.

Далее для определения полного коэффициента аэродинамического сопротивления клетевого и скипового ство-

лов можно выполнить суммирование каждого из факторов и определить оптимальный вариант:

$$\alpha_{\text{полн}} = \alpha_{\text{крепь}} + \alpha_{\text{армир}} \quad (10)$$

Результаты данной работы показывают, что оптимальным вариантом для стволов является установка обтекателей с двух сторон на расстрелы. Данный вариант позволяет уменьшить величину аэродинамического сопротивления клетевого и скипового стволов на 34 и 44% соответственно относительно проектного варианта.

Таким образом, методы трехмерного численного моделирования позволяют определять аэродинамические сопротивления нетиповых стволов, а также разрабатывать мероприятия по снижению величины сопротивления стволов.

## Выводы

Данная работа является продолжением цикла экспериментальных исследований по определению коэффициентов аэродинамического сопротивления шахтных стволов.

Разработан подход, позволяющий рассчитывать величину аэродинамического сопротивления шахтных стволов произвольного диаметра, независимо от сечения и вида армирования. Данный подход может применяться для проектируемых и эксплуатируемых шахтных стволов в части уменьшения величины лобовых сопротивлений креплением и элементами армирования.

В рамках данного подхода разработаны трехмерные численные модели аэродинамических процессов в клетевом и скиповом стволах. Модели предназначены для определения аэродинамических сопротивлений шахтных стволов. При моделировании стволов необходимо учитывать тот факт, что при увеличении глубины отработки повышаются давление и температура воздуха, вследствие этого плотность воздуха возрастает, что приводит к увеличению аэродинамического сопротивления ствола. Например, при увеличении глубины ствола на 1000 м плотность увеличивается

на 10% (для разных рудников эта величина может различаться). Таким образом, при увеличении глубины на 1000 м коэффициент аэродинамического сопротивления также изменится на 10%.

По результатам моделирования установлено, что поле скоростей воздушного потока неоднородно по сечению стволов. Рекомендуется учитывать данный факт при выборе схем и типов армирования, а также расположения внутренних коммуникаций.

Рассчитаны проектные коэффициенты аэродинамического сопротивления клетевого и скипового стволов, 0,0202 и 0,0514 Н·с<sup>2</sup>/м<sup>4</sup> соответственно. Результаты моделирования вариантов по снижению коэффициентов аэродинамического сопротивления стволов позволяют сделать вывод, что оптимальным вариантом является установка обтекателей с двух сторон на расстрелы. Данный вариант позволяет уменьшить величину аэродинамического сопротивления клетевого и скипового стволов на 34 и 44% соответственно относительно проектного варианта. Полученные коэффициенты аэродинамического сопротивления использованы при разработке математических моделей вентиляционной сети проектируемого рудника.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мохирев Н. Н., Радько В. В. Инженерные расчеты вентиляции шахт. Строительство. Реконструкция. Эксплуатация. — М.: Недра, 2007. — 327 с.
2. Круглов Ю. В. Моделирование систем оптимального управления воздухораспределением в вентиляционных сетях подземных рудников. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. — Пермь, 2006. — 20 с.
3. Мустель П. И. Определение коэффициентов вентиляционного сопротивления круглых шахтных стволов // Записки Горного института. — 1959. — Т. 1. — С. 8—25.
4. Скочинский А. А., Ксенофонтова А. И., Харев А. А., Идельчик И. Е. Аэродинамическое сопротивление шахтных стволов и способы его снижения. — М.: Углетехиздат, 1953. — 363 с.
5. Мальцев С. В., Семин М. А., Кормщиков Д. С. Метод определения коэффициентов аэродинамического сопротивления шахтных стволов медно-никелевых рудников // ФТПРПИ. — 2020. — № 6. — С. 170—178.
6. McPherson M. J. The resistance to airflow of mine shafts / Trans. 3rd US Mine Ventilation Symposium, Penn, 1987, pp. 465—477.

7. McPherson M. J. Subsurface ventilation and environmental engineering. Chapman & Hall, 2009, 824 p.

8. Пересторонин М. О., Паршаков О. С., Попов М. Д. Параметризация модели вентиляционной сети при анализе аварийных режимов проветривания систем горных выработок // Горные науки и технологии. — 2023. — Т. 8. — № 2. — С. 150–161.

9. Liu M., Zhu C., Zhang H., Zheng W., You S., Campana P. E., Yan J. The environment and energy consumption of a subway tunnel by the influence of piston wind // Applied Energy. 2019, vol. 246, pp. 11–23.

10. Кобылкин С. С., Ушаков В. К., Кузнецов И. И. Анализ местных сопротивлений горных выработок на общешахтное аэродинамическое сопротивление // Горная промышленность. — 2024. — Т. 2. — С. 93–96. DOI: 10.30686/1609-9192-2024-2-93-96.

11. Кобылкин С. С., Кузнецов И. И., Федоров Д. А., Кобылкин А. С. Оценка влияния местных и лобовых аэродинамических сопротивлений на воздухораспределение в вентиляционной сети / Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр: Труды 5-й Конференции Международной научной школы академика РАН К.Н. Трубецкого. — М., 2022. — С. 266–268.

12. Levin L. Yu., Semin M. A. Influence of shock losses on air distribution in underground mines // Journal of Mining Science. 2019, vol. 55, no. 2, pp. 287–296.

13. Мельник В. В., Федорова М. А., Мурин К. М., Буханик А. И., Малова С. А. Подземная геотехнология. Процессы подземных горных работ в магистральных транспортных выработках, стволах и на поверхности шахты. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2022. — 68 с.

14. Zijun Li, Rongrong Li, Yu Jiao Xu, Yuanyuan Xu Study on the optimization and oxygen-enrichment effect of ventilation scheme in a blind heading of plateau mine // International Journal of Environmental Research and Public Health. 2022, vol. 19, no. 14, article 8717. DOI: 10.3390/ijerph19148717.

15. He D., Wang X., Guo C., Li H., Liu J. The analysis of the factors influencing the operation of the piston wind in the cage of the hybrid hoisting shaft and the simulation study of the operation effect // Tunnelling and Underground Space Technology. 2024, vol. 149, article 105799.

16. Zhang H., Falk L., Allen C. An application of computational fluid dynamics to predict shock loss factors at raise junctions in underground mine ventilation systems // Mining, Metallurgy & Exploration. 2024, vol. 41, no. 3, pp. 1155–1170.

17. Kempson W. J., Webber-Youngman R. C. W., Meyer J. P. Optimizing shaft pressure losses through computational fluid dynamics modelling // Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy. 2013, vol. 113, no. 12, pp. 931–939. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2015.04.058.

18. He D., Wang X., Guo C., Li H., Zhang Y. Study on the influence of the cage lifting piston effect in main intake shafts on air flow in transportation lanes // Applied Sciences. 2023, vol. 13, no. 3, article 1419. DOI: 10.3390/app13031419.

19. Huang H., Sun T., Zhang G., Li D., Wei H. Evaluation of a developed SST  $k-\omega$  turbulence model for the prediction of turbulent slot jet impingement heat transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019, vol. 139, pp. 700–712.

20. Duan Y., Zheng Q., Jiang B. Use of computational fluid dynamics to implement an aerodynamic inverse design method based on exact Riemann solution and moving wall boundary // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 2020, vol. 14, no. 1, pp. 284–298.

21. Мальцев С. В. Исследование и разработка способов определения аэродинамических параметров сложных вентиляционных систем подземных рудников: Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. — Пермь, 2020. — 24 с.

22. Brake D. J. Mine ventilation: a practitioner's manual. Brisbane, Australia: Mine Ventilation, 2012, 791 p.

23. Zhou Y.-C., Liu J.-H., Huang S., Yang H.-T., Ji H.-G. Performance change of shaft lining concrete under simulated coastal ultra-deep mine environments // Construction and Building Materials. 2020, vol. 230, article 116909. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2019.116909.

24. Рудничная вентиляция. Справочник / Под ред. К.З. Ушакова. — М.: Недра, 1988. — 440 с. **ГИАБ**

## REFERENCES

1. Mokhiev N. N., Rad'ko V. V. *Inzhenernye raschety ventilyatsii shakht. Stroitel'stvo. Rekonstruktsiya. Eksploatatsiya* [Engineering calculations of mine ventilation. Construction. Reconstruction. Operation], Moscow, Nedra, 2007, 327 p.



2. Kruglov Yu. V. *Modelirovanie sistem optimal'nogo upravleniya vozdukhoraspredeleniem v ventilyatsionnykh setyakh podzemnykh rudnikov* [Modeling of optimal air distribution control systems in ventilation networks of underground mines], Candidate's thesis, Perm, 2006, 20 p.

3. Mustel P. I. Determination of ventilation resistance coefficients for round mine shafts. *Journal of Mining Institute*. 1959, vol. 1, pp. 8–25. [In Russ].

4. Skochinskiy A. A., Ksenofontova A. I., Kharev A. A., Idel'chik I. E. *Aerodinamicheskoe soprotivlenie shakhtnykh stvolov i sposoby ego snizheniya* [Aerodynamic resistance of mine shafts and ways to reduce it], Moscow, Ugletekhizdat, 1953, 363 p.

5. Maltsev S. V., Semin M. A., Kormshchikov D. S. Method for determining the aerodynamic drag coefficients of mine shafts of copper-nickel mines. *Fiziko-tehnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*. 2020, no. 6, pp. 170–178. [In Russ].

6. McPherson M. J. The resistance to airflow of mine shafts. *Trans. 3rd US Mine Ventilation Symposium*, Penn, 1987, pp. 465–477.

7. McPherson M. J. *Subsurface ventilation and environmental engineering*. Chapman & Hall, 2009, 824 p.

8. Perestoronin M. O., Parshakov O. S., Popov M. D. Parameterization of the ventilation network model in the analysis of emergency ventilation modes of mining systems. *Mining Science and Technology (Russia)*. 2023, vol. 8, no. 2, pp. 150–161. [In Russ].

9. Liu M., Zhu C., Zhang H., Zheng W., You S., Campana P. E., Yan J. The environment and energy consumption of a subway tunnel by the influence of piston wind. *Applied Energy*. 2019, vol. 246, pp. 11–23.

10. Kobylkin S. S., Ushakov V. K., Kuznetsov I. I. Analysis of local resistance of mine workings for general mine aerodynamic resistance. *Russian Mining Industry Journal*. 2024, vol. 2, pp. 93–96. [In Russ]. DOI: 10.30686/1609-9192-2024-2-93-96.

11. Kobylkin S. S., Kuznetsov I. I., Fedorov D. A., Kobylkin A. S. Assessment of the influence of local and frontal aerodynamic resistance on air distribution in the ventilation network. *Problemy i perspektivy kompleksnogo osvoeniya i sokhraneniya zemnykh nedr: Trudy 5-y Konferentsii Mezh-dunarodnoy nauchnoy shkoly akademika RAN K.N. Trubetskogo* [Problems and prospects for the integrated development and conservation of the earth's subsoil: Proceedings of the 5th Conference of the International Scientific School, Academician of the Russian Academy of Sciences K. N. Trubetskoy], Moscow, 2022, pp. 266–268. [In Russ].

12. Levin L. Yu., Semin M. A. Influence of shock losses on air distribution in underground mines. *Journal of Mining Science*. 2019, vol. 55, no. 2, pp. 287–296.

13. Mel'nik V. V., Fedorova M. A., Murin K. M., Bukhanik A. I., Malova S. A. *Podzemnaya geotekhnologiya. Protsessy podzemnykh gornykh rabot v magistral'nykh transportnykh vyrabotkakh, stvolakh i na poverkhnosti shakhty* [Underground geotechnology. Processes of underground mining in main transport workings, shafts and on the surface of the mine], Tula, Izd-vo TulGU, 2022, 68 p.

14. Zijun Li, Rongrong Li, Yu Jiao Xu, Yuanyuan Xu Study on the optimization and oxygen-enrichment effect of ventilation scheme in a blind heading of plateau mine. *International Journal of Environmental Research and Public Health*. 2022, vol. 19, no. 14, article 8717. DOI: 10.3390/ijerph19148717.

15. He D., Wang X., Guo C., Li H., Liu J. The analysis of the factors influencing the operation of the piston wind in the cage of the hybrid hoisting shaft and the simulation study of the operation effect. *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2024, vol. 149, article 105799.

16. Zhang H., Falk L., Allen C. An application of computational fluid dynamics to predict shock loss factors at raise junctions in underground mine ventilation systems. *Mining, Metallurgy & Exploration*. 2024, vol. 41, no. 3, pp. 1155–1170.

17. Kempson W. J., Webber-Youngman R. C. W., Meyer J. P. Optimizing shaft pressure losses through computational fluid dynamics modelling. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*. 2013, vol. 113, no. 12, pp. 931–939. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2015.04.058.

18. He D., Wang X., Guo C., Li H., Zhang Y. Study on the influence of the cage lifting piston effect in main intake shafts on air flow in transportation lanes. *Applied Sciences*. 2023, vol. 13, no. 3, article 1419. DOI: 10.3390/app13031419.

19. Huang H., Sun T., Zhang G., Li D., Wei H. Evaluation of a developed SST  $k-\omega$  turbulence model for the prediction of turbulent slot jet impingement heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019, vol. 139, pp. 700–712.

20. Duan Y., Zheng Q., Jiang B. Use of computational fluid dynamics to implement an aerodynamic inverse design method based on exact Riemann solution and moving wall boundary. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*. 2020, vol. 14, no. 1, pp. 284–298.

21. Mal'tsev S. V. *Issledovanie i razrabotka sposobov opredeleniya aerodinamicheskikh parametrov slozhnykh ventilyatsionnykh sistem podzemnykh rudnikov* [Research and development of methods for determining the aerodynamic parameters of complex ventilation systems in underground mines], Candidate's thesis, Perm, 2020, 24 p.

22. Brake D. J. *Mine ventilation: a practitioner's manual*. Brisbane, Australia: Mine Ventilation, 2012, 791 p.

23. Zhou Y.-C., Liu J.-H., Huang S., Yang H.-T., Ji H.-G. Performance change of shaft lining concrete under simulated coastal ultra-deep mine environments. *Construction and Building Materials*. 2020, vol. 230, article 116909. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2019.116909.

24. *Rudnichnaya ventilyatsiya*. Spravochnik. Pod red. K.Z. Ushakova [Mine ventilation. Guide. Ushakov K. Z. (Ed.)], Moscow, Nedra, 1988, 440 p.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Левин Лев Юрьевич*<sup>1</sup> — член-корреспондент РАН, д-р техн. наук, заместитель директора по научной работе, зав. отделом,

e-mail: aerolog\_lev@mail.ru, ORCID ID: 0000-0003-0767-9207,

*Мальцев Станислав Владимирович*<sup>1</sup> — канд. техн. наук, доцент,

зав. сектором, Пермский национальный исследовательский

политехнический университет, e-mail: st.v.maltsev@ya.ru,

ORCID ID: 0009-0002-9887-1455,

*Семин Михаил Александрович*<sup>1</sup> — д-р техн. наук,

ученый секретарь, зав. лабораторией, e-mail: seminma@inbox.ru,

ORCID ID: 0000-0001-5200-7931,

*Колесов Евгений Викторович*<sup>1</sup> — канд. техн. наук,

научный сотрудник, e-mail: kolesovev@gmail.com,

ORCID ID: 0000-0002-0755-7405,

<sup>1</sup> Горный институт Уральского отделения РАН.

**Для контактов:** Мальцев С.В., e-mail: st.v.maltsev@ya.ru.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*L. Y. Levin*<sup>1</sup>, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. (Eng.), Deputy Director for Research,

Head of Department, e-mail: aerolog\_lev@mail.ru,

ORCID ID: 0000-0003-0767-9207,

*S. V. Maltsev*<sup>1</sup>, Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor,

Head of Sector, Perm National Research Polytechnic University,

Perm, 614990, Russia, e-mail: st.v.maltsev@ya.ru,

ORCID ID: 0009-0002-9887-1455,

*M. A. Semin*<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Eng.), Academic Secretary,

Head of Laboratory, e-mail: seminma@inbox.ru,

ORCID ID: 0000-0001-5200-7931,

*E. V. Kolesov*<sup>1</sup>, Cand. Sci. (Eng.), Researcher,

e-mail: kolesovev@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-0755-7405,

<sup>1</sup> Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

Perm, 614007, Russia.

**Corresponding author:** S.V. Maltsev, e-mail: st.v.maltsev@ya.ru.

Получена редакцией 08.08.2024; получена после рецензии 05.11.2024; принята к печати 10.04.2025.

Received by the editors 08.08.2024; received after the review 05.11.2024; accepted for printing 10.04.2025.