ГИАБ. Горный информационно-аналитический бюллетень /
MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin, 2026;(2-1):61-84
ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ / ORIGINAL PAPER

УДК 622.363 + 622.834 DOI: 10.25018/0236_1493_2026_21_0_61

ОБОСНОВАНИЕ ВЕЛИЧИН УГЛОВ СДВИЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОТРАБОТКИ ЗАПАСОВ ВЕРХНЕКАМСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КАЛИЙНО-МАГНИЕВЫХ СОЛЕЙ

Часть 1. Теоретические основы и определение углов сдвижения в условиях полной подработки земной поверхности на основании теоретико-эмпирического подхода

Ю.С. Щегольков

ПАО «Уралкалий», Березники, Россия, e-mail: rabota.shegolkov@mail.ru

Аннотация: В инженерной практике для оценки безопасности объектов, фактически находящихся или планируемых к строительству в непосредственной близости от границ подземной отработки запасов, широкое распространение получило использование углов сдвижения. Величины последних не постоянны и требуют обоснования для различных месторождений полезных ископаемых. В рамках настоящей работы основное внимание уделено Верхнекамскому месторождению калийно-магниевых солей (ВМКМС). В периодически издаваемых (начиная с 1960 г.) нормативных документах, регламентирующих меры защиты рудников от затопления и охрану подрабатываемых объектов на ВМКМС, понятие угла сдвижения δ встречалось до 2008 г. В настоящее время углы δ не используются в явном виде – построение предохранительных целиков под объекты на земной поверхности осуществляется по трем фиксированным величинам граничных углов δ_0, что противоречит смысловой нагрузке последних и определяет целесообразность возврата к использованию углов сдвижения δ. При стремлении к балансу между безопасностью подрабатываемых объектов и минимизации потерь полезного ископаемого важна возможность оценки угла сдвижения δ_i на рассматриваемый период времени в зависимости от горно-геологических условий на отдельном участке отработки запасов полезного ископаемого. В ходе проведенного исследования выполнен анализ ранее применяемых на практике в условиях ВМКМС значений углов δ и подходов к их определению. Выявлены особенности формирования краевой части мульды сдвижения в условиях полной подработки земной поверхности. На основании проведенных теоретико-эмпирических исследований установлена зависимость, позволяющая определить значение угла δ_i для условий полной подработки земной поверхности.

Ключевые слова: сдвижение, углы сдвижения, оседания, мульда сдвижения, Верхнекамское месторождение калийно-магниевых солей, предохранительные целики, безопасность подрабатываемых объектов, деформации земной поверхности.

Для цитирования: *Щегольков Ю. С.* Обоснование величин углов сдвижения в условиях отработки запасов Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей. Часть 1. Теоретические основы и определение углов сдвижения в условиях полной подработки земной поверхности на основании теоретико-эмпирического подхода // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2026. – № 2-1. – С. 61–84. DOI: 10.25018/0236_1493_2026_21_0_61.

© Ю.С. Щегольков. 2026.

Justification of the values of shifting angles in the conditions of mining the reserves of the Verkhnekamskoe deposit of potassium-magnesium salts

Part 1. Theoretical foundations and determination of shift angles under conditions of complete undermining of the earth's surface based on a theoretical-empirical approach

Y.S. Shchegolkov

PJSC «Uralkali», Berezniki, Russia, e-mail: rabota.shegolkov@mail.ru

Abstract: In engineering practice, the use of shift angles has become widespread for assessing the safety of facilities actually located or planned for construction in the immediate vicinity of the boundaries of underground mining of reserves. The values of the latter are not constant and require justification for various mineral deposits. In this paper, the main attention is paid to the Verkhnekamskoye potassium-magnesium salt deposit (VMKMS). In periodically published (since 1960) regulatory documents governing measures to protect mines from flooding and the protection of undermined objects at the VMKMS, the concept of shift angle δ was encountered until 2008. At present, angles δ are not used explicitly – the construction of safety pillars for objects on the earth's surface is carried out according to three fixed values of boundary angles δ_0, which contradicts the semantic load of the latter and determines the advisability of returning to the use of shift angles δ. In the pursuit of a balance between the safety of the objects being undermined and the minimization of mineral losses, it is important to be able to estimate the displacement angle δ_i for the period under consideration depending on the mining and geological conditions at a separate site of mineral reserves development. In the course of the study, an analysis was made of the values of the angles δ previously used in practice under the conditions of the VMKMS and approaches to their determination. The features of the formation of the marginal part of the displacement trough under conditions of complete undermining of the earth's surface were revealed. Based on the theoretical and empirical studies, a dependence was established that allows determining the value of the angle δ_i for conditions of complete undermining of the earth's surface.

Key words: displacement, angles of displacement, subsidence, displacement trough, Verkhnekamskoye potassium-magnesium salt deposit, safety pillars, safety of undermining objects, deformations of the earth's surface.

For citation: Shchegolkov Y. S. Justification of the values of shifting angles in the conditions of mining the reserves of the Verkhnekamskoe deposit of potassium-magnesium salts. Part 1. Theoretical foundations and determination of shift angles under conditions of complete undermining of the earth's surface based on a theoretical-empirical approach. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2026;(2-1):61-84. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2026_21_0_61.

Введение

Поверхностные объекты, находящиеся в непосредственной близости от границ участков подземной отработки запасов, подвержены вредному ее влиянию [1 – 4 и др.]. Сказанное обуславливается, прежде всего, сдвижением подрабатываемой породной толщи, приводящему к возникновению за пределами границ отработки запасов полезного ископаемого вертикальных и горизонтальных деформаций земной поверхности, которые, при достижении некоторых критических величин, представляют

опасность для подрабатываемых знаний, сооружений и природных объектов. С целью определения внешних границ опасного влияния используют углы сдвижения. Исследования [5 – 7 и др.] показывают, что рассматриваемые углы не характеризуются постоянством и могут в значительной степени отличаться на разных месторождениях полезных ископаемых. На практике наиболее часто встречаются величины углов сдвижения в диапазоне от 55° до 85°, а в некоторых отдельных случаях их значение может приближаться к 90°. Центральной задачей настоящего исследования является обоснование величин углов сдвижения в условиях Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей.

За время отработки рассматриваемого месторождения величины исследуемых углов и подходы к их определению подвергались корректировкам, что отражено в нормативных документах, регламентирующих меры защиты рудников от затопления и охрану подрабатываемых объектов на ВКМКМС – «Указаниях» и «Инструкциях», периодически издаваемых начиная с 1960 г.

В первых версиях «Указаний» 1960 и 1972 гг. в качестве углов сдвижения в коренных породах δ и наносах φ использовались фиксированные величины, равные соответственно 60° и 45°. Впоследствии, углы φ не встречались ни в одной из последующих версий «Указаний». Опасными критическими деформациями при этом служили величины наклона $i = 4 \cdot 10^{-3}$ и кривизны $K = 2 \cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$. Несколько позже, в работе М.П. Нестерова [8], предшествующей выходу «Методических указаний» 1976 г. предложен метод определения углов сдвижения δ на заданный период времени исходя из типа и срока службы охраняемого объекта в функции развития максимального оседания во времени с учетом безразмерных распределений наклонов, кривизны и горизонтальных деформаций в краевой части мульды сдвижения. В основу метода положено постоянство граничных углов δ_0 и углов полных сдвижений ψ, определяющих длину полумульды. Схема к определению угла δ в заданный момент времени представлена на рис. 1.

Как видно из рис. 1, угол сдвижения $\delta(t_i)$ для некоторого момента времени может быть выражен следующим образом

$$\delta(t_i) = arctg\frac{H}{l(t_i)} = arctg\frac{H}{Hctg\delta_0 - L\left(1 - z(t_i)\right)} \quad (1)$$

где H – глубина разработки, соответствующая среднему расстоянию от зем-

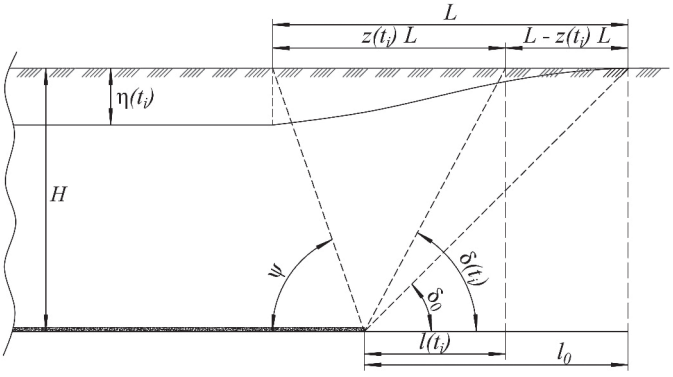

Рис. 1. Схема к определению угла сдвижения на заданный момент времени
Fig. 1. Scheme for determining the angle of displacement at a given moment in time

ной поверхности до подошвы нижнего отрабатываемого пласта, м; $l(t_i)$ — расстояние от границы выработанного пространства до некоторой условной точки N, в которой в момент времени t_i наблюдаются опасные (критические) величины деформаций, соответствующие значениям $i_g = 4 \cdot 10^{-3}$, $K_o = 2 \cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$ и $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$, м; L — длина полумульды сдвижения, м; $z(t_i)$ — безразмерная абсцисса условной точки N, м.

Вышеописанная методика и обозначенные значения деформаций использовались впоследствии вплоть до 2014 г., при этом в «Указаниях» 2008 г. для построения постоянных предохранительных целиков (под объекты со сроком эксплуатации, равным или превышающим срок службы рудника) регламентировалось к использованию значение $\delta = 50^\circ$.

В последних версиях «Указаний» 2014 г. [Указания по защите рудников от затопления и охране объектов на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей. Санкт-Петербург–Пермь, 2014] и 2022 г. [Указания (мероприятия) по защите рудников ПАО «Уралкалий» от затопления и охране объектов на земной поверхности от вредного влияния подземных разработок на ВКМКС. Часть 1. Основные положения. Часть 2. Методические рекомендации. Пермь: ГИ УрО РАН, 2022] понятие угла сдвижения не встречается. Построение предохранительных целиков под объекты на земной поверхности предложено осуществлять по граничным углам δ_0 с использованием следующих их значений:

- 55° — для построения постоянных предохранительных целиков;
- 65° — для временных предохранительных целиков, а также для отдельных зданий или группы зданий, расположенных за границами городской застройки и требующих применения мер охраны;
- не более 75° — при малых величинах оседания земной поверхности, при которых расчетные деформации не достигают допустимых значений в течение сроков службы объектов.

Анализируя сказанное, справедливо заметить, что применяемый в настоящее время подход для построения предохранительных целиков под охраняемые поверхностные объекты, в некотором смысле, противоречит смысловой нагрузке используемых граничных углов δ_0 [Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. СПб., 1998, 291 с.], [9—10 и др.]. Упомянутой задаче наибольшим образом соответствует практическое назначение углов сдвижения δ, что и обуславливает целесообразность возврата к их использованию. Очевидно, что местоположение точки с опасными (критическими) значениями деформаций имеет тесную связь с геометрией полумульды сдвижения, а точнее с ее формой и размерами. Оба параметра, в условиях отработки запасов рассматриваемого месторождения, характеризуются непостоянством, что подтверждается работами [11—13]. Сказанное, в сочетании с наблюдаемыми выраженными различиями в фактических величинах углов δ, позволяет сделать вывод о потенциальной нестационарности местоположения границы зоны опасных сдвижений (ЗОС). В этом случае, к главному недостатку построения предохранительных целиков по существующим фиксированным значениям углов δ_0 будут относиться повышенные потери полезного ископаемого. Так, например, использование угла сдвижения меньше оптимально достаточного на 1°, при средней глубине разработки 350 м сопровождается повышением потереть площади запасов на величину около 8 тыс. м^2, приходящуюся на 1 пог. км отстраиваемой границы.

Вышеизложенное свидетельствует о целесообразности стремления к соблюдению некого баланса между безопасностью подрабатываемых объектов и минимизацией потерь полезного ископаемого. Отмеченный баланс является основной смысловой составляющей ранее используемой на практике методики определения угла δ, предложенной М.П. Нестеровым На основании зависимости (1) можно сделать вывод о наибольшей значимости для достоверности определения угла $\delta(t_i)$ величин углов δ_0 и ψ, а также функций безразмерных распределений наклонов $S'(z)$, кривизны $S''(z)$ и горизонтальных деформаций $F'(z)$ в различных горно-геологических условиях отработки запасов. Отмеченные функции $S'(z)$ и $S''(z)$ являются, соответственно, первой и второй производными от безразмерной кривой оседаний $S(z)$, а функция $F'(z)$ является первой производной от безразмерной кривой горизонтальных смещений $F(z)$. Численные значения базовых функций $S(z)$ и $F(z)$ определяются на основании результатов инструментальных наблюдений по профильным линиям грунтовых реперов на земной поверхности.

Анализируя ранее применяющиеся и используемые в настоящее время на практике функции безразмерных распределений $S(z)$, $S'(z)$, $S''(z)$, $F(z)$, $F'(z)$ важно отметить отсутствие информации о численных значениях двух последних кривых. При этом, в основе расчета ожидаемых горизонтальных деформаций $\varepsilon(z)$ лежит функция кривизны $K(z)$, корректируемая коэффициентом перехода от $K(z)$ к $\varepsilon(z)$. Отмеченное обстоятельство можно связать с довольно малым количеством профильных линий со своевременными систематическими инструментальными наблюдениями за горизонтальным сдвижением грунтовых реперов.

Первые типовые функции $S(z)$, $S'(z)$, $S''(z)$ регламентированы «Указаниями» 1976 г. и делились на две группы по степени нагружения C оставляемых при отработке запасов междукамерных целиков (МКЦ). В «Указаниях» 1984 г. в качестве дополнительного классификационного фактора введен показатель степени заполнения камер закладочным материалом A. Последующими версиями нормативного документа с 1994 по 2004 гг. регламентируется многообразие типовых функций в зависимости от ряда влияющих факторов, к которым, помимо вышеперечисленных, добавлено отношение достигнутого оседания земной поверхности на заданный момент времени η_i к максимальному расчетному на конец процесса сдвижения η_m. В «Указаниях» 2008 г. ранее использовавшаяся система типовых функций была упразднена и приведен единственный вариант, применимый для отработки сильвинитовых пластов и пластов каменной соли со степенями нагружения $C \leqslant 0{,}4$, а также карналлитовых пластов с закладкой $A > 0{,}75$. Для остальных случаев, численные значения функций $S(z)$, $S'(z)$, $S''(z)$ регламентировано устанавливать на основании данных инструментальных наблюдений с привлечением, при необходимости, специализированных научных организаций. В последних версиях «Указаний» 2014 и 2022 гг. также приведен единственный вариант типовых функций для условий отработки запасов, регламентируемых данными нормативными документами (сильвинитовые пласты при $C \leqslant 0{,}55$, пласты каменной соли при $C \leqslant 0{,}30$, карналлитовые пласты при $C \leqslant 0{,}3$ и $A > 0{,}80$).

Дополнить сказанное уместно замечанием о близости геометрии применяемых в настоящее время на практике функций $S(z)$, $S'(z)$ и $S''(z)$ с некоторыми отдельными кривыми, регламентированными более ранними версиями нормативной документации, например, «Указаниями» 1976 г. (при степени нагруже-

ния междукамерных целиков сильвинитовых пластов $C \leqslant 0{,}4$), «Указаниями» 1984 г. (при условии закладки пустот выработанного пространства сильвинитовых пластов с коэффициентом заполнения камер закладочным материалом $A \geqslant 0{,}75$), «Указаниями», изданными за период с 1994 по 2008 гг. (при степени нагружения междукамерных целиков сильвинитовых пластов $C \leqslant 0{,}4$, а также при условии закладки пустот выработанного пространства карналлитовых пластов с коэффициентом заполнения камер закладочным материалом $A \geqslant 0{,}75$).

Для наглядного отражения вышеизложенного, на рис. 2 представлено сравнительное сопоставление применявшихся на ВКМКМС за период с 1976 г. по настоящее время безразмерных распределений кривых $S(z)$, $S'(z)$ и $S''(z)$ (важно учитывать, что геометрия последних наибольшим образом соответствует условию полной подработки земной поверхности, поскольку до 2008 г. ее изучению уделялось основное внимание).

Рассматривая рис. 2, можно отметить выраженную изменчивость функций $S(z)$, $S'(z)$ и $S''(z)$ для различных условий отработки запасов и стадий развития процесса сдвижения. Местоположения и абсолютные значения положительных экстремумов функций $S'(z)$ и $S''(z)$, имеющих особую важность вопросе исследования углов сдвижения δ, также характеризуются выраженным непостоянством в сочетании с отсутствием информации о положении постоянной границы выработанного пространства. Сказанное, в дополнении с полученными в работах [14, 15] результатами исследования граничных углов δ_0, углов полных сдвижений ψ и максимальных оседаний θ определяет необходимость разработки актуализированной упрощенной методики расчета углов сдвижения δ_i на рассматриваемый момент

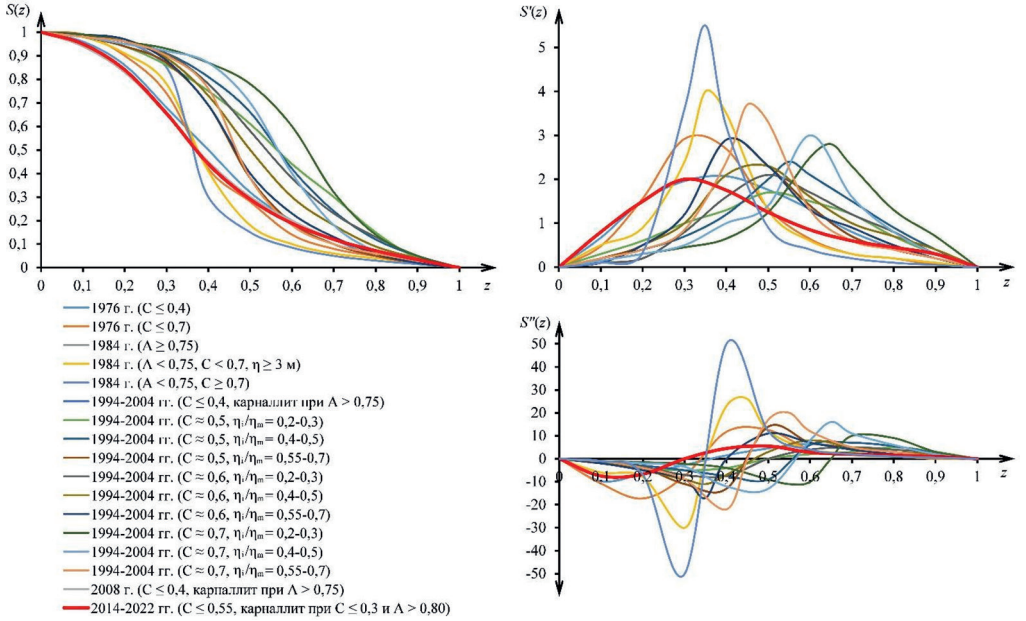

Рис. 2. Сравнительное сопоставление безразмерных распределений оседаний S(z), наклонов S'(z) и кривизны S''(z) применявшихся на ВКМКМС за период с 1976 г. по настоящее время

Fig. 2. Comparative comparison of dimensionless distributions of subsidence S(z), slopes S'(z) and curvature S''(z) used at the VKMKMS for the period from 1976 to the present

времени. Существенным упрощающим обстоятельством в рассматриваемом вопросе является возможность лишь локального исследования распределений $S'(z)$, $S''(z)$ и $F'(z)$ в области сдвижения над нетронутым массивом.

Материалы и методы исследования

В качестве исходных материалов для проведения исследования послужили нормативные документы, посвященные теме исследования, результаты инструментальных наблюдений за процессом сдвижения земной поверхности на ВКМКМС, информация о результатах физико-механического опробования пород, слагающих подрабатываемую породную толщу, геологическая информация о последней, сформированная на основании данных геологической разведки, планы шахтных полей с параметрами отработки запасов.

В качестве методов исследования, использованных в рамках настоящей работы, послужили анализ литературных источников и нормативной документации по рассматриваемой проблеме, отбор, обработка и анализ геологических данных и результатов опробования на физико-механические свойства пород, результатов инструментальных наблюдений за сдвижением земной поверхности, регрессионный анализ и теоретико-эмпирические методы исследования.

Результаты исследования и их обсуждение

Исследование особенностей формирования краевой части мульды сдвижения в условиях полной подработки земной поверхности

На начальном этапе выполнения работы важно развить правильные представления о механизме формирования полумульды сдвижения при полной подработке земной поверхности в условиях отработки запасов на ВМКМС. Учитывая сложность проведения прямых исследований по изучению деформирования породной толщи в результате ее подработки, несложно прийти к выводу о том, что характер перемещения слоев массива может быть определен лишь при рассмотрении качественных характеристик его физических или численных моделей, а также на основании теоретических представлений, согласованных как с ранее накопленным опытом по исследуемой тематике, так и с результатами проводимых инструментальных наблюдений за процессом сдвижения земной поверхности. Ни один из вышеотмеченных способов исследования нельзя считать более приоритетным по сравнению с остальными, т.к. все они основываются на ряде неизбежно принимаемых допущений и упрощений относительно фактических процессов, протекающих в реальном породном массиве после его подработки. В рамках текущего раздела настоящей работы механизм формирования полумульды сдвижения будет рассмотрен на основании существующих теоретических представлений об особенностях деформирования подрабатываемой породной толщи.

На основании анализа работ [5 — 7, 9 — 10, 16 — 20 и др.] можно сделать вывод о том, что характер сдвижения породного массива не обладает свойством универсальности и может в значительной степени отличаться на отдельных месторождениях. Среди основных факторов, формирующих вышеупомянутые возможные отличия, особенно выделяются такие как способ отработки запасов, особенности залегания пород толщи и полезного ископаемого в сочетании с их физико-механическими свойствами. Принимая во внимание то, что в условиях ВМКМС подрабатываемый массив представляет собой ряд чередующихся

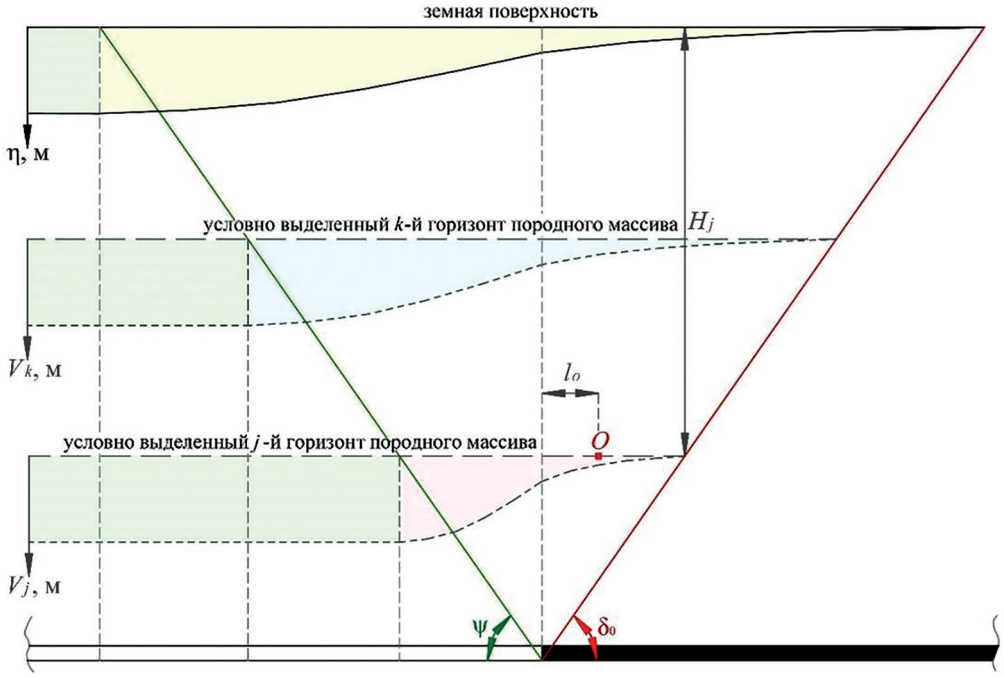

Рис. 3. Модель формирования краевой части мульды сдвижения при полной подработке земной поверхности

Fig. 3. Model of formation of the marginal part of the displacement trough during complete undermining of the earth's surface

разнопородных слоев относительно невысокой крепости, а также учитывая пологость залегания свиты промышленных пластов, для дальнейшего рассмотрения уместно принять во внимание наиболее простую модель деформирования породной толщи, которая, применительно к условию полной подработки земной поверхности, наглядно отражена на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что сдвижение слоев массива происходит в виде распространяющегося от границы зоны обрушения [10] в сторону земной поверхности последовательного их прогиба на интервалах, заключенных между некими условными поверхностями характерных смещений. Контур последних в разрезе породного массива (ортогональном к постоянной границе выработанного пространства) близок к линиям, образуемым при построении углов полных сдвижений ψ и граничных углов δ_0. По мере удаления от выработанного пространства геометрия кривой прогиба слоев массива претерпевает последовательную трансформацию и, в конечном результате, проявляется на земной поверхности в виде полумульды сдвижения.

Для полноты понимания особенностей формирования полумульды сдвижения в условиях рассматриваемого месторождения важно оценить характер перемещения грунтовых реперов во времени в ее разрезе. Реализация сказанного осложнена малочисленностью профильных линий со своевременными систематическими инструментальными наблюдениями за горизонтальными (в сочетании с вертикальными) смещениями грунтовых реперов — удалось отобрать лишь четыре подходящие наб-

людательные станции над участками сдвижения с полной подработкой земной поверхности. Последующая обработка результатов инструментальных наблюдений производилась нижеследующим образом.

В качестве вертикальной составляющей перемещения реперов использовалось их оседание $\eta_{Pn.i}^{t_k}$ на рассматриваемую дату инструментальных наблюдений.

Вычисление горизонтальной составляющей перемещений реперов профильной линии производилось с использованием зависимости

$$\xi_{Pn.i}^{t_k} = \sum_{i=Pn.On.}^{i=Pn.i} l_i^{t_k} - \sum_{i=Pn.On.}^{i=Pn.i} l_i^{t_0} \qquad (2)$$

где $\sum_{i=Pn.On.}^{i=Pn.i} l_i^{t_k}$ — сумма проекций (на линию, ортогональную к рассматриваемой постоянной границе выработанного пространства) измеренных в *k*-м году длин интервалов, заключенных между ближайшим к границе выработанного пространства опорным репером и произвольным рассматриваемым *i*-м репером, м; $\sum_{i=Pn.On.}^{i=Pn.i} l_i^{t_0}$ — сумма проекций (на линию, ортогональную к рассматриваемой постоянной границе выработанного пространства) первоначально измеренных длин интервалов, заключенных между ближайшим к границе выработанного пространства опорным репером и произвольным рассматриваемым *i*-м репером, м.

Вследствие некоторого отличия в датах наблюдений высотных отметок реперов и длин интервалов, полученные результаты вычисления $\eta_{Pn.i}^{t_k}$ или $\xi_{Pn.i}^{t_k}$ путем линейной интерполяции приведены к общим датам наблюдений.

Для численного выражения отклонения траектории смещения каждого репера от вертикали использованы углы $\tau_{Pn.i}^{t_k}$:

$$\tau_{Pn.i}^{t_k} = arctg \frac{\xi_{Pn.i}^{t_k}}{\eta_{Pn.i}^{t_k}}, \qquad (3)$$

где $\eta_{Pn.i}^{t_k}$ — оседание *i*-го репера на рассматриваемую *k*-ю дату наблюдений, мм; $\xi_{Pn.i}^{t_k}$ — горизонтальное смещение *i*-го репера на рассматриваемую *k*-ю дату наблюдений, мм.

Пример результата обработки данных по одной из рассмотренных наблюдательных станций представлен на рис. 4. Как видно из рис. 4, направления перемещения реперов изменяются вдоль плоскости разреза сдвижения земной поверхности, при этом минимальные значения углов τ наблюдаются в области плоского дна мульды, а максимальные локализуются над нетронутым массивом. Аналогичная ситуация наблюдается на каждом из рассмотренных участков профильных линий и в целом согласуется с общими представлениями о направлениях перемещения реперов, ранее изложенными в работах [6, 16—17 и др.].

Дополнить вышеизложенную информацию уместно комплексным сравнительным сопоставлением вида кривых вертикальных η и горизонтальных ξ сдвижений в сочетании с рассчитываемой на их основании кривыми наклонов *i*, кривизны *K*, горизонтальных деформаций ε и углов τ. Сделать это наиболее удобно после преобразования отмеченных кривых в безразмерный вид, соответствующий функциям $S(z)$, $S'(z)$, $S''(z)$, $F(z)$, $F'(z)$ и $T(z)$. Пример полученного результата обработки данных представлен на рис. 5 из которого наглядно видно следующее:

- геометрия кривых относительных оседаний $S(z)$ и ее производные $S'(z)$, $S''(z)$ изменяются по мере развития процесса сдвижения, при этом, наименее существенные изменения прослежива-

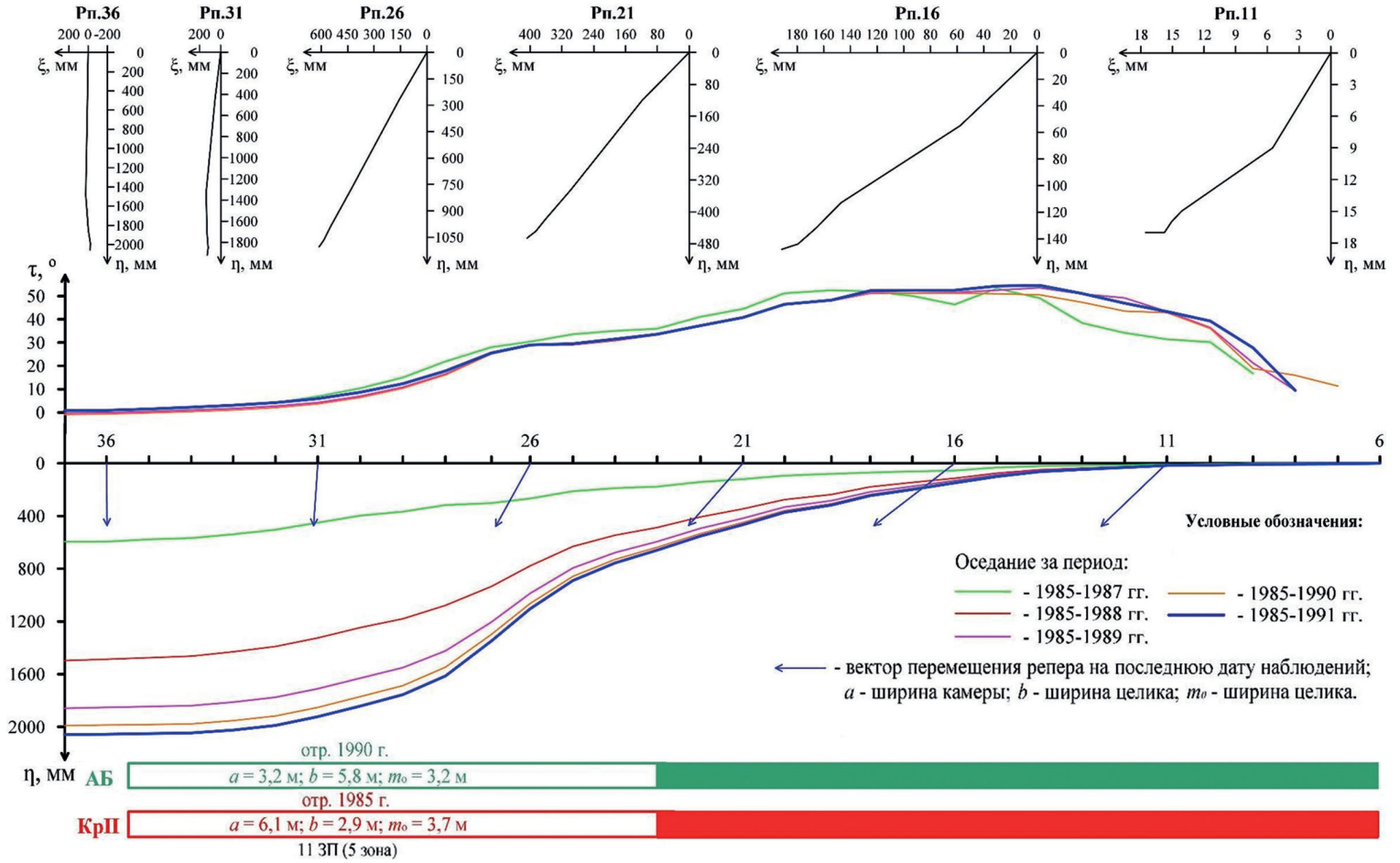

Рис. 4. Характер перемещения реперов при развитии процесса сдвижения на примере одной из рассмотренных профильных линий
Fig. 4. The nature of the movement of benchmarks during the development of the shift process using the example of one of the profile lines considered

ются в области сдвижения над нетронутым массивом;

• экстремумы функций *S'(z)* располагаются над выработанным пространством, при этом, их местоположение по мере роста величины максимального достигнутого оседания изменяется не значительно (исключение составляет начальный этап развития процесса сдвижения, характеризуемый наибольшими

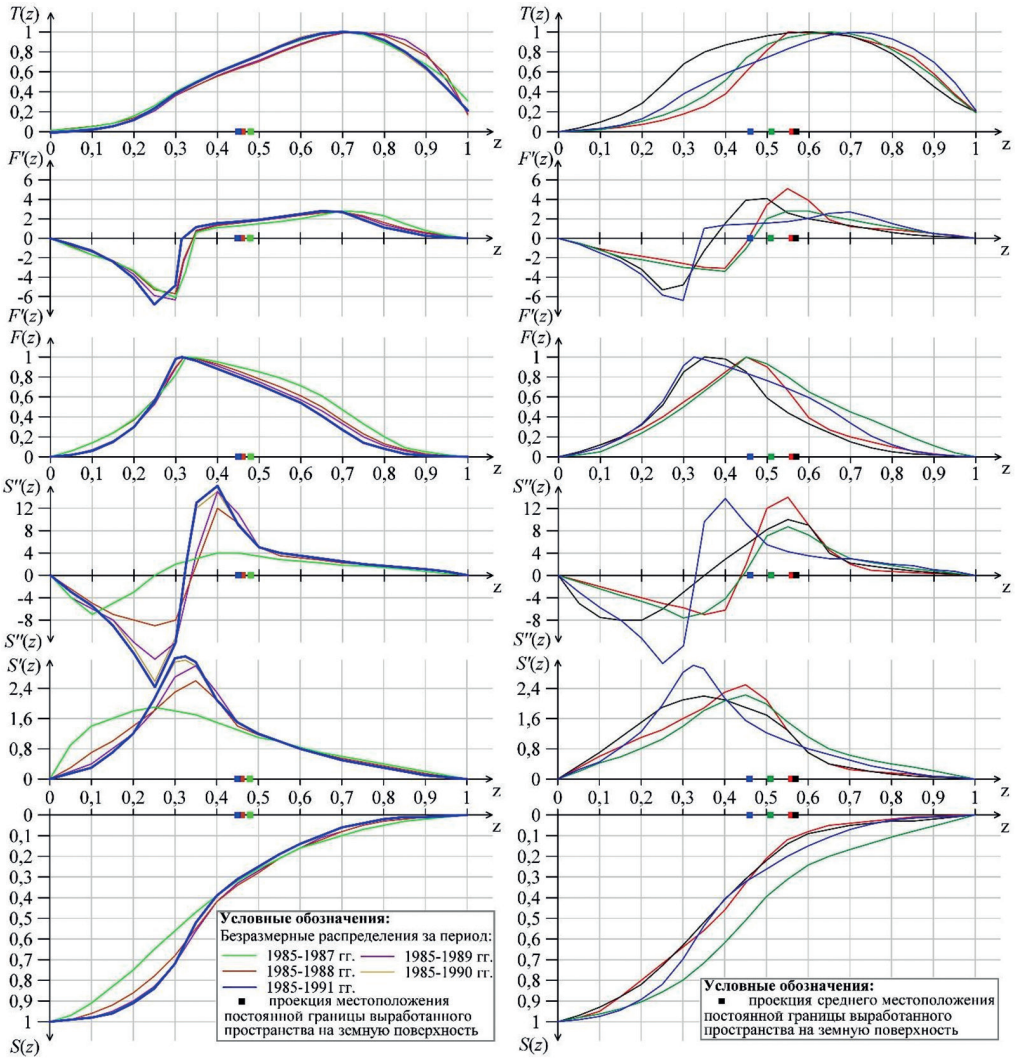

Рис. 5. Безразмерные распределения оседаний S(z), наклонов S'(z), кривизны S''(z), горизонтальных сдвижений F(z), горизонтальных деформаций F'(z) и направлений сдвижения земной поверхности T(z), рассчитанных на различные даты наблюдений для представленной на рис. 3 профильной линии (левая часть графиков) и осредненные для каждой из рассмотренных наблюдательных станций (правая часть графиков)

Fig. 5. Dimensionless distributions of subsidence S(z), tilts S'(z), curvature S''(z), horizontal displacements F(z), horizontal deformations F'(z) and directions of displacement of the earth's surface T(z), calculated for different observation dates for the profile line shown in fig. 3 (left side of the graphs) and averaged for each of the observation stations considered (right side of the graphs)

погрешностями определения исходной безразмерной функции $S(z)$);

• местоположение положительных экстремумов функций $S''(z)$ также изменяется не значительно по мере роста величины максимального достигнутого оседания (за исключением начального этапа развития процесса сдвижения). В целом наблюдается некоторая близость (с возможными небольшими отклонениями в одну из сторон) местоположений положительных экстремумов функций $S''(z)$ с постоянной границей выработанного пространства;

• наблюдается некоторая визуальная схожесть осредненных по рассмотренным наблюдательным станциям кривых $S'(z)$ и $F(z)$, $S''(z)$ и $F'(z)$, что нашло применение в существующей методике расчета горизонтальных деформаций ε на основе кривизны K. Абсциссы положительных экстремумов кривых $F(z)$ и $F'(z)$, в отличие от $S'(z)$ и $S''(z)$, не подвержены значительным отклонениям на начальной стадии развития процесса сдвижения;

• кривые $T(z)$ имеют схожий вид и изменяются от нуля (в области плоского дна мульды) до значения близкого к 0,2 (у границы мульды). Абсциссы максимума кривых $T(z)$ располагаются над нетронутым массивом и не имеют видимой взаимосвязи с местоположением абсцисс положительных экстремумов функций $S'(z)$, $S''(z)$, $F(z)$ и $F'(z)$.

При рассмотрении рис. 5 важно учитывать, что достигнутые максимальные горизонтальные сдвижения ξ_{mi} кратно меньше достигнутых максимальных оседаний η_{mi}. Принимая во внимание отношение величин ξ_{mi} и η_{mi} справедливо отметить выраженную его стационарность на каждой из рассмотренных наблюдательных станций (абсолютные отклонения от среднего до 0,02), при этом, вычисленные средние значения упомянутого отношения находится в довольно широком диапазоне от 0,13 до 0,31. Сказанное, вероятно, является следствием различия скоростей оседаний, состава, мощности и характера залегания верхних слоев породного массива [16], однако достоверно подтвердить это нельзя по причине малочисленности принятых во внимание наблюдательных станций. При отсутствии результатов измерений длин интервалов между заложенными реперами профильной линии возможна лишь приблизительная (грубая) оценка величины ξ_{mi}, на основании величины η_{mi} и кривой $S(z)$, суть которой в следующем: кривые $T(z)$ на рис. 5 наглядно демонстрируют наличие точки в которой при развитии процесса сдвижения наблюдается паритет между приращением достигнутых оседаний и горизонтальных смещений, а средняя абсцисса такой точки составляет $z = 0{,}65$, далее учитывая, что среднее значение функций $F(z = 0{,}65)$ составляет 0,39, можно записать выражение:

$$\xi_{mi} \approx 2{,}56\eta_{mi} S(z = 0{,}65) \qquad (4)$$

где η_{mi} — наибольшее достигнутое оседание в полумульде сдвижения, м; $S(z = 0{,}65)$ — значение функции безразмерного распределения оседания в точке с абсциссой $z = 0{,}65$.

При использовании зависимости (4) важно учитывать, что получена она на основании обработки данных по участкам шахтных полей, характеризуемых максимальной степенью нагружения C_m среди пластов в выемочных зонах между постоянной границей выработанного пространства и границей плоского дна мульды, превышающей значение 0,48. В этом случае особый практический интерес представляет исследование параметра ξ_{mi} в условиях оставления «жестких» ($C_m \leqslant 0{,}4$) междукамерных целиков, деформирующихся в режиме затухающей ползучести.

Еще одним немаловажным фактором, на который стоит обратить внимание,

является относительно небольшая фактическая площадь $S_{п.г.}$ участка полумульды, приходящегося на область сдвижения над нетронутым массивом. По рассмотренным наблюдательным станциям, в среднем, показатель $S_{п.г.}$ составляет 11% от общей площади полумульды сдвижения $S_{п.м.}$, что довольно мало и свидетельствует о незначительном переносе объемов погашенных пустот выработанного пространства в рассматриваемую область сдвижения.

Обобщая все вышеизложенное, можно сделать вывод о том, что развитие процесса сдвижения над нетронутым массивом имеет выраженные характерные особенности и несколько отличается от остальной части полумульды сдвижения. Очевидно, что механизм перемещения пород в рассматриваемой области сдвижения имеет тесную взаимосвязь с большим числом влияющих факторов, среди которых наиболее сильно выделяются такие как объем сформированных пустот выработанного пространства и интенсивность его погашения, количество отрабатываемых пластов, глубина разработки, геологические особенности строения породной толщи в сочетании с физико-механическими свойствами (ФМС) слагающих ее пород. При этом ФМС определяют модель поведения пород (упругое, вязкое, пластическое деформирование, ползучесть, течение материала в теле и пр.), а их влияние наиболее выраженно при относительно простом строении подрабатываемого массива, прослеживающегося и на ВМКМС.

Рассуждая в направлении обоснования величин углов сдвижения δ_i на заданный момент времени несложно прийти к выводу о возможности их определения не только из результатов инструментальных наблюдений за развитием процесса сдвижения, но и на основании теоретических и теоретико-эмпирических методов исследования, а также методов численного и физического моделирования. При этом, несмотря на малочисленность профильных линий со своевременными систематическими измерениями длин интервалов между заложенными грунтовыми реперами, можно утверждать, что вывод объективных закономерностей, позволяющих оценить величины δ_i над различными участками отработки запасов возможен лишь на основании результатов инструментальных наблюдений. Сказанное определяет высокую приоритетность выбора в рамках настоящей работы эмпирического метода исследования. В качестве дополнительного метода выбраны теоретико-эмпирические исследования. Последние будут рассмотрены в рамках настоящей работы.

Определение углов сдвижения δ_i в условиях полной подработки земной поверхности на основании теоретико-эмпирического подхода

Рассматривая вопрос вывода аналитических зависимостей, позволяющих оценить величины углов сдвижения δ_i на локальном участке шахтного поля на заданный момент времени несложно прийти к выводу о высокой сложности, а порой и невозможности получения точного их вида на основании теоретико-эмпирических методов исследования процесса сдвижения. Совокупность таких факторов, как сложность геометрии массива, неоднородность свойств слагающих его пород, нелинейное их поведение, ограничения математических моделей, требующих идеализации, временная динамика процессов и пр. вынуждают использовать упрощения и эмпирические поправки, позволяющие получить лишь приближенные решения. Один из возможных наиболее простых вариантов таких приближенных решений для условий отработки запасов на ВМКМС рассмотрен ниже.

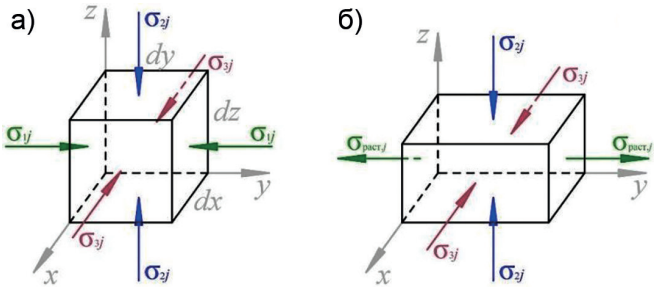

Рис. 6. Напряженное состояние в точке О породного массива до (а) и после (б) отработки запасов полезного ископаемого

Fig. 6. Stress state at point O of the rock mass before (a) and after (b) mining of mineral reserves

Для простоты дальнейших рассуждений, в первую очередь, целесообразно ввести упрощающее допущение относительно модели подрабатываемого породного массива на ВМКМС, представив ее в виде чередующихся изотропных горизонтально залегающих породных слоев выдержанной мощности с осредненными физико-механическими свойствами. Формирование области сдвижения над нетронутым массивом, в первом приближении, удобно представить следствием развития деформаций упругого расширения пород после приложения растягивающих напряжений, вызванных развитием оседания (прогиба) над участком отработки запасов полезного ископаемого. Вывод простой аналитической зависимости, позволяющей оценить приблизительную величину оседания (прогиба) над произвольной точкой рассматриваемой области сдвижения уместно начать с рассмотрения напряженного состояние элементарного, бесконечно малого объема кубической формы, выделенного в точке *О* на глубине H_j (см. рис. 3), учитывая при этом, что оси *z* (вертикальное направление) и *y* (горизонтальное направление) расположены в плоскости разреза краевой части мульды сдвижения, а ось *x* направлена к ней ортогонально.

Принимая во внимание низкую актуальность для условий рассматриваемого месторождения гидродинамических и геотермических силовых полей, а также предполагая малость тектонических напряжений, можно сделать вывод о формировании природного напряженно-деформированного состояния массива преимущественно за счет гравитационного силового поля. В условиях равновесия (рис. 6, *а*), касательные напряжения τ в элементарном кубике точки *О* будут отсутствовать и напряженное состояние пород будет характеризоваться лишь главными нормальными напряжениями σ_{1j}, σ_{2j} и σ_{3j}, приблизительные значения которых можно определить из следующих зависимостей:

$$\sigma_{2j} \approx \gamma_{ср.} H_j \qquad (5)$$

(вертикальное напряжение σ_{2j} более точно можно определить на основании результатов работы [21]),

$$\sigma_{1j} \approx \sigma_{3j} \approx \frac{\sigma_{2j} \nu_{ср.}}{1-\nu_{ср.}} \approx \frac{\nu_{ср.} \gamma_{ср.} H_j}{1-\nu_{ср.}} \qquad (6)$$

где $\gamma_{ср.}$ — средний объемный вес налегающей толщи пород массива, принимаемый на основании требований действующих «Указаний» равным 2200 кг/м^3 · · 9,81 Н/кг = 21 582 Н/м^3; H_j — расстояние от земной поверхности до рассматриваемой точки породного массива, лежащей на *j*-м условно выделенном горизонте, м; $\nu_{ср.}$ — средневзвешенный коэффициент Пуассона для пород на рассматриваемом участке шахтного поля.

После отработки запасов происходит перераспределение начального поля напряжений в массиве. В этом случае развитие процесса сдвижения над участком отработки запасов полезного ископаемого будет способствовать появлению растягивающих напряжений $\sigma_{раст.i}$ вместо изначальных сжимающих σ_{1i}. При этом, в рамках решаемой задачи, возникающие касательные напряжения τ на гранях рассматриваемого кубика при его деформировании, будем считать пренебрежимо малыми, а изменение начальных нормальных напряжений σ_{2i} и σ_{3i} несущественными. Тогда, на основе обобщенного закона Гука [22 – 23] применительно к условиям рис. 6, *б*) можно записать следующие выражения:

$$d\varepsilon_{zi} = \frac{1}{E_{ср.}}\left[\sigma_{2j} + \nu_{ср.}\left(\sigma_{раст.j} - \sigma_{3j}\right)\right] = \frac{\gamma_{ср.}H_j}{E_{ср.}}\left(1 - \frac{\nu_{ср.}^2}{1-\nu_{ср.}}\right) +$$
$$+\frac{\nu_{ср.}\sigma_{раст.j}}{E_{ср.}} = \frac{\Delta dH_j}{dH_j} \Rightarrow \Delta dH_j = \frac{\gamma_{ср.}H_j}{E_{ср.}}\left(1 - \frac{\nu_{ср.}^2}{1-\nu_{ср.}}\right)dH_j + \frac{\nu_{ср.}\sigma_{раст.j}}{E_{ср.}}dH_j \quad (7)$$

(для удобства восприятия сжимающие напряжения приняты положительными, а растягивающее отрицательным),

$$d\varepsilon_{yi} = \frac{1}{E_{ср.}}\left[\sigma_{раст.j} + \nu_{ср.}\left(\sigma_{2j} + \sigma_{3j}\right)\right] = \frac{\sigma_{раст.j}}{E_{ср.}} +$$
$$+\frac{\nu_{ср.}\gamma_{ср.}H_j}{\left(1-\nu_{ср.}\right)E_{ср.}} = \frac{\Delta dL_j}{dL_j} \Rightarrow \Delta dL_j = \frac{\sigma_{раст.j}}{E_{ср.}}dL_j + \frac{\nu_{ср.}\gamma_{ср.}H_j}{\left(1-\nu_{ср.}\right)E_{ср.}}dL_j \quad (8)$$

(для удобства восприятия сжимающие напряжения приняты отрицательными, а растягивающее положительным), где $\gamma_{ср.}$ – средний объемный вес налегающей толщи пород, Н/м^3; H_j – расстояние от земной поверхности до рассматриваемой точки породного массива, м; $\nu_{ср.}$ – средневзвешенный коэффициент Пуассона для пород на рассматриваемом участке шахтного поля; $E_{ср.}$ – средневзвешенный модуль Юнга для пород на рассматриваемом участке шахтного поля, Н/м^2; $\sigma_{раст.j}$ – растягивающие напряжения на *j*-м горизонте массива, Н/м^2; ΔdH_j – абсолютная деформация на которую уменьшается размер ребра кубика вдоль оси *z*, м; dH_j – первоначальная высота ребра кубика, м; ΔdL_j – абсолютная деформация на которую уменьшается размер ребра кубика вдоль оси *y*, м; dL_j – первоначальная длина ребра кубика, м.

Анализируя зависимости (7) и (8), довольно просто прийти к выводу о том, что суммарная величина прогиба (оседания) $\sum V_o$ ($\sum \eta_o$) и горизонтального смещения ξ_o в произвольной точке *O* рассматриваемой области массива будут являться интегралами полученных выражений соответственно по высоте (на интервале значений от H_j до $H - l_o \mathrm{tg}\delta_{0i}$) и длине (на интервале значений от 0 до $(H - H_j)\,\mathrm{ctg}\delta_{0i} - l_o$), где l_o – расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства, м; H – глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; δ_{0i} – значение граничного угла на заданный момент времени, ранее установленное в работе [14], град. Перед проведением процедуры интегрирования необходимо знать величину $\sigma_{раст.j}$ или иметь приближенную аналитическую зависимость для ее определения.

Очевидно, что в рассматриваемых условиях для отдельно взятой полумульды сдвижения значение $\sigma_{раст.j}$ будет зависеть, главным образом, от физико-механических свойств пород, слагающих рассматриваемый горизонт массива, а также от величины максимального прогиба (оседания) и его местоположения. Для приблизительного описания такой взаимосвязи можно воспользоваться существующими близкими по аналогии к рассматриваемым условиям математическими моделями механики, среди которых наиболее выделяются модели изгиба пластины [24] или изгиба балки [25] под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. При этом, важно учитывать, что стремление к получению более достоверной аналитической зависимости для определения $\sigma_{раст.j}$ на основании отмеченных моделей сопряжено с необходимостью неизбежного их усложнения (задание нестандартных граничных условий, учет межслойного взаимодействия и пр.), что, в свою очередь, способствует значительному повышению трудности получения итогового результата. Вывести зависимость для нахождения величины $\sigma_{раст.j}$ в наиболее простом приближении можно если представить, что элементарный кубик, выделенный в точке *O* находится в поперечном сечении длинного стержня, ортогонально расположенного к постоянной границе выработанного пространства. Над границей отработки запасов упомянутый стержень имеет жесткое защемление, а оставшаяся его часть характеризуется постоянством возникающих растягивающих напряжений $\sigma_{раст.j}$. В условиях зеркального отражения полумульды сдвижения поиск упрощенного решения можно свести к рассмотрению модели прогиба балки с жестко защемленными противоположными концами, для которой, согласно [25], справедливы следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{max} &= \frac{qL^4}{32Ebh^3}\\ \sigma_{max} &= \frac{qL^2}{2bh^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{16Eh}{L^2}\omega_{max}, \quad (9)$$

где ω_{max} — максимальная величина прогиба в центральной части балки, м; σmax — максимальная величина растягивающего напряжения в жесткой заделке Н/м^2; q — интенсивность приложенной распределенной нагрузки, Н/м; L — длина балки, м; E — модуль Юнга, Н/м^2; b и h — ширина и высота прямоугольного сечения балки, м.

Результат выражения (9), применительно к рассматриваемым условиям, может быть преобразован в следующий вид:

$$\sigma_{раст.j} = \frac{16E_{ср.}\eta_{mi}h_j}{2^2\left(H-H_j\right)^2 ctg^2\psi} = \frac{4E_{ср.}\eta_{mi}h_j}{\left(H-H_j\right)^2 ctg^2\psi}, \quad (10)$$

где $E_{ср.}$ — средневзвешенный модуль Юнга для пород на рассматриваемом участке шахтного поля, Н/м^2; η_{mi} — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м; h_j — мощность слоя на *j*-м горизонте породного массива, м; H — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; H_j — расстояние от земной поверхности до *j*-го горизонта породного массива, м; ψ — величина угла полных сдвижений на рассматриваемом участке отработки запасов, град.

Рассматривая полученную зависимость (10) в сочетании с данными фактического опробования пород массива на физико-механические свойства, несложно заметить, что расчетные величины $\sigma_{раст.j}$ для слоев мощностью 1 м в большинстве случаев не превысят сред-

него значения лабораторно определенных пределов прочности пород массива на одноосное растяжение (на основании имеющихся данных по результатам опробования пород толщи выше кровли верхнего промышленного пласта *B* величину $\sigma_{р.ср.}$ можно принять равной 0,07 от средневзвешенного по мощности слоев на рассматриваемом участке шахтного поля значения предела прочности пород на сжатие $\sigma_{сж.ср.}$) $\sigma_{р.ср.}$ = = 2 МПа (в реальном массиве эффективная величина предела прочности пород на растяжение будет больше $\sigma_{р.ср.}$ вследствие влияния масштабного фактора и наличия межслойного взаимодействия). Так, например, при η_{mi} = 3,0 м, $E_{ср}$ = 5,10 ГПа, H = 300 м, H_j = 0 м и ψ = 55° величина $\sigma_{раст.j}$ составит 1,39 МПа (около 70% от $\sigma_{р.ср.}$).

Вышеизложенное позволяет сделать важное замечание о возможности упрощения зависимости (7), путем исключения второго слагаемого, вследствие его относительной малости. Убедиться в сказанном довольно просто, если принять в качестве величины $\sigma_{раст.j}$ фиксированное значение, равное пятикратной величине $\sigma_{р.ср.}$ — 10 МПа (что довольно много для пород слагающих подрабатываемый массив на ВМКМС), и после этого произвести интегрирование второго слагаемого формулы (7) по dH_j на интервале значений от 0 до $H - l_o \mathrm{tg}\delta_0$. В результате получим следующее выражение $10\nu_{ср.}(H - l_o \mathrm{tg}\delta_0) / E_{ср.}$, которое при величинах $\nu_{ср.}$ = 0,3, $E_{ср.}$ = 5,10 ГПа, H = 400 м, l_o = 0 м примет значение 0,023 м или 23 мм, что не является существенной величиной в рамках рассматриваемой задачи. Таким образом, в исходной зависимости (7) остается только первое слагаемое, интегрируя которое по dH_j на вышеотмеченном интервале значений получим выражение для определения оседания $\eta(l_o)$ в произвольной точке *O* исследуемой области сдвижения на расстоянии l_o от постоянной границы выработанного пространства:

$$\eta_i(l_0) = \frac{\gamma_{ср.}\left(H - l_0 tg\delta_{0i}\right)^2}{2E_{ср.}}\left(1 - \frac{\nu_{ср.}^2}{1-\nu_{ср.}}\right) \quad (11)$$

где $\gamma_{ср.}$ — средний объемный вес налегающей толщи пород, Н/м³; H — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; l_o — расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ($0 \leqslant l_o \leqslant H\mathrm{ctg}\delta_{0i}$), м; δ_{0i} — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.; $E_{ср.}$ — средневзвешенный модуль Юнга для пород на рассматриваемом участке шахтного поля, Н/м²; $\nu_{ср.}$ — средневзвешенный коэффициент Пуассона для пород на рассматриваемом участке шахтного поля.

Вследствие довольно сильного упрощения принятой модели сдвижения рассматриваемого участка массива, полученные из зависимости (11) оседания будут постоянны во времени на каждой отдельной наблюдательной станции, что является довольно существенным фактором, ограничивающим область практического использования полученного выражения.

Для уравнения (8) величина $\sigma_{раст.j}$ в рассматриваемом случае имеет ключевое значение. Это объясняется тем, что во внимание принимается поверхностный слой ($H_j \to 0$), тогда первое слагаемое выражения (8) обращается в ноль. Подставляя зависимость (10) (с учетом, что параметры $E_{ср.}$ и h_j соответствуют модулю Юнга E_q и фактической мощности m_q пород (наносов), слагающих поверхностный слой на рассматриваемом участке отработки запасов) во второе слагаемое формулы (8) и интегрируя по dL_j на интервале значений 0 до

H ctg δ_{0i} – l_o, получим выражение для определения горизонтального смещения $\xi_i(l_o)$ в произвольной точке O исследуемой области сдвижения, выбранной на расстоянии l_o от постоянной границы выработанного пространства:

$$\xi(l_0) = \frac{4\eta_{mi} m_q \left(H ctg\delta_{0i} - l_0\right)}{H^2 ctg^2 \psi} \quad (12)$$

где η_{mi} – фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м; m_q – фактическую мощность верхнего слоя (наносов) на рассматриваемом участке отработки запасов, м; H – глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; δ_{0i} – величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.; l_o – расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ($0 \leqslant l_o \leqslant H\text{ctg}\delta_{0i}$), м; ψ – величина угла полных сдвижений на рассматриваемом участке отработки запасов, град.

Учитывая, что в основе вывода зависимостей (11) и (12) лежит ряд существенных упрощений и допущений относительно реальных условий, имеется целесообразность их корректировки путем введения поправочных эмпирических коэффициентов – k_η и k_ξ соответственно. Для вычисления k_η отобраны 9 своевременно заложенных профильных линии грунтовых реперов, по которым на различные даты инструментальных наблюдений определены значения оседаний $\eta_{irp.}$ в точке над границей выработанного пространства и нетронутого массива. Затем, на основании зависимости (11) вычислены оседания $\eta(l_o = 0)$ и найдены отношения $\eta_{irp.}/\eta(l_o = 0)$, соответствующие коэффициентам $k_{\eta i}$. Последние хорошо коррелируют со значениями фактически достигнутых максимальных оседаний η_{mi} в полумульде сдвижения, что наглядно видно из рис. 7.

Вводя эмпирическую правку $k_{\eta i} = 1{,}22\eta_{mi}$ в уравнение (11), получим:

$$\eta_i(l_0) = \frac{0{,}61\eta_{mi}\gamma_{cp.}\left(H - l_0 tg\delta_{0i}\right)^2}{E_{cp.}} \cdot \left(1 - \frac{\nu_{cp.}^2}{1-\nu_{cp.}}\right) \quad (13)$$

где η_{mi} – фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде

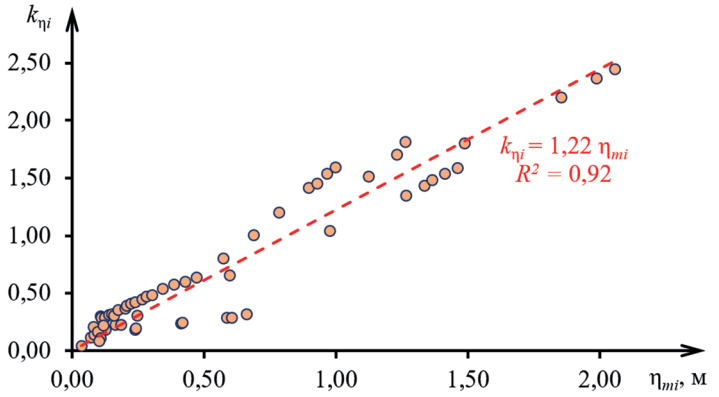

Рис. 7. Корреляционное поле значений эмпирических поправочных коэффициентов k_η и величин фактически достигнутых максимальных оседаний η_{mi} в полумульде сдвижения

Fig. 7. Correlation field of values of empirical correction factors k_η and values of actually achieved maximum subsidence η_{mi} in the displacement half-trough

сдвижения на заданный момент времени, м; $\gamma_{ср.}$ — средний объемный вес налегающей толщи пород, Н/м^3; H — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; l_o — расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ($0 \leqslant l_o \leqslant H\mathrm{ctg}\delta_{0i}$), м; δ_{0i} — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.; $E_{ср.}$ — средневзвешенный модуль Юнга для пород на рассматриваемом участке шахтного поля, Н/м^2; $\nu_{ср.}$ — средневзвешенный коэффициент Пуассона для пород на рассматриваемом участке шахтного поля.

Определение коэффициента $k_{\xi i}$ уместно произвести по аналогии с вышеописанным расчетом коэффициента $k_{\eta i}$: на примере данных четырех вышерассмотренных на рис. 5 профильных линий на различные даты наблюдений определены величины горизонтальных смещений $\xi_{iгр.}$ в точке над границей выработанного пространства и нетронутого массива, после чего из зависимости (12) вычислены соответствующие величины $\xi_i(l_o = 0)$ и найдены отношения $\xi_{iгр.}/\xi_i(l_o = 0)$, являющиеся искомыми коэффициентами $k_{\xi i}$. Полученные значения $k_{\xi i}$ разбросаны в диапазоне от 1,43 до 2,43 и в среднем составляют 1,90. Прослеживается слабая тенденция уменьшения величин $k_{\xi i}$ по мере роста фактически достигнутого максимального оседания η_{mi} в полумульде сдвижения. Учитывая малую размерность массива натурных данных, в рассматриваемом случае, с точки зрения надежности вычислений горизонтальных смещений, являющихся основой для последующего определения горизонтальных деформаций, значение коэффициента k_{ξ} уместно принять с небольшим запасом в виде фиксированной величины, равной 2,5.

Далее, вводя эмпирическую правку $k_{\xi} = 2{,}5$ в уравнение (12), получим:

$$\xi(l_0) = \frac{10\eta_{mi} m_q \left(H ctg\delta_{0i} - l_0\right)}{H^2 ctg^2\psi}, \quad (14)$$

где η_{mi} — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м; m_q — фактическую мощность верхнего слоя (наносов) на рассматриваемом участке отработки запасов, м; H — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; δ_{0i} — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.; l_o — расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ($0 \leqslant l_o \leqslant H\mathrm{ctg}\delta_{0i}$), м; ψ — величина угла полных сдвижений на рассматриваемом участке отработки запасов, град.

Для дальнейшего определения функций наклонов $i_i(l_o)$, кривизны $K_i(l_o)$ и горизонтальных деформаций $\varepsilon_i(l_o)$ найдем соответственно первую $d\eta_i(l_o)/dl_o$ и вторую $d^2\eta_i(l_o)/dl_o$ производные зависимости (13) и первую $d\xi_i(l_o)/dl_o$ производную выражения (14), приняв в качестве констант параметры $\gamma_{ср.}$, η_{mi}, H, δ_{0i}, $E_{ср.}$, $\nu_{ср.}$, m_q, ψ (наклоны и горизонтальные деформации растяжения приняты положительными по знаку):

$$i_i(l_0) = \frac{1{,}22\eta_{mi}\gamma_{ср.}}{E_{ср.}}\left(1 - \frac{\nu^2_{ср.}}{1-\nu_{ср.}}\right) \cdot tg\delta_{0i}\left(H - l_0 tg\delta_{0i}\right) \quad (15)$$

$$K_i(l_0) = K_i = \frac{1{,}22\eta_{mi}\gamma_{ср.}}{E_{ср.}} \cdot \left(1 - \frac{\nu^2_{ср.}}{1-\nu_{ср.}}\right) tg^2\delta_{0i} \quad (16)$$

$$\varepsilon_i(l_0) = \varepsilon_i = 10\frac{\eta_{mi} m_q}{H^2 ctg^2\psi} \qquad (17)$$

где η_{mi} — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м; $\gamma_{ср.}$ — средний объемный вес налегающей толщи пород, Н/м³; $E_{ср.}$ — средневзвешенный модуль Юнга для пород на рассматриваемом участке шахтного поля, Н/м²; $\nu_{ср.}$ — средневзвешенный коэффициент Пуассона для пород на рассматриваемом участке шахтного поля; δ_{0i} — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.; c — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; l_o — расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ($0 \leqslant l_o \leqslant H\text{ctg}\delta_{0i}$), м; m_q — фактическую мощность верхнего слоя (наносов) на рассматриваемом участке отработки запасов, м; ψ — величина угла полных сдвижений на рассматриваемом участке отработки запасов, град.

Анализируя полученные зависимости (15), (16), (17) можно сделать вывод о линейном изменении наклонов и постоянстве кривизны и горизонтальных деформаций вдоль рассматриваемого участка отработки запасов, что объясняется упрощением принятой модели развития процесса сдвижения. В рассматриваемом случае, крайне маловероятно, что вычисленные из зависимости (16) величины кривизны превысят опасного значения $K = 2\cdot10^{-4}$ м$^{-1}$ [26]. Так, при $\gamma_{ср.} = 21\,582$ Н/м³, $E_{ср} = 5{,}10$ ГПа, $\nu_{ср} = 0{,}3$ и $\delta_{0i} = 55°$ для достижения кривизны $2\cdot10^{-4}$ м$^{-1}$ необходимо оседание η_{mi} равное 21,8 м, что слишком много для условий отработки запасов на ВМКМС. Это позволят исключить кривизну из дальнейшего рассмотрения. Использование зависимости (17) в качестве основы для определения углов δ сопряжено с необходимостью некоторого ее совершенствования путем учета изменения горизонтальной деформации ε_i по длине рассматриваемого участка сдвижения. Сделать это наиболее просто по аналогии с линейным видом функции наклона $i_i(l_o)$, что в целом не противоречит данным натурных наблюдений и является грубой аппроксимацией реального изменения рассматриваемого параметра. Предполагая вычисленную из зависимости (17) горизонтальную деформацию растяжения максимальной на рассматриваемом участке сдвижения в точке $l_o = 0$ м и вводя дополнительное условие $1 - l_o / (H\text{ctg}\delta_{0i})$, можно записать следующее выражение:

$$\varepsilon_i(l_0) = 10\frac{\eta_{mi} m_q \left(Hctg\delta_{0i} - l_0\right)}{H^3 ctg^2\psi ctg\delta_{0i}}, \qquad (18)$$

где η_{mi} — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м; m_q — фактическая мощность верхнего слоя (наносов) на рассматриваемом участке отработки запасов, м; H — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; δ_{0i} — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.; l_o — расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ($0 \leqslant l_o \leqslant H\text{ctg}\delta_{0i}$), м; ψ — величина угла полных сдвижений на рассматриваемом участке отработки запасов, град.

Приравнивая величины $i_i(l_o)$ и $\varepsilon_i(l_o)$ к критериальным значениям $i = 4\cdot10^{-3}$ и $\varepsilon = 2\cdot10^{-3}$ [26] соответственно и затем выражая из формул (15) и (18) параметр l_o, можем записать итоговую систему уравнений для определения угла сдвижения δ_i на рассматриваемый период времени:

$$
\begin{cases}
\text{если} \left\{ u_i = \dfrac{305\eta_{mi}\gamma_{ср.}\left(1-\nu_{ср.}-\nu_{ср.}^2\right)Htg\delta_{0i}}{E_{ср.}\left(1-\nu_{ср.}\right)} \le 1 \right\} \wedge \left\{ u_\varepsilon = \dfrac{5000\eta_{mi}m_q}{H^2ctg^2\psi} \le 1 \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \text{зона опасных сдвижений отстствует, иначе } \delta_i = \min(\delta_{ii}, \delta_{\varepsilon i}) \\
\delta_{ii} = \begin{cases} 89{,}9^\circ \text{ при } u_i \le 1 \\ arctg\left(\dfrac{\eta_{mi}\gamma_{ср.}\left(1-\nu_{ср.}-\nu_{ср.}^2\right)Htg^2\delta_{0i}}{Htg\delta_{0i}\eta_{mi}\gamma_{ср.}\left(1-\nu_{ср.}-\nu_{ср.}^2\right)-3{,}28\cdot10^{-3}E_{ср.}\left(1-\nu_{ср.}\right)} \right) \text{при } u_i > 1 \end{cases} \\
\delta_{\varepsilon i} = \begin{cases} 89{,}9^\circ \text{ при } u_\varepsilon \le 1 \\ arctg\left(\dfrac{\eta_{mi}m_q tg\delta_{0i}}{\eta_{mi}m_q - 2\cdot10^{-4}H^2ctg^2\psi} \right) \text{при } u_\varepsilon > 1 \end{cases}
\end{cases}
\qquad (19)
$$

где u_i и u_ε — вспомогательные коэффициенты, применяемые для упрощения записи итогового результата; η_{mi} — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м; $\gamma_{ср.}$ — средний объемный вес налегающей толщи пород, Н/м^3; $\nu_{ср.}$ — средневзвешенный коэффициент Пуассона для пород на рассматриваемом участке шахтного поля; H — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м; δ_{0i} — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.; $E_{ср.}$ — средневзвешенный модуль Юнга для пород на рассматриваемом участке шахтного поля, Н/м^2; m_q — фактическую мощность верхнего слоя (наносов) на рассматриваемом участке отработки запасов, м; ψ — величина угла полных сдвижений на рассматриваемом участке отработки запасов, град.; l_o — расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ($0 \leqslant l_o \leqslant H\text{ctg}\delta_{0i}$), м.

Величины углов δ_i, полученные из выражения (19) при фактических величинах параметров η_{mi}, $\gamma_{ср.}$, H, δ_{0i}, $E_{ср.}$, m_q, ψ лежат в диапазоне от 73,5° до 85,9° и составляют в среднем 78,1°. Можно отметить довольно хорошую согласованность вычисленных значений δ_i с фактическими $\delta_{фi}$ (средняя разница составляет всего 3,1°), что характеризует рассмотренный подход с положительной стороны. Справедливо также отметить и наличие существенных недостатков, к которым относятся наличие ложных определений углов δ_i при фактическом отсутствии ЗОС, а также присутствие ошибочных определений ЗОС при фактическом ее наличии. Последнее обстоятельство, определяет необходимость проведения дополнительных исследований для нахождения альтернативной зависимости, позволяющей определить углы δ_i с большей достоверностью, что будет реализовано в рамках второй части настоящей работы на основании эмпирического подхода.

Выводы

1. В ходе выполненного исследования получена теоретико-эмпирическая зависимость (19), позволяющая выполнить расчет углов сдвижения δ_i на заданный момент времени в условиях полной подработки земной поверхности. Вычисленные из полученной зависимости углы δ_i хорошую согласуются с фактическими $\delta_{фi}$ (средняя разница —

3,1°), при этом присутствуют ложные определения углов δ_i при фактическом отсутствии ЗОС и ошибочные определения ЗОС при фактическом ее наличии. Возможно последующее совершенствование зависимости (19) путем усложнения принятой во внимание модели сдвижения массива и валидации на основе новых результатов инструментальных наблюдений;

2. Выявленные недостатки работы теоретико-эмпирической модели (19) определяют необходимость проведения дополнительных исследований для нахождения альтернативной зависимости, позволяющей определить углы δ_i с большей достоверностью, что будет реализовано на основании эмпирического подхода в рамках второй части настоящей работы. В последней также будет осуществлено итоговое сравнительное сопоставление полученных и существующих способов определения углов сдвижения;

3. Отсутствие разработанной для неполной подработки земной поверхности в условиях ВМКМС методики определения угла сдвижения δ_i на заданный период времени, определяет высокую актуальность рассмотрения этой задачи в рамках второй части настоящей работы.

Автор выражает глубокую признательность академику РАН, д-ру техн. наук А.А. Баряху и канд. техн. наук Л.О. Тенисон за ценные советы и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барях А. А.*, *Тенисон Л. О.* Обоснование инженерных критериев безопасной подработки водозащитной толщи на Верхнекамском месторождении солей // Горный журнал. — 2021. — № 4. — С. 57—63.

2. *Усанов С. В.*, *Коновалова Ю. П.*, *Усанова А. В.* Исследование причин повреждений жилых малоэтажных зданий в зоне влияния подземных горных работ // Известия ТулГУ. Науки о Земле. — 2023. — № 2. — С. 334—346.

3. *Pawluszek-Filipiak K., Borkowski A.* Integration of DInSAR and SBAS techniques to determine mining-related deformations using Sentinel-1 data: The case study of rydułtowy mine in Poland // Remote Sensing. 2020, vol. 12, no. 2, article 242. DOI:10.3390/rs12020242.

4. *Peng S. S.* Surface subsidence engineering: Theory and practice. Boca Raton: CRC Press, 2021. 216 p.

5. *Кузнецов М. А.*, *Акимов Л. Г.*, *Кузьмин В. И.*, *Пантелеев М. Г.*, *Чернышев М. Ф.* Сдвижение горных пород на рудных месторождениях. — М.: Недра, 1971. — 224 с.

6. *Казаковский Д. А.* Сдвижение земной поверхности под влиянием горных разработок. — М.-Харьков: Углетехиздат, 1953. — 228 с.

7. *Букринский В. А.*, *Орлов Г. В.* Сдвижение горных пород и земной поверхности при подземных разработках. — М.: Недра, 1984. — 247 с.

8. *Нестеров М. П.* Метод определения углов сдвижения земной поверхности на заданный период времени при отработке калийных месторождений / Механика горных пород при разработке месторождений природных солей: труды ВНИИГ. Вып. 67. — Л., 1974. — С. 69—74.

9. *Викторов С. Д.*, *Гончаров С. А.*, *Иофис М. А.*, *Закалинский В. М.* Механика сдвижения и разрушения горных пород / отв. ред. акад. К.Н. Трубецкой. — М.: РАН, 2019. — 360 с.

10. *Посыльный Ю. В.* Геометрия мульды сдвижения земной поверхности над горными выработками угольных шахт. — Новочеркасск, 2012. — 216 с.

11. *Нестеров М. П.*, *Львова А. В.*, *Аникин Н. Ф.* Основные особенности закономерностей деформаций земной поверхности на калийных рудниках / Строительные конструкции: сборник научных трудов НИИСК. Вып. 23. — Киев: Будивельник, 1974.

12. *Нестеров М. П.* Особенности процесса деформирования земной поверхности на калийных месторождениях и специфика их учета при выборе конструктивных мер защиты подрабатываемых объектов / Доклады на международном Симпозиуме по защите окружающей среды от последствий подземной эксплуатации минерального сырья. — Тузла (Югославия), 1975. — С. 179—183.

13. *Аникин Н. Ф.*, *Львова А. В.*, *Бешенцева Э. Ф.* Особенности формирования краевых частей мульд сдвижения в условиях Верхнекамского месторождения / Контроль, прогнозирование и управление состоянием пород в калийных рудниках: сборник научных трудов. — Л.: ВНИИГ, 1985. — С. 152—160.

14. *Щегольков Ю. С.* Определение граничных углов процесса сдвижения земной поверхности при отработке запасов Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей // Маркшейдерия и недропользование. — 2024. — № 6. — С. 25—32. DOI: 10.56195/20793332_2024_6_25_32.

15. *Щегольков Ю. С.* Оценка величин углов полных сдвижений и углов максимальных оседаний в условиях отработки запасов Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей // Маркшейдерия и недропользование. — 2025. — № 1. — С. 61—70. DOI: 10.56195/2079-3332-2025-25-1-61-70.

16. *Кратч Г.* Сдвижение горных пород и защита подрабатываемых сооружений. — М.: Недра, 1978. — 496 с.

17. *Борисов А. А.* Механика горных пород и массивов. — М.: Недра, 1980. — 360 с.

18. *Литвинский Г. Г.* К теории сдвижения подработанного породного массива // Наукоемкие технологии и оборудование в промышленности и строительстве. — 2024. — № 5(79). — С. 5—20.

19. *Jahanmiri S, Noorian-Bidgoli M.* Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques // Environmental Science and Pollution Research. 2024, vol. 31, no. 22, pp. 31942—31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2.

20. *Liya Zhang, Pengfei Gao, Zhengzheng Gan, Wenhao Wu, Yafeng Sun, Chuanguang Zhu, Sichun Long, Maoqi Liu, Hui Peng* Surface subsidence monitoring of mining areas in hunan province based on Sentinel-1A and DS-InSAR // Sensors (Basel). 2023, vol. 23, no. 19, article 8146. DOI: 10.3390/s23198146.

21. *Чернопазов Д. С., Шкуратский Д. Н., Секунцов А. И.* Закономерности распределения удельного веса пород, перекрывающих промышленную толщу Верхнекамского месторождения солей // Горный журнал. — 2021. — № 4. — С. 39—45.

22. *Sadd M. H.* Elasticity: Theory, applications, and numerics. Academic Press, 2025, 648 p.

23. *Барашков В. Н., Смолина И. Ю., Путеева Л. Е., Песцов Д. Н.* Основы теории упругости: учебное пособие. — Томск, 2012. — 184 с.

24. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 640 с.

25. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 514 с.

26. *Щегольков Ю. С.* Обоснование критериев основных угловых параметров процесса сдвижения для условий отработки запасов Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей // Маркшейдерия и недропользование. — 2024. — № 3. — С. 42—54. DOI: 10.56195/20793332_2024_3_42_54. ГИАБ

REFERENCES

1. Baryakh A. A., Tenison L. O. Substantiating engineering criteria for safe undermining of water-protective strata at the Verkhnekamsk salt deposit. *Gornyi Zhurnal*. 2021, no. 4, pp. 57—63. [In Russ].

2. Usanov S. V., Konovalova Yu. P., Usanova A. V. Research into causes of damage to low-rise residential buildings in the zone of influence of underground mining operations. *News of the Tula state university. Sciences of Earth*. 2023, no. 2, pp. 334—346. [In Russ].

3. Pawluszek-Filipiak K., Borkowski A. Integration of DInSAR and SBAS techniques to determine mining-related deformations using Sentinel-1 data: The case study of rydułtowy mine in Poland. *Remote Sensing*. 2020, vol. 12, no. 2, article 242. DOI:10.3390/rs12020242.

4. Peng S. S. *Surface subsidence engineering: Theory and practice*. Boca Raton: CRC Press, 2021. 216 p.

5. Kuznetsov M. A., Akimov L. G., Kuz'min V. I., Panteleev M. G., Chernyshev M. F. *Sdvizhenie gornykh porod na rudnykh mestorozhdeniyakh* [Rock movement at ore deposits], Moscow, Nedra, 1971, 224 p.

6. Kazakovskiy D. A. *Sdvizhenie zemnoy poverkhnosti pod vliyaniem gornykh razrabotok* [Movement of the earth's surface under the influence of mining], Moscow-Kharkov, Ugletekhizdat, 1953, 228 p.

7. Bukrinskiy V. A., Orlov G. V. *Sdvizhenie gornykh porod i zemnoy poverkhnosti pri podzemnykh razrabotkakh* [Rock and ground surface movement during underground mining], Moscow, Nedra, 1984, 247 p.

8. Nesterov M. P. Method for determining ground surface displacement angles for a given period during potash deposit mining. *Mekhanika gornykh porod pri razrabotke mestorozhdeniy prirodnykh soley: trudy VNIIG*. Vyp. 67 [Mechanics of rocks during the development of natural salt deposits. Proceedings of VNIIG. Vol. 67], Leningrad, 1974, pp. 69—74. [In Russ].

9. Viktorov S. D., Goncharov S. A., Iofis M. A., Zakalinskiy V. M. *Mekhanika sdvizheniya i razrusheniya gornykh porod* [Mechanics of rock displacement and fracture], Moscow, 2019, 360 p.

10. Posyl'niy Yu. V. *Geometriya mul'dy sdvizheniya zemnoy poverkhnosti nad gornymi vyrabotkami ugol'nykh shakht* [Geometry of the subsidence trough of the earth's surface above mine workings of coal mines], Novocherkassk, 2012, 216 p.

11. Nesterov M. P., Lvova A. V., Anikin N. F. Main features of the patterns of ground surface deformations at potash mines. *Stroitel'nye konstruktsii: sbornik nauchnykh trudov NIISK*. Vyp. 23 [Building structures. Collection of scientific papers of NIISK. Vol. 23], Kiev, Budivelnik, 1974. [In Russ].

12. Nesterov M. P. Features of the ground surface deformation process at potash deposits and the specifics of their consideration when selecting structural protection measures for undermined facilities. *Doklady na mezhdunarodnom Simpoziume po zashchite okruzhayushchey sredy ot posledstviy podzemnoy ekspluatatsii mineral'nogo syr'ya* [Reports at the International Symposium on Environmental Protection from the Consequences of Underground Exploitation of Mineral Resources], Tuzla (Yugoslaviya), 1975, pp. 179 — 183. [In Russ].

13. Anikin N. F., Lvova A. V., Beshentseva E. F. Features of the formation of the marginal parts of subsidence troughs under the conditions of the Verkhnekamsk deposit. *Kontrol', prognozirovanie i upravlenie sostoyaniem porod v kaliynykh rudnikakh: sbornik nauchnykh trudov* [Monitoring, forecasting and management of rock conditions in potash mines: collection of scientific papers], Leningrad, 1985, pp. 152 — 160. [In Russ].

14. Shchegolkov Yu. S. Determination of boundary angles of the ground surface displacement process during mining of reserves at the Verkhnekamsk potassium-magnesium salt deposit. *Mine Surveying and Subsurface Use*. 2024, no. 6, pp. 25 — 32. [In Russ]. DOI: 10.56195/20793332_2024_6_25_32.

15. Shchegolkov Yu. S. Assessment of full displacement angles and maximum subsidence angles under the conditions of mining reserves at the Verkhnekamsk potassium-magnesium salt deposit. *Mine Surveying and Subsurface Use*. 2025, no. 1, pp. 61 — 70. [In Russ]. DOI: 10.56195/2079-3332-2025-25-1-61-70.

16. Kratch G. *Sdvizhenie gornykh porod i zashchita podrabatyvaemykh sooruzheniy* [Rock movement and protection of undermined structures], Moscow, Nedra, 1978, 496 p.

17. Borisov A. A. *Mekhanika gornykh porod i massivov* [Mechanics of rocks and rock masses], Moscow, Nedra, 1980, 360 p.

18. Litvinskii G. G. On the theory of displacement of undermined rock mass. *Knowledge-intensive technologies and equipment in industry and building*. 2024, no. 5(79), pp. 5 — 20. [In Russ].

19. Jahanmiri S, Noorian-Bidgoli M. Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques. *Environmental Science and Pollution Research*. 2024, vol. 31, no. 22, pp. 31942 — 31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2.

20. Liya Zhang, Pengfei Gao, Zhengzheng Gan, Wenhao Wu, Yafeng Sun, Chuanguang Zhu, Sichun Long, Maoqi Liu, Hui Peng Surface subsidence monitoring of mining areas in hunan province based on Sentinel-1A and DS-InSAR. *Sensors (Basel)*. 2023, vol. 23, no. 19, article 8146. DOI: 10.3390/s23198146.

21. Chernopazov D. S., Shkuratskii D. N., Sekuntsov A. I. Patterns of specific gravity distribution of rocks overlying the industrial stratum of the Verkhnekamsk salt deposit. *Gornyi Zhurnal*. 2021, no. 4, pp. 39 — 45. [In Russ].

22. Sadd M. H. *Elasticity: Theory, applications, and numerics.* Academic Press, 2025, 648 p.

23. Barashkov V. N., Smolina I. Yu., Puteeva L. E., Pestsov D. N. *Osnovy teorii uprugosti: uchebnoe posobie* [Fundamentals of elasticity theory: textbook], Tomsk, 2012, 184 p.

24. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells], Moscow, Nauka, 1966, 640 p.

25. Feodos'ev V. I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials], Moscow, Nauka, 1986, 514 p.

26. Shchegolkov Yu. S. Substantiating the criteria for the main angular parameters of the displacement process under the conditions of mining reserves at the Verkhnekamsk potassium-magnesium salt deposit. *Mine Surveying and Subsurface Use*. 2024, no. 3, pp. 42 — 54. [In Russ]. DOI: 10.56195/20793332_2024_3_42_54.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Щегольков Юрий Сергеевич — главный специалист,
ПАО «Уралкалий», Березники, Россия, e-mail: rabota.shegolkov@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yu.S. Shchegolkov, Chief Specialist, PJSC «Uralkali»,
618426, Berezniki, Russia, e-mail: rabota.shegolkov@mail.ru.

Получена редакцией 18.12.2025; получена после рецензии 16.01.2026; принята к печати 19.01.2026.
Received by the editors 18.12.2025; received after the review 16.01.2026; accepted for printing 19.01.2026.